BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GENTY

Note de géométrie vectorielle sur les systèmes orthogonaux

Bulletin de la S. M. F., tome 32 (1904), p. 211-228
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__211_1>

NOTE DE GÉOMÉTRIE VECTORIELLE SUR LES SYSTÈMES ORTHOGONAUX;

Par M. E. Genty.

1. L'objet principal de cette Note est de montrer avec quelle simplicité les procédés de la géométrie vectorielle conduisent à l'équation différentielle du troisième ordre dont dépend la recherche des *familles de Lamé,* c'est-à-dire des familles de surfaces qui peuvent faire partie d'un système triple orthogonal. Mais, avant d'aborder cette question, nous allons donner quelques indications sur certaines notations différentielles dont nous aurons à faire usage et sur les formules principales qui s'y rapportent.

Nous emploierons, dans ce qui va suivre, les notations de M. Gibbs, savoir : α, β, γ... étant des vecteurs, $\alpha.\beta$ désignera $S\alpha\beta$, c'est-à-dire le *produit projectif* des vecteurs α et β, et $\alpha \times \beta$ désignera $V\alpha\beta$, c'est-à-dire le *moment orienté* de ces deux vecteurs. On aura ainsi $\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\alpha \times \beta}$... désignant les longueurs ou modules des vecteurs α, β, $\alpha \times \beta$...,

$$\alpha.\beta = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}\cos(\alpha,\beta);$$
$$\overline{\alpha \times \beta} = \overline{\alpha}\,\overline{\beta}\sin(\alpha,\beta).$$

Enfin la notation $\alpha\beta\gamma$ désignera l'un ou l'autre des trois scalaires égaux

$$\alpha.(\beta \times \gamma), \qquad \beta.(\gamma \times \alpha), \qquad \gamma.(\alpha \times \beta).$$

2. Soit u une fonction scalaire de ρ et $\upsilon.d\rho$ la différentielle de cette fraction. Pour rappeler l'origine du vecteur υ, nous poserons

$$\upsilon = \nabla u,$$

et, par suite,

$$du = d\rho.\nabla u.$$

Si l'on remplace dans cette équation $d\rho$ par $dl\lambda$, λ étant un orienteur quelconque, constant ou fonction de ρ, on aura

$$\frac{du}{dl} = \lambda.\nabla u;$$

c'est ce que nous appellerons *dérivée de la fonction u* prise suivant la direction λ.

3. Soit de même σ un vecteur fonction de ρ ; on aura

$$d\sigma = \varphi\, d\rho,$$

$\varphi d\rho$ étant une fonction vectorielle linéaire de la différentielle $d\rho$ qui, en général, n'est pas conjuguée à elle-même, et

$$\frac{d\sigma}{dl} = \varphi\lambda$$

sera la dérivée de σ prise suivant la direction λ.

Si de plus α, β et γ sont trois orienteurs rectangulaires quelconques, nous poserons

$$\Delta\sigma = \alpha \times \varphi\alpha + \beta \times \varphi\beta + \gamma \times \varphi\gamma = \Sigma(\alpha \times \varphi\alpha);$$
$$D\sigma = \alpha.\varphi\alpha \quad + \delta.\varphi\beta \quad + \gamma.\varphi\gamma \quad = \Sigma(\alpha.\varphi\alpha).$$

On sait d'ailleurs que, si ω est un vecteur quelconque, on a

$$\varphi\omega - \varphi'\omega = \Delta\sigma \times \omega,$$

φ' désignant, comme d'usage, la conjuguée de la fonction φ, et que l'expression $D\sigma$ est égale au coefficient M_2 de l'équation symbolique

$$\varphi^3 - M_2\varphi^2 + M_1\varphi - M = 0,$$

à laquelle satisfait la fonction φ.

Dans le cas où φ est une fonction conjuguée à elle-même, on a

$$\Delta\sigma = 0.$$

C'est ce qui a lieu lorsque, σ étant le ∇ d'une fonction scalaire u, l'expression $\sigma.d\rho$ est une différentielle exacte.

