BULLETIN DE LA S. M. F.

HENRI LEBESGUE

Une propriété caractéristique des fonctions de classe 1

Bulletin de la S. M. F., tome 32 (1904), p. 229-242

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__229_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

UNE PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES FONCTIONS DE CLASSE 1;

Par M. Henri Lebesgue.

On sait que l'on appelle *fonction de classe* 1 toute fonction discontinue qui est la limite d'une suite convergente de fonctions de classe 0, c'est-à-dire de fonctions continues. M. Baire ([1]) a fait connaître une propriété caractéristique de ces fonctions, nous la retrouverons plus loin comme conséquence de celle qui va nous occuper.

J'ai déjà énoncé cette propriété dans une Note récemment parue ([2]) en me limitant aux fonctions d'une seule variable; la méthode que j'emploie ici s'applique dans tous les cas, mais, pour simplifier le langage, je raisonnerai toujours comme s'il n'y avait que deux variables x et y.

I. — *Pour qu'une fonction f soit de classe* 0 *ou* 1, *il faut et il suffit que, quel que soit* $\varepsilon > 0$, *le domaine où f est définie puisse être considéré comme la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés sur chacun desquels f est continue à moins de* ε *près;* ou encore *sur chacun desquels f est d'oscillation inférieure à* ε.

Je précise d'abord le sens qu'il faut donner à ces deux énoncés et je démontre leur équivalence.

Par la somme d'ensembles composants j'entends l'ensemble des points appartenant à l'un au moins des ensembles composants, que ces ensembles aient ou non des points communs.

([1]) Thèse *Sur les fonctions de variables réelles* (*Annali di Matematica*, 1899, et ce *Bulletin*, t. XXVIII).

([2]) *Démonstration d'un théorème de M. Baire*, Note II des *Leçons sur les fonctions de variables réelles et leur représentation par des séries de polynomes*, de M. Émile Borel; Paris, Gauthier-Villars, 1904.

Les questions dont je m'occupe ici sont traitées d'une manière différente et comme cas particuliers dans un Mémoire *Sur les fonctions représentables analytiquement*, qui paraîtra prochainement dans le *Journal de Mathématiques* de M. Jordan.

f sera dite *continue,* à moins de ε près, sur l'ensemble fermé E, s'il existe une fonction continue φ partout définie et telle que $|f - \varphi|$ soit toujours inférieure à ε pour les points de E. Divisons le plan en carrés assez petits pour que, dans chacun d'eux, l'oscillation de φ soit au plus égale à η; il y a une infinité dénombrable de ces carrés. Soient C un des carrés et e l'ensemble des points de E intérieurs à C ou situés sur la frontière de C, e est un ensemble fermé et, sur e, l'oscillation de f est inférieure à $\varepsilon + \eta$; d'ailleurs E est la somme de l'infinité dénombrable des e. Si donc le domaine où f est définie est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles tels que E, il est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles e et, si ε est quelconque, $\varepsilon + \eta$ est aussi petit que l'on veut; cela montre l'identité des deux énoncés indiqués. Je vais démontrer le second.

Soit f la limite de la suite convergente de fonctions continues $f_1, f_2, \ldots$. Divisons l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ en une infinité dénombrable d'intervalles à l'aide des points de divisions

$$\ldots, \quad m_{-2}, \quad m_{-1}, \quad m_0, \quad m_1, \quad m_2, \quad \ldots,$$

distants deux à deux de moins de $\frac{\varepsilon}{2}$. Le domaine où f est définie est la somme de l'infinité dénombrable des ensembles

$$E(m_i < f < m_{i+2}),$$

formés des points en lesquels est vérifiée l'inégalité écrite entre parenthèses. Dans chacun des ensembles $E(m_i < f < m_{i+2})$ l'oscillation de f est inférieure à ε, il suffira donc de montrer qu'un tel ensemble est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés pour avoir prouvé que la condition énoncée est nécessaire.

