

# BULLETIN DE LA S. M. F.

HADAMARD

## Résolution d'un problème aux limites pour les équations linéaires du type hyperbolique

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 32 (1904), p. 242-268

<[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1904\\_32\\_242\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904_32_242_1)>

© Bulletin de la S. M. F., 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>*

RÉSOLUTION D'UN PROBLÈME AUX LIMITES POUR LES ÉQUATIONS  
LINÉAIRES DU TYPE HYPERBOLIQUE;

Par M. HADAMARD.

1. Soit l'équation linéaire aux dérivées partielles, à deux variables indépendantes

$$(1) \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0,$$

dont nous voulons déterminer une solution par des données aux limites relatives à une certaine ligne L.

Celle-ci peut se comporter, par rapport aux caractéristiques, de trois façons différentes :

I. Chacune des coordonnées  $x$  et  $y$  varie, sur L, toujours dans le même sens : autrement dit, L n'admet aucune tangente (sinon tangente d'inflexion) parallèle aux axes, et, si elle présente un point anguleux A, les deux arcs AB, AC issus de ce point sont

situés dans deux angles opposés par le sommet formés par les caractéristiques qui passent en A.

Dans ce cas, les données propres à déterminer la solution sont celles de Cauchy, c'est-à-dire les valeurs de  $z$  et de ses dérivées premières; et la méthode par laquelle on calcule effectivement la solution ainsi déterminée est celle de Riemann.

II. La ligne L présente un point anguleux A (ou un point pour lequel la tangente est parallèle à l'un des axes) tel que, des quatre angles formés par les caractéristiques qui passent en A, ceux qui contiennent les arcs AB, AC de L sont adjacents.

Dans ce cas, on devra (<sup>1</sup>) choisir, *a priori*, les données de Cauchy sur l'un des arcs, AB par exemple, et la valeur de  $z$  seul sur l'autre arc.

Le problème ainsi posé se ramène d'ailleurs (moyennant ce qu'on sait sur le cas I) à un autre, pour lequel M. Picard (<sup>2</sup>) a démontré l'existence de la solution, celui dans lequel on se donne les valeurs sur deux lignes, l'une caractéristique, l'autre quelconque, se coupant à angle aigu.

Pour résoudre l'un ou l'autre de ces problèmes et calculer la valeur de  $z$  en un point quelconque O, ainsi que nous l'avons fait dans un précédent article (<sup>3</sup>), il ne suffit plus de considérer la fonction  $u$  de Riemann. Celle qu'il convient d'introduire, et que nous avons appelée U dans l'article en question, coïncide avec  $u$  dans une partie du plan, mais en est distincte dans une autre, séparée de la première par une certaine caractéristique (<sup>4</sup>) dépendant du point O et suivant laquelle la discontinuité qui existe entre ces deux fonctions est proportionnelle à l'exponentielle

$e^{\int_b^x dx}$ , soit

$$(2) \quad U(O, M) = u - u_P e^{\int_P^M b dx},$$

P étant le point où la caractéristique en question coupe l'arc AC

(<sup>1</sup>) Voir un Mémoire précédent : *Sur l'intégrale résiduelle* (ce *Bulletin*, t. XXVIII, 1900, p. 89 et suiv.).

(<sup>2</sup>) In DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. IV, Note 1.

(<sup>3</sup>) *Sur un problème mixte aux dérivées partielles* (ce *Bulletin*, t. XXI, 1903).

(<sup>4</sup>) PR, figure 1 de l'article qui vient d'être cité.

(et qui n'est d'ailleurs autre que celui où cet arc est coupé par la caractéristique de l'autre système issue du point O).

U est défini par cette condition et celle de s'annuler sur AP.

III. Enfin, lorsque les deux arcs AB, AC sont situés *dans un seul et même angle* formé par les caractéristiques issues de A, M. Goursat a montré (<sup>1</sup>) que la fonction z est déterminée lorsqu'on donne des valeurs (sans aucune dérivée) sur AB et sur AC.

Quoique la question n'offre plus le même intérêt que pour les problèmes I et II, en raison de la signification physique de ceux-ci, on est conduit à chercher, pour le problème ainsi posé, une solution effective, par le moyen d'intégrales définies, analogue à celles qui sont acquises pour les précédents.

2. Si le problème III n'a pas une origine physique, nous allons voir qu'il dérive néanmoins, comme cas limite, d'une catégorie de questions qui, au contraire, sont introduites naturellement par les applications.

Nous avons d'ailleurs fait allusion à celle-ci incidemment (<sup>2</sup>), dans l'article cité : c'est celle à laquelle appartient le problème de la propagation de l'électricité dans un câble limité dans les deux sens.

Il s'agit encore, dans ce cas, de déterminer une solution d'une équation de la forme (1). La ligne L présente, cette fois, la disposition représentée par la figure 1. Elle se compose de deux arcs  $\beta B$ ,  $\gamma C$  le long desquels le coefficient angulaire de la tangente garde un signe invariable, le même pour les deux (nous supposerons que ce signe est +), reliés par un troisième arc  $\beta\gamma$  constamment incliné en sens contraire (par conséquent avec  $\frac{dy}{dx} < 0$ ) qui les laisse tous deux d'un même côté. Autrement dit, elle offre deux points anguleux de l'espèce II.

Les données sont celles de Cauchy sur  $\beta\gamma$ , les valeurs de z sur  $\beta B$  et  $\gamma C$ . La fonction cherchée s'obtient par une combinaison des méthodes qui conviennent aux cas I et II. Menons, en effet,

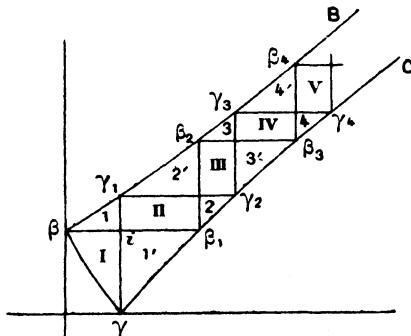
---

(<sup>1</sup>) *Comptes rendus*, 8 juin 1903; *Annales Fac. de Toulouse*, 2<sup>e</sup> série, Tome VI, p. 117-144.

(<sup>2</sup>) *Sur un problème mixte aux dérivées partielles*, n° 6, note.

par  $\beta$  et  $\gamma$  les caractéristiques  $\beta\beta_1$  et  $\gamma\gamma_1$  (dont le point d'intersection sera désigné par  $i$ ) jusqu'à rencontre en  $\beta_1, \gamma_1$  avec  $\gamma C, \beta B$  respectivement (fig. 1); puis, par  $\beta_1$  et  $\gamma_1$ , les caractéristiques

Fig. 1.



$\beta, \beta_2, \gamma, \gamma_2$  qui coupent  $\beta B, \gamma C$  en  $\beta_2, \gamma_2$ , et ainsi de suite. Nous divisons ainsi l'aire  $\Sigma$  comprise entre nos trois arcs de courbe en une série de régions, les unes médianes, I, II, ... (fig. 1), qui sont des rectangles (sauf la première), les autres latérales, 1, 2, ...; 1', 2', ..., qui sont des triangles mixtilignes limités chacun par deux segments de caractéristiques et un arc de ligne  $\beta B$  ou  $\gamma C$ .

Dans la région I (triangle mixtiligne  $\beta i \gamma$ ), on est dans le cas I et  $z$  se détermine par la méthode de Riemann; moyennant quoi, on le calcule dans les régions 1, 1' par la résolution du problème II<sup>(1)</sup>; dans la région II, de nouveau par la méthode de Riemann<sup>(1)</sup>; dans les régions 2, 2' par la résolution du problème II; et ainsi de suite.

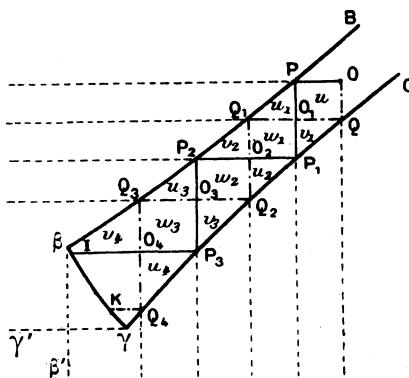
Les caractéristiques qui séparent les unes des autres nos différentes régions correspondent, physiquement, aux ondes et à leurs réflexions successives aux limites (limites représentées par les lignes  $\beta B, \gamma C$ ).