Dans le cas plus général où cette expression n'est pas une différentielle exacte, mais peut le devenir lorsqu'on la multiplie par un certain facteur, on a, ainsi que l'a démontré Hamilton,

$$\sigma.\Delta\sigma = 0; \tag{1}$$

c'est la condition d'intégrabilité de l'équation

$$\sigma.d\rho = 0.$$

4. Soit maintenant

$$d\varphi\lambda = \Phi(\lambda, d\rho), \tag{2}$$

λ étant un vecteur qu'on suppose constant dans la dérivation. $\Phi(\lambda, d\rho)$ sera une fonction vectorielle linéaire tout à la fois par rapport à λ et par rapport à $d\rho$. Nous allons montrer que, dans cette fonction, λ et $d\rho$ sont interchangeables, c'est-à-dire qu'on a

$$\Phi(\lambda, d\rho) = \Phi(d\rho, \lambda).$$

Soient, en effet, d et δ deux symboles de différentiation complètement indépendants.

Si dans l'équation (2) nous remplaçons λ par $\delta\rho$, il vient

$$d\varphi\,\delta\rho = \Phi(\delta\rho, d\rho).$$

Mais

$$d\varphi\,\delta\rho = d\delta\rho = \delta\,d\sigma = \delta\varphi\,d\rho;$$

donc

$$\delta\varphi\,d\rho = \Phi(\delta\rho, d\rho).$$

ou, en remplaçant $d\rho$ par λ,

(3) $$\delta\varphi\lambda = \Phi(\delta\rho, \lambda),$$

et la proposition est démontrée.

Comme conséquence, si $\varphi\lambda$ est conjuguée à elle-même par rapport à λ, la fonction $\Phi(\lambda, d\rho)$, qui jouit évidemment de la même propriété, est aussi conjuguée à elle-même par rapport à $d\rho$.

5. Voici quelques applications.

Soit le vecteur $u\sigma$; on aura

$$d(u\sigma) = \nabla u . d\rho\sigma + u\varphi\, d\rho\,;$$

d'où

$$\Delta(u\sigma) = \nabla u \times \sigma + u\,\Delta\sigma\,,$$

(4) $$\mathrm{D}(u\sigma) = \Sigma\alpha . \nabla u\alpha . \sigma + u\Sigma(\alpha . \varphi\alpha) = \sigma . \nabla u + u\,\mathrm{D}\sigma.$$

Soit encore le scalaire $\sigma . \tau$.

Si

$$d\tau = \theta\, d\rho,$$

on aura

$$d(\sigma . \tau) = \tau . \varphi\, d\rho + \sigma . \theta\, d\rho = (\varphi'\tau + \theta'\sigma) . d\rho\,;$$

d'où

$$\nabla\sigma . \tau = \varphi'\tau + \theta'\sigma.$$

Si l'on a identiquement

$$\sigma . \tau = 0,$$

c'est-à-dire si σ et τ sont deux vecteurs rectangulaires, on aura aussi identiquement

(5) $$\varphi'\tau + \theta'\sigma = 0.$$

Considérons enfin le vecteur $\sigma \times \tau$. On aura

$$d(\sigma \times \tau) = \varphi\, d\rho \times \tau + \sigma \times \theta\, d\rho$$

et, par suite,

$$\Delta(\sigma \times \tau) = \Sigma[\alpha \times (\varphi\alpha \times \tau)] - \Sigma[\alpha \times (\theta\alpha \times \sigma)],$$
$$\mathrm{D}(\sigma \times \tau) = \Sigma\overline{\alpha\varphi\alpha\tau} - \Sigma\overline{\alpha\theta\alpha\tau}.$$

Or

$$\Sigma[\alpha \times (\varphi\alpha \times \tau)] = \varphi\tau - \mathrm{D}\sigma\tau,$$
$$\Sigma[\alpha \times (\theta\alpha \times \sigma)] = \theta\sigma - \mathrm{D}\tau\sigma,$$
$$\Sigma\overline{\alpha\varphi\alpha\tau} = \tau . \Delta\sigma,$$
$$\Sigma\overline{\alpha\theta\alpha\sigma} = \sigma . \Delta\tau.$$

Donc on a

$$(6) \qquad \Delta(\sigma \times \tau) = \varphi\tau - \theta\sigma - D\sigma\tau + D\tau\sigma,$$

$$(7) \qquad D(\sigma \times \tau) = \Delta\sigma.\tau - \Delta\tau.\sigma.$$

Dans le cas où σ et τ sont deux vecteurs rectangulaires, l'expression de $\Delta(\sigma \times \tau)$ peut se mettre sous une autre forme qui nous sera très utile plus tard.