Or $E(m_i < f < m_{i+2})$ est la somme des ensembles $E_{n,p}$ (n et p entiers) pour lesquels on a, quel que soit $q \geqq p$,

$$m_i + \frac{1}{n} \leqq f_q \leqq m_{i+2} - \frac{1}{n}.$$

Par définition même $E_{n,p}$ est l'ensemble des points communs à la fois à tous les ensembles $E\left(m_i + \frac{1}{n} \leqq f_q \leqq m_{i+2} - \frac{1}{n}\right)$, pour lesquels on a $q \geqq p$; tous ces ensembles étant fermés, $E_{n,p}$ est fermé.

Pour démontrer que la condition est suffisante, supposons qu'elle soit remplie par la fonction f. Alors le domaine où f est définie est la somme des ensembles fermés

$$(S_1) \qquad E_1^1,\ E_2^1,\ E_3^1,\ \ldots,$$

sur chacun desquels l'oscillation de f est inférieure à 1. Ce domaine est aussi la somme des ensembles fermés

$$\mathcal{E}_1,\ \mathcal{E}_2,\ \ldots,$$

sur chacun desquels l'oscillation de f est inférieure à $\frac{1}{2}$.

Remplaçons $\mathcal{E}_p$ par les ensembles $\mathcal{E}_{p,q}$ formés des points communs à $\mathcal{E}_p$ et E_q^1, ensembles qui ont $\mathcal{E}_p$ pour somme.

En opérant ainsi sur chaque $\mathcal{E}_p$ et en rangeant les ensembles $\mathcal{E}_{p,q}$ dans un ordre quelconque nous remplacerons la suite des $\mathcal{E}_p$ par la suite des ensembles fermés

$$(S_2) \qquad E_1^2,\ E_2^2,\ E_3^2,\ \ldots.$$

En opérant d'une manière analogue, on fait correspondre à chaque entier m une suite d'ensembles fermés

$$(S_m) \qquad E_1^m,\ E_2^m,\ E_3^m,\ \ldots,$$

dont la somme est le domaine considéré, sur chacun desquels f est continue à $\frac{1}{m}$ près et qui sont tous contenus dans l'un au moins des ensembles de la suite correspondant à $m-1$. A chaque ensemble E_q^p est attaché une constante K_q^p qui diffère de f de moins de $\frac{1}{2p}$ sur E_q^p.

Pour former le $m^{\text{ième}}$ terme f_m d'une suite de fonctions continues tendant vers f, je divise le plan des xy en carrés de côté $\frac{1}{m}$ par des parallèles aux axes de coordonnées. Soit A le sommet d'un de ces carrés; les quatre carrés ayant A pour sommet forment un carré α. Soit $E_{i_1}^1$ le premier des ensembles de (S_1) ayant des points contenus dans α, c'est-à-dire intérieurs à la frontière de α ou sur cette frontière. Soit $E_{i_2}^2$ le premier des ensembles de (S_2) qui est contenu dans $E_{i_1}^1$ et dont certains points sont contenus dans α; soit $E_{i_3}^3$ le premier des ensembles de (S_3) qui est contenu dans $E_{i_2}^2$ et dont certains points sont dans α. En continuant on arrive à la définition d'un ensemble $E^m_{i_m}$; en A je prends $f_m = K^m_{i_m}$.

f_m sera maintenant complètement déterminée par la condition d'être linéaire en x et en y (c'est-à dire d'être représentable par une expression de la forme $Axy + Bx + Cy + D$, où A, B, C, D sont des constantes) dans chacun des carrés de côté $\frac{1}{m}$ considérés.

Il reste à vérifier que f_m tend vers f.