(1) Pour abréger le discours, nous ne distinguons pas entre le problème II et le problème équivalent de M. Picard, auquel nous avons fait allusion tout à l'heure; ni, de même, entre le problème de Cauchy et la détermination de l'inconnue par ses valeurs sur deux caractéristiques (DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. II, n° 359), tous deux justifiables de la méthode de Riemann. De même encore, dans le problème actuel (problème III), l'arc  $\beta\gamma$  peut se réduire à un segment de caractéristique sur lequel  $z$  seul sera donné.

3. Nous présenterons ce calcul sous une forme différente, en partant, non des extrémités  $\beta$  et  $\gamma$ , mais du point quelconque  $O$  où nous nous proposons de calculer  $z$ .

Par ce point menons les deux caractéristiques  $OP$ ,  $OQ$ . En supposant (comme il est représenté sur les figures 1 et 2) :

Fig. 2.



1<sup>o</sup> Que  $\frac{dy}{dx}$  est, comme nous l'avons déjà admis, toujours positif sur  $\beta B$  ou sur  $\gamma C$ ;

2<sup>o</sup> Que  $x$  et  $y$  vont tous deux en croissant de  $\beta$  en  $B$  et aussi de  $\gamma$  en  $C$ ;

3<sup>o</sup> Que le point  $\beta$  a une abscisse plus petite et une ordonnée plus grande que le point  $\gamma$ , ces deux caractéristiques devront être menées, l'une  $OP$  parallèlement à l'axe des  $x$  et dans le sens des  $x$  décroissants, l'autre  $OQ$  parallèlement à l'axe des  $y$  et dans le sens des  $y$  décroissants : la première jusqu'en son point d'intersection  $P$  avec  $\beta B$ , la seconde jusqu'en son point d'intersection  $Q$  avec  $\gamma C$ .

De même, par le point  $P$  menons la caractéristique  $PP_1$  parallèle à  $OQ$  jusqu'à sa rencontre en  $P_1$  avec  $\gamma C$ , et la caractéristique  $QQ_1$  parallèle à  $OP$ , jusqu'à sa rencontre en  $Q_1$  avec  $\beta B$ , le point d'intersection de  $PP_1$ ,  $QQ_1$  étant désigné par  $O_1$ . Par les points  $P_1$ ,  $Q_1$ , nous mènerons les caractéristiques  $P_1P_2$ ,  $Q_1Q_2$ , qui se coupent en  $O_2$  et rencontrent en  $P_2$ ,  $Q_2$  les arcs  $\beta B$ ,  $\gamma C$ , etc.

Nous considérerons alors :

1<sup>o</sup> La fonction  $u$  de Riemann relative au point  $O$  (solution de

l'équation donnée par rapport au point O et de l'équation adjointe, par rapport à un second point M);

2<sup>e</sup> La fonction  $u_1$ , également solution de l'équation adjointe

qui est nulle sur  $\beta P$  et égale, sur  $PP_1$ , à  $u - u_p e^{\int_P^M u dy}$

Cette double condition définit  $u_1$  dans l'espace compris entre l'arc  $\beta P$ , la droite  $PP_1$  et la parallèle  $\beta\beta'$  à  $PP_1$  menée par le point  $\beta$ .

3<sup>e</sup> La fonction  $v_1$ , solution de l'équation adjointe, qui est nulle sur  $\gamma Q$  et égale à  $u - u_q e^{\int_Q^M b dx}$  sur  $QQ_1$ .

Cette double condition la définit dans l'espace compris entre  $\gamma Q$ ,  $QQ_1$  et la parallèle  $\gamma\gamma'$  à  $QQ_1$  menée par  $\gamma$ .

4<sup>e</sup> La fonction  $w_1 = u_1 + v_1 - u$ .

Puis, de même, les fonctions  $u_2$ ,  $v_2$  qui se déduisent de  $w_1$  à l'aide des droites  $P_1P_2$ ,  $Q_1Q_2$ , comme  $u_1$ ,  $v_1$  se déduisent de  $u$  à l'aide des droites  $PP_1$ ,  $QQ_1$  (ce qui définit  $u_2$  dans l'aire comprise entre  $\gamma'\gamma$ ,  $\gamma P_1$  et  $P_1P_2$ ,  $v_2$  dans l'aire comprise entre  $\beta'\beta$ ,  $\beta Q_1$  et  $Q_1Q_2$ ), et la fonction  $w_2 = u_2 + v_2 - w_1$ .

Les fonctions  $u_3$ ,  $v_3$  se déduiront de  $u_2$  comme  $u_2$ ,  $v_2$  de  $w_1$  (à l'aide des caractéristiques  $P_2P_3$ ,  $Q_2Q_3$ ) et l'on aura

$$w_3 = u_3 + v_3 - w_2,$$

et ainsi de suite.

Enfin notre fonction U sera égale à  $u$  dans le rectangle  $OPO_1Q$ , à  $u_1$  dans le triangle mixtiligne  $PO_1Q_1$ , à  $v_1$  dans le triangle  $QO_1P_1$ , à  $w_1$  dans le rectangle  $O_1P_1O_2Q_1$ , à  $u_2$  dans le triangle  $P_1O_2Q_2$ , à  $v_2$  dans le triangle  $Q_1O_2P_2$ , etc.

On voit que U s'annule sur les deux lignes  $\beta B$ ,  $\gamma C$  et que, d'autre part, il est discontinu sur chacune des lignes  $P_iP_{i+1}$ ,  $Q_iQ_{i+1}$ , la discontinuité étant proportionnelle à  $e^{\int_b dx}$  pour celles qui sont parallèles à l'axe des  $x$ , et à  $e^{\int_a dy}$  pour celles qui sont parallèles à l'axe des  $y$ . La valeur de cette discontinuité ne subit d'ailleurs aucune variation brusque lorsque la ligne correspondante est traversée (en un point  $O_{i+1}$ ) par une autre de système opposé.

On voit aussi que les fonctions  $u_{2i+1}$ ,  $v_{2i+1}$  s'annulent sur  $\beta B$ , les fonctions  $u_{2i}$ ,  $v_{2i+1}$  sur  $\gamma C$ .

#### 4. Posons

$$(3) \quad u_i - w_{i-1} = (-1)^{i+1} \varphi_i,$$

la fonction  $w_0$ , qui intervient dans la définition de  $\varphi_1$ , étant prise égale à  $u$ .

Si, dans la relation que nous venons d'écrire, nous remplaçons  $w_{i-1}$  par sa valeur, elle devient

$$(-1)^{i+1} \varphi_i = u_i - u_{i-1} - v_{i-1} + w_{i-2} = u_i - v_{i-1} - (-1)^i \varphi_{i-1},$$

et, comme  $u_i$  et  $v_{i-1}$  sont tous deux nuls sur un même arc de  $\beta B$  ou de  $\gamma C$  (suivant la parité de  $i$ ), on a, sur cet arc,

$$(4) \quad \varphi_i = \varphi_{i-1},$$

pendant que, sur la caractéristique  $P_{i-1}, P_i$ ,  $\varphi_i$  est proportionnel à  $e^{\int_b^{dx}}$  ou à  $e^{\int_a^{dy}}$ , le facteur de proportionnalité étant tel que la relation (4) soit vérifiée au point  $P_{i-1}$ .

De même, en posant

$$(3') \quad v_i - w_{i-1} = (-1)^{i+1} \psi_i,$$

on aura, sur un arc de  $\beta B$  ou de  $\gamma C$ ,

$$(4') \quad \psi_i = \psi_{i-1},$$

pendant que, sur  $Q_{i-1}, Q_i$ ,  $\psi_i$  sera égal à une exponentielle de la forme précédemment indiquée ayant la valeur  $\psi_{i-1}$  au point  $Q_{i-1}$ .

Ces conditions définissent les fonctions  $\varphi_i$  *indépendamment des*  $\psi_i$ , et inversement.