On a, en effet, dans ce cas (5)

$$\varphi'\tau + \theta'\sigma = 0;$$

on peut donc écrire

$$\Delta(\sigma \times \tau) = \varphi - \varphi')\tau + (\theta - \theta')\sigma - 2\theta\sigma - D\sigma\tau + D\tau\sigma,$$

ou

$$(8) \qquad \Delta(\sigma \times \tau) = \Delta\sigma \times \tau + \Delta\tau \times \sigma - 2\theta\sigma - D\sigma\tau + D\tau\sigma.$$

On obtient de même la formule

$$(9) \qquad \Delta(\sigma \times \tau) = 2\varphi\theta - \Delta\sigma \times \tau - \Delta\tau \times \sigma - D\sigma\tau + D\tau\sigma.$$

6. Arrivons maintenant à la question que nous avons en vue et considérons les familles de surfaces qu'on obtient en égalant à des constantes trois fonctions scalaires données u, u_1 et u_2 de ρ. Soient d'ailleurs

$$du = \nu.d\rho, \qquad du_1 = \nu_1.d\rho, \qquad du_2 = \nu_2.d\rho,$$

et

$$d\nu = \varphi d\rho, \qquad d\nu_1 = \varphi_1 d\rho, \qquad d\nu_2 = \varphi_2 d\rho.$$

Les fonctions φ, φ_1 et φ_2 de $d\rho$ seront conjuguées à elles-mêmes, de sorte qu'on aura

$$(10) \qquad \Delta\nu = \Delta\nu_1 = \Delta\nu_2 = 0.$$

Ceci posé, si deux surfaces quelconques appartenant à deux familles différentes se coupent partout à angle droit, on aura identiquement

$$(11) \qquad \nu_1.\nu^2 = 0; \qquad \nu_2.\nu = 0 \qquad \text{et} \qquad \nu.\nu_1 = 0;$$

d'où

$$\nu_1 = \nu_2 \times \nu.$$

L'équation

$$\overline{\nu^2 \nu\, d\rho} = 0,$$

qui ne diffère de

$$\upsilon_1 . d\varphi = 0$$

que par un facteur scalaire, est donc intégrable, et l'on a, par suite,

$$(\upsilon_2 \times \upsilon) . \Delta (\upsilon_2 \times \upsilon) = 0,$$

ou

$$\upsilon_1 . \Delta (\upsilon_1 \times \upsilon) = 0.$$

Mais la formule (8) devient ici

$$\Delta (\upsilon_2 \times \upsilon) = 2 \varphi \upsilon_2 - D \upsilon_2 \upsilon + D \upsilon \upsilon_3 ,$$

et l'équation qui précède se réduit à

$$(12) \qquad \upsilon_1 . \varphi \upsilon_2 = 0.$$

Sous cette forme, elle montre qu'au point ρ, υ_1 et υ_2, qui sont des vecteurs situés dans le plan tangent de la surface de paramètre u, sont deux directions conjuguées, et comme ces deux directions sont rectangulaires, ce sont celles des lignes de courbure de cette surface.

On a donc la propriété suivante, qui est due, comme on sait, à Dupin :

Les surfaces appartenant à deux familles différentes d'un système triple orthogonal se coupent mutuellement suivant leurs lignes de courbure.

7. Il en résulte qu'on obtiendra les conditions qui expriment qu'une famille de surfaces fait partie d'un système triple orthogonal, en écrivant que les lignes de courbure des surfaces qui la constituent sont normales respectivement à deux familles de surfaces, c'est-à-dire qu'on a, υ_1 et υ_2 étant des vecteurs de modules quelconques tangents aux lignes de courbure,

$$(13) \qquad \upsilon_1 . \Delta \upsilon_1 = 0 ; \qquad \upsilon_2 . \Delta \upsilon_2 = 0.$$

Il est facile de voir, d'ailleurs, que ces deux conditions se réduisent à une seule.

Le vecteur υ_1 ne diffère, en effet, de $\upsilon_2 \times \upsilon$ que par un facteur scalaire, de sorte que la première condition (13) peut être remplacée par la suivante :

$$\upsilon_1 . \Delta (\upsilon_2 \times \upsilon) = 0.$$

Or on a (8)

$$\Delta (\upsilon_2 \times \upsilon) = \Delta\upsilon_2 \times \upsilon - 2\varphi\upsilon_2 = D\upsilon_2\upsilon + D\upsilon\upsilon_2,$$

et, en tenant compte de la relation (12), la condition qui précède devient

$$\overline{\upsilon\upsilon_1 \Delta\upsilon_2} = 0,$$

ou

$$\upsilon_2 . \Delta\upsilon_2 = 0.$$

On est conduit ainsi à la proposition suivante, qui comprend et complète celle de Dupin :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux familles de surfaces se coupant à angle droit fassent partie d'un système triple orthogonal, c'est-à-dire pour qu'il existe une troisième famille de surfaces coupant les premières à angle droit, est que les signes d'intersection de deux surfaces de familles différentes soient lignes de courbure pour les surfaces de l'une des deux familles.