Soient M un point, $E^1_{\alpha_1}$ le premier ensemble de (S_1) contenant M, $E^2_{\alpha_2}$ le premier ensemble de (S_2) contenu dans $E^1_{\alpha_1}$ et contenant M, $E^3_{\alpha_3}$ sera le premier des ensembles de (S_3) contenu dans $E^2_{\alpha_2}$ et contenant M, et ainsi de suite. Soit q un entier assez grand pour que M soit distant de plus de $\frac{2\sqrt{2}}{q}$ des points de l'ensemble fermé $\mathcal{E}$ somme des ensembles $E^1_1, E^1_2, \ldots, E^1_{\alpha_1-1}$, des ensembles E^2_k contenus dans $E^1_{\alpha_1}$ et d'indice inférieur plus petit que α_2, des ensembles E^3_k contenus dans $E^2_{\alpha_2}$ et d'indice inférieur plus petit que α_3, etc., des ensembles E^m_k contenus dans $E^{m-1}_{\alpha_{m-1}}$ et d'indice inférieur plus petit que α_m. Étudions maintenant $f_p(M)$ pour $p \geqq q$ et $p > m$.

La définition de $f_p(M)$ dépend, comme on l'a vu, de la considération de certains carrés de côté $\frac{1}{p}$, savoir les carrés de la $p^{\text{ième}}$ division du plan en carrés qui ont au moins un sommet en commun avec un carré de cette division contenant M. Tous ces carrés sont intérieurs au cercle de centre M et de rayon $\frac{2\sqrt{2}}{p}$, donc extérieurs à $\mathcal{E}$, par suite aux sommets du ou des carrés contenant M. f_p est égale à la constante K^p_r relative à un ensemble E^p_r contenu dans $E^m_{\alpha_m}$.

Soit P un point de E^p_r, on a

$$|K^p_r - K^m_{\alpha_m}| \leqq |K^p_r - f(P)| + |K^m_{\alpha_m} - f(P)| < \frac{1}{2p} + \frac{1}{2m} < \frac{1}{m}.$$

Donc aux sommets du ou des carrés contenant M, f_p diffère de $K^m_{\alpha_m}$ de $\frac{1}{m}$ au plus et, par suite, il en est de même en M. De là nous tirons

$$|f(M) - f_p(M)| \leqq |f(M) - K^m_{\alpha_m}| + |f_p(M) - K^m_{\alpha_m}| < \frac{2}{m};$$

et, puisque m est quelconque, il est bien démontré que la suite des f_p converge vers f.

Le théorème précédent permet dans bien des cas, on le conçoit, de reconnaître qu'une fonction donnée est de classe 1 : je donnerai seulement trois exemples de son emploi.

Soit f une fonction n'ayant qu'une infinité dénombrable de points de discontinuité. Soit E l'ensemble fermé dénombrable des points en lesquels l'oscillation de f est au moins égale à ε. E est la somme de l'infinité dénombrable de ses points, sur chacun desquels f est d'oscillation nulle. Soit maintenant un point du complémentaire de E; il est intérieur à un carré dans lequel l'oscillation de f est inférieure à ε et le complémentaire de E est la somme d'une infinité dénombrable de tels carrés. Donc les conditions du théorème I sont remplies; f est de classe 1.

Soit f une fonction semi-continue supérieurement. M. Baire désigne ainsi une fonction f telle que, quel que soit P, $f(P)$ soit au moins égal à la plus grande des limites de $f(M)$, quand M tend vers P. De là résulte immédiatement que l'ensemble $E(\alpha \leqq f)$ des points où f est au moins égale à α est fermé ; car si P est un point limite de cet ensemble la plus grande des limites de $f(M)$, quand M tend vers P, est au moins α, donc $f(P)$ est au moins égal à α.

Ceci posé, je divise l'intervalle $(-\infty, +\infty)$ en une infinité dénombrable d'intervalles partiels de longueur au plus égale à ε. Soit (a, b) l'un d'eux; le domaine où f est définie est la somme de l'infinité dénombrable des ensembles tels que $E(a \leqq f < b)$, formé des points en lesquels est vérifiée l'inégalité entre parenthèses. Sur chacun de ces ensembles, l'oscillation de f est au plus égale à ε, or $E(a \leqq f < b)$ s'obtient en retranchant de l'ensemble fermé $E(a \leqq f)$ les points de l'ensemble fermé $E(b \leqq f)$.

$E(a \leqq f < b)$ est, par suite, la somme de l'infinité dénombrable des ensembles fermés tels que E_n, formé des points de $E(a \leqq f)$, distants de $\frac{1}{n}$ au moins des points de $E(b \leqq f)$. D'après le théorème I, f est de la classe 0 ou 1 ([1]).