Comme on a, d'autre part, en vertu de la définition de  $w_i$ ,

$$(-1)^{i+1} \varphi_i = u_i - w_{i-1} = w_i - v_i,$$

la différence  $w_i - w_{i-1}$  est égale à  $(-1)^{i+1} (\varphi_i + \psi_i)$ , de sorte qu'on a

$$(5) \quad \begin{cases} w_i = u + \varphi_1 - \varphi_2 + \dots \pm \varphi_i \\ \quad + \psi_1 - \psi_2 + \dots \pm \psi_i, \\ u_i = u + \varphi_1 - \varphi_2 + \dots \pm \varphi_i \\ \quad + \psi_1 - \psi_2 + \dots \pm \psi_{i-1}, \\ v_i = u + \varphi_1 - \varphi_2 + \dots \pm \varphi_{i-1} \\ \quad + \psi_1 - \psi_2 + \dots \pm \psi_i, \end{cases}$$

en un mot

$$(6) \quad U(M, O) = U = u + \varphi_1 - \varphi_2 + \dots \pm \varphi_i + \psi_1 - \psi_2 + \dots \pm \psi_k,$$

où  $i$  et  $k$  (qui diffèrent entre eux au plus d'une unité) sont respectivement les nombres de lignes  $P_{h-1}, P_h$  et  $Q_{h-1}, Q_h$  qu'il faut traverser pour aller de  $O$  en  $M$ .

On peut encore écrire

$$(7) \quad U = u + \Phi + \Psi,$$

où

$$(8) \quad \begin{cases} \Phi = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots \pm \varphi_i, \\ \Psi = \psi_1 + \psi_2 + \dots \pm \psi_k. \end{cases}$$

5. La fonction  $U$  ainsi définie est celle qui donne la solution du problème précédemment posé. Il suffit d'appliquer à cette fonction et à la fonction  $z$  la formule fondamentale dans l'aire  $OP\beta\gamma QO$ .

L'arc  $\beta\gamma$  coupe toujours deux (exactement) des lignes  $P_iP_{i+1}$ ,  $Q_iQ_{i+1}$  : soient  $I$  son point d'intersection avec un arc  $P_iP_{i+1}$ ,  $K$  son point d'intersection avec un arc  $Q_kQ_{k+1}$  ( $k$  étant égal à  $i-1$ , à  $i$  ou à  $i+1$ ) ; on aura

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} z_0 = \sum_{h=0}^i (\varphi_h z)_{P_h} + \sum_{h=0}^k (\varphi_h z)_{Q_h} + \frac{1}{2} (-1)^i (\varphi_{i+1} z)_I \\ \quad + \frac{1}{2} (-1)^k (\psi_{k+1} z)_K + \frac{1}{2} \int_{\beta}^P z \frac{dU}{ds} ds - \frac{1}{2} \int_{\gamma}^Q z \frac{dU}{ds} ds \\ \quad + \int_{\beta}^{\gamma} \left[ \frac{1}{2} \left( U \frac{dz}{ds} - z \frac{dU}{ds} \right) ds + U z (b dx - a dy) \right], \end{array} \right.$$

où  $s$  désigne, comme dans l'article : *Sur un problème mixte aux dérivées partielles*, l'arc de contour et  $v$  la conormale à ce contour, définie comme dans l'article en question (<sup>1</sup>).

5 bis. En substituant à l'arc  $\beta\gamma$ , comme limite de l'aire d'inté-

(<sup>1</sup>) Cette formule est relative à la disposition de figure admise dans le texte, c'est-à-dire suppose que  $OP$  est parallèle à l'axe des  $x$  et  $OQ$  à l'axe des  $y$ . Dans le cas contraire, il faudrait changer les signes des termes intégraux.

gration, deux caractéristiques menées (dans le sens des  $x$  et des  $y$  croissants, cette fois) par un second point  $O'$ , on reconnaîtra, absolument comme nous l'avons fait pour le problème II, dans l'article cité (<sup>1</sup>), que notre fonction  $U$  ne change pas quand on permute les deux points dont elle dépend, en même temps que l'équation donnée avec son adjointe.

$U$ , considéré comme fonction du point  $O$ , satisfait donc à l'équation donnée. Il a la forme  $u_i, v_i$  ou  $w_i$  suivant que, considéré comme fonction de  $O'$ , il avait la forme  $v_i, u_i$  ou  $w_i$ .

6. La situation de l'arc  $\beta\gamma$  par rapport aux lignes de discontinuité de  $U$  est, de même, liée très simplement à la position du point  $O$  dans l'une ou l'autre des régions énumérées au n° 2. Les deux caractéristiques  $P_i P_{i+1}, Q_k Q_{k+1}$  rencontrées par  $\beta\gamma$  sont parallèles entre elles si  $O$  est dans une des régions latérales, perpendiculaires s'il est dans une des régions médianes.

Dans ce dernier cas, il est vrai (où  $k = i$ ), deux dispositions sont possibles; l'arc  $\beta\gamma$  pouvant laisser le point  $O_{i+1}$  en deçà (c'est-à-dire du même côté que  $O$ ) ou au delà; et cette disposition dépend d'autre chose que des régions précédemment énumérées. Il pourrait sembler, au premier abord, qu'elle intervient d'une façon essentielle dans la solution, si l'on se bornait à définir  $U$  comme nous l'avons fait au n° 3. Les résultats du n° 4 et la formule (9) montrent qu'il n'en est rien, les termes introduits respectivement par les deux séries de discontinuités étant totalement indépendants les uns des autres.

7. De la solution qui vient d'être développée on passe très simplement à celle du problème de M. Goursat pour la figure formée par les deux arcs  $AB, AC$ , situés dans un même angle formé par les caractéristiques issues de  $A$ . Il suffit de supposer que l'on prenne sur  $AB, AC$  respectivement deux points  $\beta, \gamma$ , qu'on les joigne par un chemin quelconque (incliné, par rapport aux caractéristiques, comme nous l'avons supposé dans ce qui précède), puis que cet arc  $\beta\gamma$  devienne infiniment petit, ses deux extrémités tendant simultanément vers le point  $A$ . Dans ces conditions, les

---

(<sup>1</sup>) *Sur un problème mixte aux dérivées partielles*, n° 5.

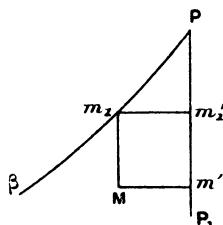
points  $P_i, Q_i$  seront évidemment en nombre infini ainsi que les fonctions  $\varphi_i, \psi_i$  et les sommes qui figurent dans la formule (9) seront transformées en séries.

8. Il reste à savoir comment les fonctions  $U, \varphi_i, \psi_i$  se comporteront à la limite. Nous remonterons, pour cela, à la formation de ces fonctions par la méthode d'approximation employée par M. Picard pour résoudre le problème dont nous avons parlé plus haut.

En appelant  $PP_1$  et  $P\beta$  deux lignes, l'une caractéristique, l'autre quelconque (<sup>1</sup>), se coupant à angle aigu, et sur lesquelles on donne les valeurs de l'inconnue  $z$  (concordantes en  $P$ ), cette méthode consiste, on le sait, à déterminer tout d'abord, par ces données aux limites, une solution  $z_0$  de l'équation  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$ , c'est-à-dire une quantité de la forme  $X + Y$  (où  $X$  ne dépend que de  $x$  et  $Y$  de  $y$ ).

Supposons, comme nous l'avons fait, que  $PP_1$  soit parallèle à l'axe des  $y$ : alors  $Y$  sera la valeur donnée  $z$  au point  $m'$ , projection du point considéré  $M(x, y)$  sur  $PP_1$ . Quant à  $X$ , on l'obtiendra en menant par  $M$  une parallèle à  $PP_1$ , jusqu'à rencontrer en  $m_1$  (fig. 3) avec  $P\beta$ , et projetant à son tour le point  $m_1$  en  $m'_1$ ,

Fig. 3.



sur  $PP_1$ .  $X$  est alors la différence (nulle en  $P$ ) des valeurs de  $z$  en  $m_1$  et  $m'_1$ .

(<sup>1</sup>) M. Picard prend, pour équation de  $P\beta$ ,  $y = x$ . La méthode est la même pour le cas de  $P\beta$  quelconque, les deux cas se déduisant d'ailleurs l'un de l'autre par un changement de variable évident opéré sur  $x$  ou sur  $y$ .