Pour appliquer le théorème I au cas précédent il a fallu démon-

---

([1]) Au sujet de ces fonctions et de leur représentation, *voir* BAIRE, *Thèse*, p. 5 à 12 et p. 64, et ce *Bulletin*, t. XXVIII et XXXII.

trer que certains ensembles étaient sommes d'infinités dénombrables d'ensembles fermés; c'est toujours à cette question que l'on peut ramener l'application du théorème I. D'après la démonstration de la première partie de ce théorème, en effet, si f est de la classe 1, $E(a < f < b)$ est, quels que soient a et b, somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés; réciproquement, si cela a lieu, les ensembles $E(m_i < f < m_{i+2})$ de la démonstration étant sommes d'infinités dénombrables d'ensembles fermés, le domaine où f est définie est, quel que soit $\varepsilon > 0$, la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés sur chacun desquels f est d'oscillation inférieure à ε, c'est-à-dire que f est de classe 0 ou 1.

J'applique la méthode qui résulte de là pour démontrer qu'une fonction $f(x, y)$ continue en x et en y est de classe 0 ou 1 (¹).

Je considère l'ensemble $E(a < f < b)$ comme la somme des ensembles $E\left(a + \frac{1}{p} < f < b - \frac{1}{p}\right)$ correspondant aux valeurs entières de p. L'ensemble $E\left(a + \frac{1}{p} < f < b - \frac{1}{p}\right)$ est tel que, si M est un de ses points, il existe un segment (α, β) contenant M, à son intérieur, parallèle à l'axe des x et dont tous les points, extrémités non comprises, font partie de l'ensemble. Considérons l'ensemble $E_{n,p}$ des points M de $E\left(a + \frac{1}{p} < f < b - \frac{1}{p}\right)$ qui sont compris dans un segment (α, β) tel que (α, M) et (β, M) soient tous deux de longueur supérieure à $\frac{1}{n}$ (n entier). Soient A un point limite de $E_{n,p}$ et $M_1, M_2, \ldots$ des points de $E_{n,p}$ tendant vers A. S'ils sont tous, à partir d'un certain indice, sur la parallèle à l'axe des x passant par A, f étant continue en x, A fait évidemment partie de

$$E\left(a + \frac{1}{p} \leqq f \leqq b - \frac{1}{p}\right).$$

Sinon les intervalles (α_1, β_1), (α_2, β_2) ... correspondant aux points $M_1, M_2, \ldots$ rencontrent tous, à partir d'un certain rang i, la parallèle à l'axe des y menée par A en des points $\gamma_i, \gamma_{i+1}, \ldots$

(¹) J'ai déjà démontré cette proposition d'une autre manière dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* de 1898.

qui tendent vers A. Ces points γ font partie de

$$E\left(a+\frac{1}{p}<f<b-\frac{1}{p}\right),$$

donc, puisque f est continue en y, A fait partie de

$$E\left(a+\frac{1}{p}\leqq f\leqq b-\frac{1}{p}\right).$$

Ainsi, dans tous les cas, l'ensemble fermé $(E_{n,p}+E'_{n,p})$, $E'_{n,p}$ désignant le dérivé de $E_{n,p}$, fait partie de $E(a<f<b)$; ce dernier ensemble est la somme de l'infinité dénombrable des ensembles tels que $(E_{n,p}+E'_{n,p})$, le théorème est démontré.

Il n'y a pas dans ce qui précède de procédé général et régulier pour reconnaître si une fonction est ou non de classe 1; un tel procédé est d'ailleurs impossible à donner si l'on ne suppose, sur les fonctions que l'on considère, rien d'autre que ceci : elles sont données. Cependant, comme on l'a vu par les exemples, à condition d'employer des raisonnements différents suivant les cas, le théorème I peut être utile parce qu'il montre l'identité de deux problèmes; la solution de l'un de ces problèmes s'aperçoit parfois plus aisément que celle de l'autre. C'est un intérêt du même genre que présente la proposition suivante :

II. *Pour qu'un ensemble donné* E *puisse être considéré comme l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction, il faut et il suffit qu'il soit la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés.*

La condition est nécessaire. L'ensemble des points de discontinuité de f est en effet la somme des ensembles fermés E_n, E_n étant formé des points en lesquels l'oscillation de f est au moins égale à $\frac{1}{n}$.

La condition est suffisante. Soit E somme des ensembles fermés $E_1, E_2, \ldots$. Par f je désigne une fonction nulle aux points ne faisant pas partie de E et qui, aux points de E, est définie comme il suit. Soit M un point de E_i ne faisant pas partie de

$$E_1+E_2+\ldots+E_{i-1},$$

si M est intérieur à tout un domaine faisant partie de E_i on prendra en M f égale à $\frac{1}{i}$ ou o suivant que toutes les coordonnées de M seront rationnelles ou non; si M n'est pas intérieur à un tel domaine on prendra $f = \frac{1}{i}$. On vérifie facilement que f est continue pour tous les points ne faisant pas partie de E, et discontinue pour tous les points de E, l'oscillation de f en un point de E_i, n'appartenant pas à $E_1 + E_2 + \ldots + E_{i-1}$, étant égale à $\frac{1}{i}$.

Cette proposition va nous permettre d'utiliser un résultat de M. Volterra.

On sait que f est dite ponctuellement discontinue dans le domaine Δ si, dans tout domaine D intérieur à Δ, il y a des points de continuité de f. Si cela est, dans tout domaine D on en peut trouver un autre D' dans lequel f est d'oscillation inférieure à ε choisi arbitrairement positif; cela est évident puisqu'il suffit de prendre D' assez petit et entourant un point de continuité. La réciproque est vraie, en effet, si, dans D, on peut trouver D_1 où l'oscillation de f est inférieure à 1, si, dans D_1, on peut trouver D_2 où l'oscillation de f est inférieure à $\frac{1}{2}$, si, dans D_2, on peut trouver D_3 où l'oscillation de f est inférieure à $\frac{1}{3}$, etc.; à l'intérieur de tous ces domaines on peut trouver un point M qui est intérieur à D, en M f est continue.

Supposons maintenant que nous ayons une infinité dénombrable $f_1, f_2, \ldots$ de fonctions ponctuellement discontinues dans Δ; alors on peut reprendre le raisonnement précédent en assujettissant D_p à être intérieur à D_{p-1} et de plus tel que, dans D_p, les oscillations de $f_1, f_2, \ldots, f_p$ soient respectivement inférieures à $\frac{1}{p}, \frac{1}{p-1}, \ldots, 1$. Alors, au point M, intérieur à tous les D_p, toutes les fonctions f_p sont continues. C'est la proposition de M. Volterra [1].

Concluons de là, avec M. Volterra, que si E et E_1 sont deux ensembles partout denses dans Δ, c'est-à-dire admettant l'un et l'autre Δ pour ensemble dérivé, et n'ayant aucun point commun, ils ne peuvent être l'un et l'autre ensemble de points de disconti-

[1] En réalité M. Volterra (*Giornale de Battaglini*, 1881) ne s'occupait que d'un nombre fini de fonctions; c'est M. Baire, en utilisant la notion d'ensemble de première catégorie, qui s'est occupé du cas général.

nuités pour deux fonctions f et f_1 ; car ces deux fonctions seraient ponctuellement discontinues dans Δ et n'y auraient cependant pas de point de continuité en commun. Par suite, si l'un de ces deux ensembles peut être obtenu comme ensemble $E(a < \varphi < b)$ pour une fonction φ de classe 1, il n'en est certainement pas de même pour l'autre.

Considérons par exemple une fonction f et supposons qu'elle soit supérieure à o pour les valeurs irrationnelles de la variable x et pour celles-là seulement. Alors l'ensemble $E(0 < f < +\infty)$ est partout dense ainsi que son complémentaire; celui-ci est d'ailleurs la somme de l'infinité dénombrable des ensembles fermés définis chacun par une égalité de la forme $x =$ constante rationnelle, par suite $E(0 < f < +\infty)$ n'est pas la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés. f n'est donc ni de classe 0 ni de classe 1.