$z_0$  étant ainsi défini, on aura

les intégrales doubles étant étendues au rectangle  $Mm_1 m' m'_1$  ; puis

$$(11) \quad z = z_0 + z_1 + \dots + z_k + \dots$$

## L'intégrale double

$$I = \int \int f dx dy,$$

étendue au rectangle  $Mm_1m'm'_1$ , considérée comme fonction des coordonnées  $x, y$  du point M, a les dérivées suivantes :

$$\frac{\partial I}{\partial y} = - \int_M^{m'} f \, dx,$$

en désignant par  $p$  le coefficient angulaire  $\frac{dy}{dx}$  de la tangente à la ligne  $P\beta$  au point  $m_1$ .

Nous supposerons que ce coefficient  $p$  est inférieur en valeur absolue à un nombre fixe  $K$  (''). Cette condition est vérifiée pour nos deux lignes  $AB$  et  $AC$  si, ayant une courbure déterminée, elles ne sont tangentes en  $A$  à aucune des caractéristiques issues de ce point. Nous ferons donc, dans ce qui suit, cette hypothèse restrictive.

Soient, dans ces conditions,  $M$  le maximum du module de  $z_0$ ;  $M_1$  celui de la dérivée  $X'$ ;  $M_2$  celui de la dérivée  $Y'$ ;  $H$  celui des coefficients de l'équation;  $\xi = Mm'$  et  $\eta = Mm$ , les deux dimen-

<sup>(1)</sup> Le calcul actuel subsiste donc pour le cas où la ligne  $P\beta$  est normale à  $PP_1$ , mais non pour celui où elle lui est tangente.

sions du rectangle d'intégration, dans les formules (10). On aura

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial z_1}{\partial y} \right| &< \xi H(M + M_1 + M_2), \\ \left| \frac{\partial z_1}{\partial x} \right| &< (p\xi + \eta) H(M + M_1 + M_2), \\ |z_1| &< \left( p \frac{\xi^2}{2} + \xi \eta \right) H(M + M_1 + M_2). \end{aligned}$$

Cette dernière valeur est d'ailleurs, avec la précédente, dans un rapport que l'on peut limiter *a priori*, connaissant des limites supérieures de  $\xi$  et de  $\eta$ , et qui est même aussi petit qu'on le veut si ces limites sont suffisamment petites. On peut donc en faire abstraction pour majorer l'expression  $a \frac{\partial z_1}{\partial x} + b \frac{\partial z_1}{\partial y} + cz_1$ , sous condition d'augmenter convenablement  $H$ .

De la limitation ainsi obtenue pour  $a \frac{\partial z_1}{\partial x} + b \frac{\partial z_1}{\partial y} + cz_1$ , on déduit par intégration de 0 à  $\xi$  par rapport à  $\xi$ , ou de 0 à  $\eta$  par rapport à  $\eta$ , des limites supérieures pour  $z_2$  et ses dérivées premières; en poursuivant ce calcul, on voit sans difficulté que  $z_p$  et ses dérivées sont inférieurs à la quantité

$$(M + M_1 + M_2) \frac{H_1^k (\xi + \eta)^k}{k!},$$

$H_1$  ne dépendant que des coefficients de l'équation et de la quantité désignée précédemment par  $K$  (autrement dit, de la forme de la ligne  $P\beta$ ).

$z - z_0$  et ses dérivées premières sont donc inférieurs à  $(M + M_1 + M_2)[e^{H_1(\xi + \eta)} - 1]$ , où (du moment qu'on a limité  $\xi$  et  $\eta$ ) à

$$(12) \quad H_1(M + M_1 + M_2)(\xi + \eta),$$

$H_2$  ne dépendant que des coefficients de l'équation, de la quantité  $K$  et des limites supérieures de  $\xi$ ,  $\eta$ .

9. Nous ne nous servirons toutefois de cette première évaluation que pour l'appliquer à la fonction  $U$  qui figure dans l'article cité : *Sur un problème mixte aux dérivées partielles* (autrement dit à celle que nous appelons  $u$ , ou  $v$ , dans notre nota-

tion actuelle). Cette fonction étant définie par ses valeurs sur l'arc de courbe et celles qu'elle prend sur un segment de caractéristique (valeurs dont les premières sont nulles et les secondes immédiatement liées à la fonction de Riemann), nous voyons, par ce qui précède, que l'on connaît des limites supérieures de  $U$  et de ses dérivées premières par rapport aux coordonnées du point  $M$ , si l'on a limité les coordonnées des deux points et le coefficient angulaire de la tangente à la ligne  $P\beta$ . Des calculs tout semblables étendraient cette conclusion aux dérivées d'ordre supérieur.

D'autre part, nous verrons plus loin qu'elle subsiste également lorsqu'on différentie, non seulement par rapport aux coordonnées du point  $M$ , mais aussi par rapport à celles du point  $O$ .

Ces résultats relatifs à la fonction  $U$  nous permettent d'assigner, à la fonction  $z$  que nous avons considérée au numéro précédent, une limite supérieure plus avantageuse que la première. Il suffit pour cela partir de la formule <sup>(1)</sup>

$$(13) \quad \begin{cases} z_M = (uz)_{m_1} + (uz)_{m'} - u_{m_1} e^{\int_{m_1}^{m'} b dx} z_{m'_1} \\ \quad - \int_P^{m'} z \left( \frac{\partial U}{\partial y} - a U \right) dy - \int_P^{m_1} \frac{1}{2} z \frac{dU}{dy} ds, \end{cases}$$

qui peut s'écrire

$$(13') \quad \begin{cases} z_M = (uz)_{m_1} + u_{m'} (z_{m'} - z_{m'_1}) + z_{m'_1} \left( u_{m'} - u_{m_1} e^{\int_{m_1}^{m'} b dx} \right) \\ \quad - \int_P^{m'} z \left( \frac{\partial U}{\partial y} - a U \right) dy - \int_P^{m_1} \frac{1}{2} z \frac{dU}{dy} ds. \end{cases}$$

Les quantités  $u_{m_1} - 1$ ,  $u_{m'} - u_{m_1} e^{\int_{m_1}^{m'} b dx}$ ,  $\frac{\partial U}{\partial y} - a U$ ,  $\frac{dU}{dy}$  ont toutes des limites supérieures de la forme  $H_3 \eta$  (où  $H_3$  est limité de la même façon que  $H_1$  et  $H_2$ ). Cela résulte, pour les deux premières, de la forme de la fonction de Riemann; pour les deux dernières (moyennant les limitations obtenues au numéro précédent) de ce que les valeurs <sup>(2)</sup> de  $U$  sont nulles sur  $Pm_1$  et proportionnelles à  $\eta$ .

<sup>(1)</sup> Sur un problème mixte aux dérivées partielles, n° 4.

<sup>(2)</sup> Ibid., n° 2.

sur  $m_1, m'_1$ . Si l'on remarque que  $z_{m'} - z_{m_1}$  est le produit de  $\gamma_1$  par une valeur de  $\frac{\partial z}{\partial y}$  sur  $PP_1$ , on peut écrire

$$(14) \quad |z_M - z_{m_1}| < H_4 \eta (|z_{m_1}| + M)$$

ou

$$(14') \quad |z_M| < (1 + H_4 \eta) |z_{m_1}| + H_4 \eta M,$$

$H_4$  étant une quantité analogue à  $H_1, H_2, H_3 ; M$ , une limite supérieure des modules de  $z$  et de sa dérivée sur  $PP_1$ ;  $m_2, m_3$ , des points de l'arc  $Pm_1$ .

La formule (13) fournit également des limites supérieures des dérivées de  $z$ , savoir :

Pour  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , une combinaison linéaire à coefficients finis de  $M$  et du maximum de  $|z|$  sur  $Pm_1$ ;

Pour  $\frac{dz}{dx}$ , une combinaison des mêmes quantités et de la dérivée  $\frac{dz}{dx}$  prise en  $m_1$  suivant la courbe  $Pm_1$ . On a

$$(15) \quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{dz_{m_1}}{dx} e^{\int_M^{m_1} a dy} + H_5 z_{m_1} + H_6 M,$$

où la dérivée  $\frac{dz_{m_1}}{dx}$  est prise le long de la ligne  $Pm_1$ ,  $m_1$  étant un point de cette ligne;  $H_5, H_6$  des nombres finis.