La proposition de M. Volterra nous permet donc d'utiliser le théorème I pour démontrer que certaines fonctions ne sont pas de classe 1. Cette proposition est généralisable de plusieurs manières; en utilisant ces généralisations, on reconnaîtra qu'il y a un rapport étroit entre le théorème de M. Volterra et la condition nécessaire pour qu'une fonction soit de classe 1 qu'a fait connaître M. Baire.

Soit f une fonction de classe 1. Reprenons les nombres m_i qui ont servi pour la démonstration de la première partie de I. Le domaine Δ où f est définie est la somme de l'infinité dénombrable des ensembles $E(m_i < f < m_{i+2})$; d'ailleurs, on peut définir les fonctions φ_i de manière que l'ensemble des points de discontinuité de φ_i soit $E(m_i < f < m_{i+2})$. Toutes ces fonctions ne peuvent être ponctuellement discontinues dans D, intérieur à Δ, sans quoi elles auraient un point de continuité en commun, point qui n'appartiendrait à aucun des $E(m_i < f < m_{i+2})$. Cela revient à dire qu'il existe un certain domaine D′, intérieur à D, et faisant tout entier partie de l'un des $E(m_i < f < m_{i+2})$; en d'autres termes, dans D′, f est d'oscillation inférieure à ε. Puisque ε est quelconque, on conclut de là que f est ponctuellement discontinue dans Δ.

Pour aller plus loin, remarquons :

1° Que la partie commune à un ensemble parfait $\mathcal{C}$ et à un ensemble E, somme d'ensembles fermés $E_1, E_2, \ldots$, est la somme des ensembles fermés parties communes à $\mathcal{E}$ d'une part et à $E_1, E_2, \ldots$ d'autre part;

2° Que le raisonnement du théorème II légèrement modifié prouve que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble E, formé de points d'un ensemble parfait $\mathcal{E}$, soit l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction f définie seulement sur $\mathcal{E}$ est qu'il soit la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés;

3° Que le théorème de M. Volterra peut être démontré pour les fonctions définies sur un ensemble parfait $\mathcal{E}$ et ponctuellement discontinues sur $\mathcal{E}$, c'est-à-dire ayant des points de continuité dans tout domaine contenant, à son intérieur, des points de $\mathcal{E}$.

Dès lors, on peut, dans le raisonnement précédent, remplacer le domaine Δ par un ensemble parfait $\mathcal{E}$ contenu dans Δ et les ensembles $E(m_i < f < m_{i+2})$ par leurs parties communes avec $\mathcal{E}$. On voit ainsi qu'*une fonction de classe* 1 *est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait.* C'est la condition nécessaire donnée par M. Baire.

La méthode, très détournée, qui nous y a conduits montre que, théoriquement du moins, la remarque de M. Volterra, jointe au théorème I, permet, tout aussi bien que l'énoncé de M. Baire, de reconnaître qu'une fonction donnée est de classe 1. Mais cet énoncé est pratiquement plus simple à employer dans la plupart des cas à cause de l'habitude que nous avons d'étudier la continuité ou la discontinuité d'une fonction en un point.

On sait que la condition nécessaire de M. Baire est aussi suffisante en sorte que :

III. *Pour qu'une fonction soit de classe* 0 *ou* 1, *il faut et il suffit qu'elle soit ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait.*

C'est ce que je vais démontrer.

Il a été démontré que la condition est nécessaire, je vais démontrer qu'elle est suffisante, c'est-à-dire que, si f n'est pas de classe 0 ou 1, il existe un ensemble parfait sur lequel f est totalement discontinue.

Puisque f n'est pas de classe 1, on peut trouver une valeur positive ε telle que le domaine Δ où f est définie ne soit pas la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés sur chacun desquels f est d'oscillation inférieure à ε.

On peut alors distinguer entre les points de Δ. Les uns, les points a, ne peuvent être intérieurs à un domaine D, si petit qu'il soit, sans que D jouisse de la même propriété que Δ; les autres, les points b, sont intérieurs à des domaines δ assez petits pour être sommes d'infinités dénombrables d'ensembles fermés sur lesquels f est d'oscillation inférieure à ε.

Si M est un point b, tous les points du δ correspondant sont aussi des points b; par suite, l'ensemble A des points a, s'il en existe, est fermé. Montrons que A existe.

Si Δ ne contenait aucun point a, tous ces points étant b seraient intérieurs à des δ; d'après un théorème de M. Borel, on doit conclure de là que Δ serait la somme d'un nombre fini de δ et, par suite, la somme de l'ensemble dénombrable des ensembles fermés, en lesquels se décomposaient ces δ, et pour chacun desquels f est d'oscillation inférieure à ε; cela est contraire à l'hypothèse.

Montrons même qu'il y a plus d'un point a. S'il n'y avait qu'un tel point, le point M, on déduirait du théorème de M. Borel que Δ, moins M, serait la somme d'une infinité dénombrable de δ, donc aussi comme précédemment d'ensembles fermés où f est d'oscillation inférieure à ε. Mais M est lui-même un ensemble fermé d'oscillation inférieure à ε pour f, donc M ne serait pas un point a, mais un point b et l'on pourrait prendre Δ pour δ correspondant.

Concluons de là que l'ensemble A, qui existe certainement, ne contient aucun point isolé, car, si M était un tel point, à condition de prendre autour de M un domaine D assez petit, M serait le seul point a de D.

Donc, *l'ensemble* A *est parfait.*

Je dis que, sur A, l'oscillation de f est, en tout point, au moins égale à ε. Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi pour le point M de A. En prenant le domaine D, contenant M, assez petit, f sera d'oscillation inférieure à ε sur l'ensemble parfait α, partie commune à D et A.

L'ensemble des points de D ne faisant pas partie de α est la somme d'une infinité dénombrable de domaines, par exemple des carrés dont les sommets ont des coordonnées rationnelles et qui ne contiennent pas de points de α. Chacun de ces carrés est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés sur lesquels f est d'oscillation inférieure à ε, donc il en est de même de leur somme. Et, si l'on ajoute α à ces ensembles, on voit que D est aussi la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés d'oscillation inférieure à ε pour f. Ceci est impossible puisque D contient des points a, par suite *f est discontinue sur* A *en tout point de l'ensemble parfait* A.

La démonstration qui précède (1) montre que le théorème I peut être utilement employé pour l'étude des fonctions de classe 1. Voici deux théorèmes auxquels il conduit facilement :

IV. *Une série uniformément convergente de fonctions de classe* 0 *ou* 1 *a pour somme une fonction de classe* 0 *ou* 1.

En effet, supposons que la somme f_n des n premiers termes diffère de sa limite f de moins de ε; le domaine où f est définie est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés sur chacun desquels f_n est d'oscillation inférieure à ε, puisque f_n est de classe 0 ou 1. Or, sur un tel ensemble fermé, f est d'oscillation $3\,\varepsilon$ au plus; donc f est de classe 0 ou 1 (2).

Ce théorème, qu'il est aisé de prouver directement, aurait pu nous servir à simplifier la démonstration de I.

V. *Pour qu'une fonction soit de classe* 1 *dans un domaine, il faut et il suffit qu'elle soit de classe* 0 *ou* 1 *sur toutes les courbes du domaine et effectivement de classe* 1 *sur l'une des courbes.*

On sait que, dans le cas de deux variables x, y, par exemple, une courbe est définie par les équations

$$(C) \qquad x = f(t), \qquad y = g(t),$$

où f et g sont définies et continues dans un intervalle fini. Une

(1) Cette démonstration ne diffère que par la forme de celle que j'ai donnée dans la Note du Livre de M. Borel; comme elle, elle n'utilise pas la notion de nombre transfini. Dans la Note du Livre de M. Borel, la preuve que la condition énoncée est nécessaire est exposée d'une manière beaucoup plus directe et rapide.