10. Cela posé, revenons aux fonctions  $\varphi_i$  et  $\psi_i$ . Nous pouvons en indiquer immédiatement les valeurs sur les lignes de discontinuité correspondantes. On a, évidemment, sur une ligne  $P_i P_{i+1}$ ,

$$(16) \quad \varphi_i = -e^{\int_0^{P_i} b dx + \int_{P_i}^{P_{i+1}} a dy + \int_{P_{i+1}}^{P_1} b dx + \dots}$$

Il est clair que la série des intégrales est absolument convergente si les coefficients restent finis. Donc les valeurs considérées des  $\varphi_i$  tendent vers une limite  $\lambda$  différente de zéro, et même la série  $\sum [\varphi_{i+1}(P_{i+1}) - \varphi_i(P_i)]$  converge absolument.

Ceci nous permet, tout d'abord, de voir ce que devient, lorsque  $i$

augmente indéfiniment, la somme

$$\sum_0^i (w_h z) p_h$$

qui figure dans la formule (9) et peut s'écrire sous l'une ou l'autre des deux formes équivalentes

$$(17) \quad \sum_0 (-1)^{h+1} (\varphi_h z) p_h = \sum_0 (-1)^{h+1} (\varphi_{h+1} z) p_h.$$

Pour  $i = \infty$ , on a une série, laquelle est divergente, puisque le terme général ne tend pas vers zéro. Mais, en groupant les termes deux à deux, on obtient au contraire les deux séries

$$(18) \quad -[(z \varphi_0) p - (z \varphi_1) p_1] - [(z \varphi_2) p_2 - (z \varphi_3) p_3] - \dots,$$

$$(18') \quad -(z \varphi_0) p + [(z \varphi_1) p_1 - (z \varphi_2) p_2] + [(z \varphi_3) p_3 - (z \varphi_4) p_4]$$

qui sont toutes deux convergentes. Du moins, il en est ainsi si les valeurs de  $z$  sur chacun des deux arcs donnés tendent, lorsqu'on s'approche du sommet de l'angle, vers une même limite  $z_A$ , et cela de manière que la série  $\sum (z_{p_{i+1}} - z_{p_i})$  soit absolument convergente.

Dans ces conditions, en un mot, la série (17) a deux sommes, suivant qu'on s'arrête à un terme de rang pair ou à un terme de rang impair.

La différence de ces deux sommes étant  $\lambda z_A$ , la quantité

$$(19) \quad \sum_0^i (w_h z) p_h + \frac{1}{2} (-1)^i (\varphi_{i+1} z)_1$$

qui figure dans la formule (9), tend vers une limite parfaitement déterminée, à savoir la moyenne des deux sommes en question<sup>(1)</sup>. Cette limite [somme généralisée de la série (17) au sens de Leibniz-Borel] sera désignée par  $S$ .

---

(1) Nous admettons ici, comme nous serons conduits à le faire plus loin, que les valeurs de  $z$  tendent vers  $z_A$  lorsqu'on s'approche de  $A$  d'une manière quelconque à l'intérieur de l'angle  $BAC$ .

De même les quantités  $\psi_i(Q_i)$  tendront vers une limite (<sup>1</sup>)  $\mu$ , et la quantité

$$\sum_0^k (w_h \cdot z)_{0h} + \frac{1}{2} (-1)^k (\psi_{k+1} \cdot z)_k,$$

vers une limite  $S'$ .

11. Les valeurs (16) d'une fonction quelconque  $\varphi_i$  jouent, dans sa détermination, le rôle de la fonction que nous appelions tout à l'heure  $Y$  : il est donc certain que cette fonction et sa dérivée ont une limite supérieure indépendante de  $i$ .

Nous allons montrer que les valeurs des  $|\varphi_i|$  (mais non, cette fois, de leurs dérivées) sur les arcs  $AP$ ,  $AQ$ , et, par conséquent, aussi dans toute la région qui nous intéresse, sont aussi inférieures à un nombre fixe.

Appelons, pour abréger, *conséquent* d'un point de l'arc  $AB$ , le point de l'arc  $AC$  qui a même abscisse, et *conséquent* d'un point de l'arc  $AC$ , le point de  $AB$  qui a même ordonnée, le premier point étant, dans l'un et l'autre cas, appelé *l'antécédent du second*. L'antécédent et le conséquent occupent, l'un par rapport à l'autre, la situation des points  $m_i$  et  $M$ , considérés au n° 9 ; c'est, en particulier, l'antécédent de  $M$  qui joue le rôle du point  $m_i$  lorsqu'on calcule une fonction  $\varphi_i$  en  $M$  à l'aide des fonctions précédentes par la formule (13). Le segment désigné, au n° 9, par  $\gamma$  est parallèle tantôt à l'axe des  $x$  (si le point  $M$  est sur  $AB$ ), tantôt à l'axe des  $y$  (si  $M$  est sur  $AC$ ).

Cela posé, la valeur d'une fonction  $\varphi_{2i}$  (par exemple) en un point  $M$  de l'arc  $AP$  est liée, par l'inégalité (14'), à la valeur de cette même fonction, ou, ce qui revient au même, de  $\varphi_{2i-1}$  en un point  $m_3$  de  $AQ$  plus éloigné de  $A$  que l'antécédent de  $M$ . Cette dernière valeur est liée d'une manière analogue à la valeur de  $\varphi_{2i-2}$  en un point de  $AP$  plus éloigné de  $A$  que l'antécédent de  $m_3$ , le

---

(<sup>1</sup>) Cette limite est égale à la précédente lorsque l'équation est à invariants égaux. Alors, en effet,  $b dx + a dy$  est une différentielle exacte, et l'on a

$$\lambda = \mu = - e^{\int_0^A b dx + a dy}$$

nouveau segment  $\eta$  étant, cette fois, celui qui joint  $m_3$  à son antécédent, et ainsi de suite.

Il est clair que les différents segments  $\eta$  forment une série convergente, dont la somme est toujours inférieure à la somme  $\sigma$  des deux coordonnées du point O, rapportées aux axes  $\beta\beta'$ ,  $\gamma\gamma'$ . Il en résulte sans difficulté (<sup>1</sup>) que *les  $\varphi_i$  sont finis*, comme nous l'avions annoncé.

12. On peut même aller plus loin. Considérons les conséquents successifs d'un point quelconque  $M_0$  de AB ou de AC et la valeur que prend, au  $i^{\text{ème}}$  de ces conséquents, la fonction  $\varphi_i$ . On a ainsi, en faisant varier  $i$ , une série de quantités *qui tendent vers une limite l*. C'est ce qu'on voit immédiatement en partant non plus de l'inégalité (14'), mais de l'inégalité (14), le second membre de cette inégalité étant le terme général d'une série convergente. La différence entre  $l$  et le terme initial  $\varphi_0(M_0)$  est au plus de l'ordre de la somme de cette série, c'est-à-dire de  $2H_4M\sigma_0$ ,  $M$  étant le maximum des  $|\varphi_i|$  et  $\sigma_0$  la somme des deux coordonnées de  $M_0$ .

Mais, quoique les conséquents successifs tendent toujours vers le point A, *la limite l est variable avec le point M<sub>0</sub>*. En effet, lorsque  $M_0$  coïncide avec P,  $l$  est donné par la formule (16); et, d'autre part, lorsque  $M_0$  tend vers A,  $l$  tend vers  $-u_A$  [puisque il en est ainsi pour  $\varphi_0(M_0)$  et que  $\sigma_0$  tend vers zéro]. Or ces deux valeurs de  $l$  sont évidemment différentes en général.

13. Passons aux dérivées premières des  $\varphi_i$ . Ces dérivées sont de deux sortes. Nous appellerons *dérivées parallèles* les dérivées des  $\varphi_{2i}$  par rapport à  $x$ , ou des  $\varphi_{2i+1}$  par rapport à  $y$ , qui jouent le rôle de ce qui était, au n° 9, une dérivée par rapport à  $y$ ; *dérivées perpendiculaires*, les dérivées des  $\varphi_{2i}$  par rapport à  $y$ , ou des  $\varphi_{2i+1}$  par rapport à  $x$ .

*Les dérivées parallèles restent finies*, en vertu de l'évaluation obtenue au n° 9 pour  $\frac{\partial z}{\partial y}$ .