(2) On voit que le raisonnement suppose seulement *la convergence uniforme simple* de la série considérée.

courbe peut remplir un domaine et il existe une infinité de courbes remplissant chacune tout le domaine donné Δ quel qu'il soit.

Si $\Phi(x, y)$ est une fonction donnée, par convention, je dis qu'elle est de classe 1 ou 0 sur la courbe définie plus haut si la fonction composée de t $\Phi[f(t), g(t)] = \varphi(t)$ est de classe 0 ou 1.

Je suppose que la courbe C soit contenue dans le domaine Δ où Φ est définie. Alors, à tout point a de δ correspond, par les formules de définition de C, un point A de Δ, à un point A de C correspond un point au moins a de δ. A un ensemble e de points de δ, nous faisons ainsi correspondre un ensemble E de points de Δ et à un ensemble E de points de C nous faisons correspondre l'ensemble e_1 de *tous* les points de δ correspondant à ceux de E. Je dis que, si e (ou E) sont fermés, E (ou e_1) le sont aussi.

Supposons e fermé et soit $\mathfrak{M}$ un point limite de E. Soient M_1, M_2, ... des points de E tendant vers $\mathfrak{M}$ et soit m_i l'un des points correspondant à M_i. Les m_i ont au moins un point limite m dont le correspondant M est, puisque f et g sont continues, le point limite de M_1, M_2, ... Les points M et $\mathfrak{M}$ coïncident donc, et, puisque m fait partie de e, $\mathfrak{M}$ fait partie de E.

Supposons E fermé et soit m un point limite des points m_1, m_2, ... de e_1. A ces points correspondent M et M_1, M_2, ...; d'ailleurs, M est évidemment point limite de M_1, M_2, ..., donc fait partie de E, m fait partie de e.

Si $\Phi(x, y)$ est de classe 0, il en est de même de $\varphi(t)$. Car si $\varphi(m)$ n'était pas la limite de $\varphi(m_i)$, m_i tendant vers m, $\Phi(M) = \varphi(m)$ ne serait pas la limite de $\Phi(M_i) = \varphi(m_i)$, bien que M_i tende vers M; cela est impossible. Supposons maintenant que Φ soit telle que φ soit continne sur toute courbe C et choisissons pour C une courbe remplissant tout le domaine. Si Φ n'était pas continue, on pourrait trouver une suite de points M_i tendant vers un point limite M et de manière que $\Phi(M_i)$ ait une limite déterminée différente de $\Phi(M)$. Soient E l'ensemble fermé formé des M_i et de M, e_1 l'ensemble correspondant, m un de ses points limites; m correspond à M. e_1 étant fermé et φ continue, φ est continue sur e_1 en m; or cela est impossible puisque $\varphi(m) = \Phi(M)$ et que $\varphi(m_i) = \Phi(M_i)$ a une limite déterminée différente de $\varphi(m)$. Il y a là une contradiction qui montre que, pour qu'une fonction soit continue dans un domaine, il faut et il suffit qu'elle soit continue sur toute courbe de ce domaine.

Si $\Phi(x, y)$ est de classe 1, Δ est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés E, sur chacun desquels Φ est d'oscillation inférieure à ε. A E correspondant l'ensemble fermé e_1, φ a sur e_1 même oscillation que Φ sur E et δ est la somme des e_1; donc φ est de classe 0 ou 1.

Si, quelle que soit C, φ est de classe 0 ou 1, prenons pour C une courbe remplissant Δ et supposons que, sur C, φ soit de classe 1 (le cas où φ serait de classe 0 a été étudié). Alors δ est la somme d'ensembles fermés e en nombre fini ou dénombrable et sur chacun desquels φ est d'oscillation inférieure à ε, Δ est alors la somme des ensembles fermés E correspondant aux e, donc Φ est de classe 0 ou 1 et l'on sait déjà que Φ ne peut être de classe 0.

Cela démontre le théorème V; c'est ce théorème qui m'a permis, dans une Note des *Comptes rendus* de mars 1899, d'étendre au cas général le théorème III démontré tout d'abord par M. Baire pour les fonctions d'une variable seulement.