---

(<sup>1</sup>) En effet, soit  $\Pi_i$  le produit des  $i$  premières valeurs de  $1 + H_4\eta$ . Ce produit est toujours inférieur à  $e^{H_4\sigma}$ . Il en résulte [en divisant l'inégalité (14) par  $\Pi_i$ ] que  $\varphi_i$  est inférieur à

$$M\sigma < e^{H_4\sigma} \left( 1 + H_4 M \sum \frac{\tau_i}{\Pi_i} \right) < e^{H_4\sigma} (1 + H_4 M \sigma).$$

Il ne saurait évidemment en être de même pour les dérivées perpendiculaires, d'après ce que nous venons de trouver au n° 12.

On peut, d'ailleurs, vérifier directement que ces dérivées augmentent indéfiniment. Partons, par exemple, de l'équation  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z$ , en supposant que AB et AC soient deux droites, de coefficients angulaires  $\alpha > 1$  et  $\alpha' = \frac{1}{\alpha}$ . Les  $\varphi_i$  successifs sont tous égaux à 1 sur les segments correspondants de la ligne brisée OPP<sub>1</sub>P<sub>2</sub>..., et leurs dérivées parallèles sont nulles dans les mêmes conditions. Soient  $p_0, q_1$  les dérivées perpendiculaires  $\frac{\partial \varphi_0}{\partial y}$  et  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}$  au point P;  $p_1, q_2$  les dérivées  $\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_2}{\partial y}$  au point P<sub>1</sub>; etc. On a

$$\begin{aligned} p_0 &= \overline{OP}, \\ q_1 &= \alpha p_0, \\ p_1 &= \alpha p_0 + \overline{PP_1}, \\ p_2 &= \alpha p_1 + \overline{P_1 P_2}, \\ &\dots; \end{aligned}$$

en général :

$$p_{i+1} - \alpha p_i = \overline{P_i P_{i+1}} = \frac{\overline{PP_1}}{\alpha^i},$$

d'où

$$p_i = k \alpha^i - \frac{k'}{\alpha^i}$$

avec

$$k' = \frac{\alpha \overline{PP_1}}{\alpha^2 - 1}, \quad k = k' + \overline{OP}.$$

$p_i$  croît donc indéfiniment comme  $\alpha^i$ .

Nous pouvons, par contre, limiter la croissance de ces dérivées perpendiculaires à l'aide de l'inégalité (15) (n° 9). Supposons que les deux lignes données AB et AC ne soient pas tangentes entre elles, de sorte que leurs coefficients angulaires soient  $\alpha$  et  $\alpha' < \alpha$ . L'inégalité en question montre (<sup>1</sup>) que le maximum de la dérivée perpendiculaire de  $\varphi_i$  croît au plus comme  $\left(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}}\right)^i$ .

(<sup>1</sup>) Le nombre par lequel il faut multiplier la dérivée perpendiculaire de  $\varphi_i$  en un point pour obtenir [abstraction faite d'un terme additif provenant des termes  $H_s z_m s + H_s M$  qui figurent dans la formule (15)] celle de  $\varphi_{i+1}$  au deuxième con-

Des évaluations ainsi faites sur les  $\varphi_i$  résultent celles qui concernent U, savoir :

1° U croît au plus comme l'indice  $i$ ;

Puis, en supposant toujours que nos deux lignes ont des tangentes distinctes :

2° Les dérivées premières de U croissent au plus comme  $(\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha'}})^i$ .

Considérons un segment de caractéristique tracé entre AB et AC. S'il est compris dans la région d'existence de  $\varphi_i$ , sa longueur est au plus de l'ordre de  $(\frac{\alpha'}{\alpha})^{\frac{i}{2}}$ . Donc la variation totale (JORDAN, *Cours d'Analyse*) de U le long de ce segment est finie.

14. Dans ces conditions, nous sommes en mesure de passer à la limite dans la formule (9). Nous prendrons à cet effet, pour  $\beta\gamma$ , un segment de caractéristique, de sorte que l'intégrale suivant  $\beta\gamma$  peut s'écrire (1)

$$(20) \quad \int_{\beta}^{\gamma} Uz(b dx - a dy) \pm \frac{1}{2}(U dz - z dU),$$

le signe + devant être pris si  $\beta\gamma$  est parallèle à l'axe  $x$ , le signe — dans le cas contraire. Le terme  $\pm \frac{1}{2}U dz$  sera intégré par parties, ce qui donnera un terme tout intégré

$$(21) \quad \pm \frac{1}{2} \int d(Uz) = \frac{1}{2}(-1)^i(\varphi_{i+1}z)_l + \frac{1}{2}(-1)^k(\varphi_{k+1}z)_K$$

---

séquent de ce point peut être un peu plus grand que  $\frac{\alpha'}{\alpha}$  en raison : 1° du facteur exponentiel  $e^{i\alpha dy}$ ; 2° de la courbure des lignes données. Mais il est aisément de voir que les facteurs supplémentaires qu'il serait nécessaire d'introduire pour tenir compte de cette circonstance donnent un produit convergent, si AB et AC ont une courbure finie, et même si ces lignes ont en A une singularité algébrique. Il suffit même (on s'en convainc aisément), pour que le produit du maximum de la dérivée perpendiculaire de  $\varphi_i$  par le segment  $P_i P_{i+1}$  reste fini, que la courbure de chacune des lignes AB, AC garde un sens invariable au voisinage de A; plus généralement, encore, que le coefficient angulaire de la tangente soit à variation bornée.

(1) La conormale  $v$  est définie, rappelons-le, par les relations

$$\frac{dx}{dv} = \frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{dv} = -\frac{dy}{ds}.$$

(puisque  $U$  est nul aux extrémités), terme qui viendrait doubler le terme semblable de la formule (9), et un terme intégral

$$(21') \quad \int_{\beta}^{\gamma} U z (b dx - ady) \mp z dU.$$

*Nous imposerons à la fonction inconnue  $z$  la condition d'être parfaitement continue au voisinage de  $A$ , de sorte que  $z = z_A + \varepsilon$ , où  $\varepsilon$  est infiniment petit. Alors dans l'intégrale (21'), la partie provenant de  $\varepsilon$  tend vers zéro, puisque la variation totale de  $U$  est finie. Le reste de l'intégrale se réduit à  $\mp z_A \int_{\beta}^{\gamma} du$ . Il change donc le signe des termes (21). (Tout se passe, en somme, comme si nous avions intégré par parties, non le terme  $U dz$ , mais le terme  $z dU$ , sauf que le détour employé nous dispense de faire des hypothèses sur l'ordre de grandeur des dérivées de  $z$ .)*

On voit donc que, si l'équation (1) admet une solution  $z$  satisfaisant aux conditions aux limites données et continue en  $A$ , cette solution est forcément donnée par la formule

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} z_0 &= \lim_{i,k \rightarrow \infty} \left\{ \sum_{h=0}^i (-1)^{h+1} (\varphi_h z)_h p_h \right. \\ &\quad \left. + \sum_{h'=0}^k (-1)^{h'+1} (\psi_{h'} z)_{h'} + \frac{1}{2} \int_{\beta}^P z \frac{dU}{dy} ds - \int_{\gamma}^Q z \frac{dU}{dy} ds \right\}, \end{aligned} \right.$$

les termes  $(-1)^i (\varphi_{i+1} z)_i + (-1)^k (\psi_{k+1} z)_k$  ayant disparu comme nous venons de le voir.

15. Il y a lieu de se demander si la restriction que nous venons d'imposer à  $z$  n'est pas purement artificielle. Il n'en est rien : cette restriction (ou, du moins, une restriction de cette espèce) est imposée par la nature des choses. On pourrait rechercher des fonctions  $z$  satisfaisant à notre équation et tendant (quoique non uniformément au voisinage de  $A$ ) vers les valeurs données lorsqu'on s'approcherait d'un point quelconque de  $AB$  ou de  $AC$ ; mais le problème ainsi posé est tout à fait indéterminé.

Il suffit en effet, pour obtenir une telle solution  $z$ , de la déterminer par les valeurs données sur  $AB$ ,  $AC$  et par des données de Cauchy arbitraires sur une ligne  $BC$  reliant les arcs donnés : c'est

le problème posé au n° 2 et résolu aux n°s 2-6, l'arc BC jouant, cette fois, le rôle de  $\beta\gamma$ .

On peut, d'ailleurs, imposer à  $z$  la condition d'être continu (ailleurs qu'en A) ainsi que ses dérivées jusqu'à un ordre déterminé quelconque, pourvu que des conditions de continuité correspondantes (supposées vérifiées sur AB et sur AC) soient aussi imposées en B, en C et le long de l'arc BC.

16. Si le second membre de la formule (22) ne tend pas vers une limite déterminée, le problème est impossible.

Nous allons voir que la limite existera si les maxima de  $|z - z_A|$  sur les arcs  $P_i Q_{i+1}, Q_i P_{i+1}$  forment deux séries convergentes. C'est ce qui arrivera, en particulier (puisque, dans nos hypothèses, les segments  $AP_i, AQ_i$  décroissent en progression géométrique) si les valeurs données vérifient la condition de Lipschitz ou même la condition moins restrictive

$$(23) \quad |z_M - z_A| < \overline{AM}^\rho \quad (\rho > 0).$$

Pour établir la conclusion que nous venons d'énoncer, nous aurons à étudier les intégrales

$$\int_{\beta}^P z \frac{dU}{ds} ds, \quad \int_{\gamma}^Q z \frac{dU}{ds} ds.$$

U étant donné par la relation (7), nous pouvons, par exemple, nous borner à l'étude de

$$\int_{\beta}^P \frac{d\Phi}{ds} ds.$$

Posons

$$\Phi = \Phi' - \Phi'',$$

$\Phi'$  désignant [dans le second membre de la première formule (8)] la somme des termes pris avec le signe + (c'est-à-dire d'indice impair) et  $\Phi''$ , la somme des termes pris avec le signe -. On peut écrire

$$\frac{d\Phi'}{ds} ds = \frac{\partial \Phi'}{\partial x} dx - \frac{\partial \Phi'}{\partial y} dy = d\Phi' - 2 \frac{\partial \Phi'}{\partial y} dy,$$

$$\frac{d\Phi''}{ds} ds = - d\Phi'' + 2 \frac{\partial \Phi''}{\partial x} dx,$$

la transformation étant, chaque fois, dirigée de manière à faire

apparaître, au second terme, une dérivée parallèle. Les dérivées de cette espèce croissant, pour  $\Phi'$  et pour  $\Phi''$ , au plus comme  $i$ , les intégrales correspondantes sont évidemment finies. Dans l'intégrale

$$\int_{\beta}^{\rho} z d \frac{\Phi' + \Phi''}{2},$$

nous remplacerons  $z$  par  $(z - z_A) + z_A$ , et la partie correspondant à  $z - z_A$  sera finie (puisque la variation totale de  $\frac{\Phi' + \Phi''}{2}$  sur chacun des arcs  $P_i Q_{i+1}$ ,  $Q_i P_{i+1}$  est finie) moyennant l'hypothèse faite il y a un instant. Si l'on tient compte des termes analogues en  $\frac{d\Psi}{dv}$  et de ceux qui sont relatifs à l'arc  $AC$ , — en remarquant que, la fonction  $\frac{\Phi' + \Phi''}{2}$ , par exemple, s'augmente de  $\varphi_i$  chaque fois qu'on traverse (en se dirigeant vers  $A$ ) un point  $P_i$ , — la formule (22) s'écrira

$$(22') \quad \left\{ \begin{array}{l} z_0 = \sum_0^{\infty} (-1)^{k+1} [\varphi_h(z - z_A)]_{P_h} + \sum_0^{\infty} (-1)^{k'+1} [\psi_{h'}(z - z_A)]_{Q_{h'}} \\ \quad + \int_{QAP} z \left[ \frac{1}{2} \frac{du}{dv} ds - \frac{\partial(\Phi' - \Psi'')}{\partial x} dx - \frac{\partial(\Phi'' - \Psi')}{\partial y} dy \right] \\ \quad + \int_{QAP} (z - z_A) d \frac{\Phi' + \Phi'' - \Psi' - \Psi''}{2}, \end{array} \right.$$

formule dont tous les termes ont un sens.

17. Nous avons ainsi établi l'unicité de la solution et la convergence de l'expression (22), moyennant les hypothèses suivantes : 1° aucune des lignes  $AB$ ,  $AC$  n'est tangente à une caractéristique; 2° ces lignes ont, en  $A$ , des tangentes distinctes; 3° la variation totale du coefficient angulaire de la tangente sur chacune d'elles est finie (n° 13, note); 4° la valeur de  $z$  sur chacune d'elles satisfait à l'inégalité (23).

Il y aurait, sans doute, lieu d'examiner ce qui se passerait si l'on renonçait à quelques-unes de ces conditions, qui ne sont probablement pas toutes nécessaires, surtout la première. Je laisserai toutefois cette question de côté et m'occuperai seulement d'établir que la fonction formée comme nous venons de l'indiquer remplit bien les conditions de l'énoncé.

En premier lieu, si le point O est sur AB ou AC, il est aisé de voir que tous les termes de (22) se détruisent, à l'exception d'un seul, égal à la valeur donnée en ce point.

Ceci, il est vrai, ne serait pas suffisant pour affirmer que  $z$  prend cette valeur, ceci impliquant la continuité. Nous établirons cette dernière en calculant les dérivées de  $z$ .

18. Reprenons pour cela, comme nous l'avons fait au n° 8, une fonction  $z$ , solution d'une équation de la forme (1), déterminée par ses valeurs suivant les deux lignes  $PP_1$ ,  $P\beta$ . Supposons que ces valeurs dépendent continûment (ainsi que les dérivées premières  $X'$ ,  $Y'$ ) d'un paramètre  $t$ . Si les quantités  $M$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  du n° 8 sont toujours finies,  $z$  sera une fonction continue de  $t$ . Cela est, en effet, vrai, pour chaque terme de la série (11), laquelle est uniformément convergente.

Cette conclusion reste vraie si [la courbe  $P\beta$  restant fixe (<sup>1</sup>)] l'abscisse de la verticale  $PP_1$  dépend (continûment) de  $t$ .

On déduit aisément de là que, si les données sont dérивables par rapport à  $t$ , il en est de même de  $z$  (pourvu que les  $M$ ,  $M_1$ ,  $M_2$  relatifs à  $\frac{\partial z}{\partial t}$  soient finis). Si l'abscisse de  $PP_1$  est indépendante de  $t$ , cette dérivée sera la solution de (1) qui prend, sur  $PP_1$  et  $P\beta$ , les valeurs  $\frac{\partial z}{\partial t}$ . Si, au contraire, l'abscisse de  $PP_1$  a, par rapport à  $t$ , une dérivée égale à  $\tau$ , la dérivée de  $z$  sera la fonction qui prend, sur  $P\beta$ , les valeurs  $\frac{\partial z}{\partial t}$  et, sur  $PP_1$ , les valeurs

$$(24) \quad \left( \frac{\partial z}{\partial t} \right) - \tau \frac{\partial z}{\partial x},$$

dans laquelle la dérivée  $\left( \frac{\partial z}{\partial t} \right)$  s'obtient en prenant pour variables indépendantes  $t$  et  $z$  ( $x$  étant constamment égal à l'abscisse de  $PP_1$ ).

19. Dans le cas qui nous intéresse actuellement,  $t$  désigne l'une ou l'autre des coordonnées du point O.

---

(<sup>1</sup>) Rien n'empêcherait, bien entendu, d'établir un théorème analogue en faisant varier la courbe. Mais ce théorème ne nous sera pas utile.

La dérivation de la valeur de  $z_0$  introduira évidemment les dérivées de  $z$  par rapport à l'arc  $s$  du contour donné et il est manifestement nécessaire que ces dérivées existent. Nous supposerons de plus que (le point M tendant vers A) elle ne croissent pas plus vite que  $\frac{1}{AM^{1-\rho}}$ ; ce qui entraîne l'inégalité (23).

Dans ces conditions, la série

$$\sum (-1)^{k+1} \left( \varphi_h \frac{\partial z}{\partial t} \right)_{P_h} = \sum (-1)^{k+1} \left( \varphi_h \frac{dz}{ds} \frac{\partial s}{\partial t} \right)_{P_h}$$

sera convergente (et cela uniformément pour toute position du point O non infiniment voisine de A) parce que  $\frac{\partial s}{\partial t}$  tendra vers zéro comme  $\left(\frac{\alpha'}{\alpha}\right)^{\frac{h}{2}}$ , tandis que  $\frac{dz}{ds}$  n'augmentera indéfiniment que comme  $\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^{\frac{h}{2}(1-\rho)}$ .

Les autres termes de  $\frac{\partial}{\partial t}(z_0)$  ne contiennent que les  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}, \frac{\partial \psi_i}{\partial t}$ . Or ces dernières quantités sont finies ainsi que leurs dérivées parallèles.

Sur la ligne  $P_{i-1}P_i$ , en effet,  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$  a l'expression (24), où le second terme peut être nul.  $\frac{\partial z}{\partial x}$  est une dérivée perpendiculaire, qui croît comme  $\left(\frac{\alpha}{\alpha'}\right)^{\frac{i}{2}}$ ; mais  $\tau$  (s'il n'est pas nul) tend vers zéro d'une manière précisément inverse. D'ailleurs, les dérivées de cette expression (24) par rapport à  $y$  (dérivées partielles) sont également finies, grâce à ce fait que  $\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x \partial y}$  s'exprime linéairement en fonction de  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x}, \frac{\partial \varphi_i}{\partial y}, \varphi_i$ .

D'autre part, sur BAC, les relations  $\varphi_i = \varphi_{i-1}$  donnent

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial t} = \frac{\partial \varphi_{i-1}}{\partial t}.$$

Donc on peut faire, sur les  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial t}$ , les mêmes évaluations que sur les  $\varphi_i$  (n° 11-13).

En un mot, les séries obtenues en différentiant la formule (22) convergent uniformément et représentent, par conséquent, les dérivées premières de  $z$  au point O.

20. D'autre part, en ce qui concerne le problème II, ou le problème posé au n° 2 du présent travail, on sait que la fonction  $z$  obtenue [formule (9) du travail actuel, ou *Sur un problème mixte aux dérivées partielles*, formule (4)] vérifie l'équation aux dérivées partielles. Cela résulte de ce que la possibilité des deux problèmes en question est acquise, et cela se voit d'ailleurs sans aucune difficulté en se servant de la remarque du n° 5 bis.

Comme on est ramené à notre problème du n° 2 en limitant AB, AC par le segment  $\beta\gamma$ , il résulte de là : 1° qu'en différentiant la formule (22) par rapport à  $x$  et à  $y$  simultanément, on obtient encore une série uniformément convergente, puisqu'elle est une combinaison linéaire de l'expression (22) et de ses dérivées par rapport à  $x$  et à  $y$ ; 2° que, par conséquent, cette série représente la dérivée, par rapport à  $x$  et à  $y$ , de la fonction  $z$ , laquelle est bien solution de l'équation (1).

21. Je terminerai par une remarque relative aux résultats exposés aux n°s 3-6.

Ces résultats concernent un problème déjà résolu, comme nous l'avons expliqué, au n° 2. Mais il ne faudrait pas en conclure qu'ils ne nous apprennent rien de nouveau.

Si, en effet, les opérations indiquées au n° 2 permettent de calculer la valeur de l'inconnue dans chacune de nos régions successives I, 1, 1', II, 2, 2', ..., ce but n'est atteint que par une série d'applications de la méthode générale, c'est-à-dire *par une série de quadratures superposées*.

Au contraire, si nous avons pu calculer, une fois pour toutes, les fonctions  $u_i, v_i, w_i$ , la formule (9) donnera  $z$  par des quadratures différentes, comme cela est dans la nature de la question, pour les différents arcs que nous avons été conduits à distinguer, mais portant directement sur les données.

Or il est des cas intéressants au point de vue des applications et pour lesquels on connaît la forme des fonctions en question. Tel est, en particulier, le problème dont nous avions parlé au

n° 2, celui de la propagation de l'électricité dans un câble limité dans les deux sens.

L'équation du problème est alors

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - z = 0,$$

et donne pour  $u$  une fonction de Bessel bien connue.

Les lignes  $\beta B, \gamma C$  sont alors deux droites parallèles à  $x - y = 0$ ; l'arc  $\beta\gamma$ , un segment de droite parallèle à  $x + y = 0$ .

Nous avons établi précédemment (<sup>1</sup>) que, dans ces conditions, la fonction  $u$ , s'obtenait en retranchant de  $u(M, O)$  la quantité tout analogue  $u(M, \omega_1)$ , où  $\omega_1$  est l'image du point  $O$  par rapport à  $\beta B$ . De même, on aura

$$v_1 = u(M, O) - u(M, \omega'_1)$$

en désignant par  $\omega'_1$  l'image de  $O$  par rapport à  $\gamma C$ .

Il est aisément de voir que le calcul des fonctions suivantes n'offre pas plus de difficulté. Soient  $\omega_2$  l'image de  $\omega_1$  par rapport à  $\gamma C$ ,  $\omega_3$  l'image de  $\omega_2$  par rapport à  $\beta B$ , ...; soient, de même,  $\omega'_2$  l'image de  $\omega'_1$  par rapport à  $\beta B$ ;  $\omega'_3$ , l'image de  $\omega'_2$  par rapport à  $\gamma C$ , .... Les fonctions

$$\varphi_h = -u(M, \omega_h), \quad \psi_{h'} = -u(M, \omega'_{h'})$$

satisfont à toutes les conditions que nous avons imposées aux quantités désignées par ces notations, dans les raisonnements qui précèdent. En particulier, ces quantités  $\varphi_h, \psi_{h'}$  sont égales à 1 sur les lignes de discontinuité correspondantes. Ce sont elles qu'il faudra substituer dans les formules (6), (9), pour obtenir la solution cherchée.

Soit, par exemple,  $2l$  la longueur du câble. Adoptons les mêmes notations que dans l'article *Sur un problème mixte aux dérivées partielles* (n° 6 et suivants), à ceci près que nous désignerons par  $-l$  et  $+l$  les abscisses des extrémités de ce câble, l'abscisse  $\xi$  d'un de ses points devant ainsi être comprise entre

---

(<sup>1</sup>) *Sur un problème mixte aux dérivées partielles*, n° 8.

—  $l$  et  $+l$ . Si l'on veut calculer la valeur de  $z$  pour l'abscisse  $\xi'$  et à l'instant  $t'$ , on devra prendre les images successives du point  $(\xi', t')$  par rapport aux lignes  $\xi = \pm l$ . Toutes ces images correspondront à la même valeur  $t'$  de  $t$ ; mais leurs abscisses seront

$$\begin{aligned} \text{pour les points } \omega_{2i+1}, \quad \xi &= \xi_{2i+1} = (4i+2)l - \xi'; \\ \text{pour les points } \omega_{2i}, \quad \xi &= \xi_{2i} = -4il + \xi'; \\ \text{pour les points } \omega'_{2i+1}, \quad \xi &= \xi'_{2i+1} = -(4i+2)l - \xi'; \\ \text{pour les points } \omega'_{2i}, \quad \xi &= \xi'_{2i} = 4il + \xi'; \end{aligned}$$

après quoi, on aura [en désignant, comme dans l'article cité, par  $j(X)$  la fonction  $J_0(2\sqrt{-X})$ , où  $J_0$  est la fonction de Bessel, et par  $t, \xi$  les coordonnées courantes]

$$\varphi_h = -j \left\{ \frac{1}{4} [(t-t')^2 - (\xi - \xi_h)^2] \right\}, \quad \psi_{h'} = -j \left\{ \frac{1}{4} [(t-t')^2 - (\xi - \xi'_{h'})^2] \right\}.$$

Les lignes  $\beta B, \gamma C$  seront  $\xi = \pm l$  et l'on aura, sur elles,

$$\frac{dU}{dv} ds = -\frac{\partial U}{\partial \xi} dt.$$

La ligne  $\beta\gamma$  sera  $t = 0$ ; on aura, sur elle,

$$\frac{d}{ds} ds = -\frac{\partial}{\partial t} d\xi.$$

Enfin, les points  $P_h$  correspondront à

$$\xi = (-1)^h l, \quad t = t' + \xi' - (2h+1)l,$$

les points  $Q_{h'}$ , à

$$\xi = -(-1)^{h'} l, \quad t = t' - \xi' - (2h'+1)l,$$

les entiers  $h, h'$  devant prendre toutes les valeurs positives qui donnent  $t \geq 0$ .  $a$  et  $b$  étant nuls, on a ainsi tous les éléments nécessaires pour calculer les formules (5), (6), (9).