Ces lignes d'intersection ne peuvent pas d'ailleurs être lignes de courbure pour les surfaces de l'une des deux familles sans être aussi lignes de courbure pour les surfaces de l'autre famille.

8. L'une ou l'autre des conditions (13) nous conduirait, ainsi que nous le montrerons plus loin, à l'équation différentielle des familles de Lamé. Mais nous pouvons obtenir aussi cette équation par le procédé suivant, qui est plus simple et plus élégant.

Reprenons la condition

$$\upsilon_1 . \varphi\upsilon_2 = 0. \tag{14}$$

Si M est le point où la normale au point ρ à la surface de paramètre u rencontre la surface de paramètre $u \times du$, les surfaces de paramètre u_1 et u_2 passeront en M et leurs normales en ce point devront être tangentes aux lignes de courbure de la surface de paramètre $u + du$. On obtiendra la condition pour qu'il en soit ainsi en prenant la dérivée de l'équation (14) suivant le vecteur υ, ce qui donne

$$\varphi_1 \upsilon . \varphi \upsilon_2 + \upsilon_1 . \varphi \varphi_2 \upsilon + \upsilon_1 . \Phi(\upsilon_2, \upsilon) = 0,$$

ou, en tenant compte des identités

$$\varphi_1 \upsilon + \varphi \upsilon_1 = 0, \qquad \varphi_2 \upsilon + \varphi \upsilon_2 = 0,$$

et posant

$$\Phi(\upsilon_2 . \upsilon) = \Phi(\upsilon, \upsilon_2) = \Psi \upsilon_2,$$

$$\upsilon_1 . (\Psi - 2\varphi^2) = 0. \tag{15}$$

Si maintenant on élimine υ_1 et υ_2 entre les équations (11), (14) et (15), on aura une relation qui ne contiendra plus que la fonction u et ses dérivées jusqu'au 3^e ordre ; ce sera donc l'équation différentielle définissant les familles de surfaces qui peuvent faire partie d'un système triple orthogonal.

Il suffit d'ailleurs, pour faire cette élimination, d'écrire la condition bien connue qui exprime que le plan

$$\upsilon . \varpi = 0$$

coupe les quadriques

$$\varpi . \varphi \varpi = 1, \qquad \varpi . (\Psi - 2\varphi^2) \varpi = 1,$$

suivant deux coniques coaxiales. Il vient ainsi

$$\upsilon . \left[\overset{-2}{\upsilon} \eta - \varphi \upsilon \times (\Psi - 2\varphi^2) \upsilon \right] = 0$$

ou

$$\overset{-2}{\upsilon} \upsilon . \eta - \overline{\upsilon \varphi \upsilon \Psi \upsilon} + 2 \overline{\upsilon \varphi \upsilon \varphi^2 \upsilon} = 0, \tag{16}$$

où l'on a posé, α, β et γ étant trois orienteurs rectangulaires quelconques,

$$\eta = \Sigma[\varphi \alpha \times (\Psi - 2\varphi^2) \alpha] = \Sigma(\varphi \alpha \times \Psi \alpha) = \Sigma(\alpha \times \Psi \varphi \alpha).$$

La relation vectorielle

$$\eta = 0$$

exprime, ainsi qu'il est facile de le voir, que les deux fonctions conjuguées à elles-mêmes φ et Ψ ont les mêmes directions principales.

9. Dans le cas particulier où les directions principales α, β et γ

de la fonction ρ sont fixes, on a

$$\varphi\lambda = s_1\alpha.\lambda\alpha = s_2\beta.\lambda\beta \times s_3\gamma.\lambda\lambda,$$

d'où

$$\Psi\lambda = \upsilon.\nabla s_1\alpha.\lambda\alpha + \upsilon.\nabla s_2\beta.\lambda\beta + \upsilon.\nabla s_3\gamma.\lambda\gamma.$$

On a alors $\eta = 0$ et, si l'on pose

$$\alpha.\upsilon = a, \qquad \beta.\upsilon = b, \qquad \gamma.\upsilon = c,$$

l'équation (16) devient

$$(17) \qquad abc \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ s_1 & s_2 & s_3 \\ \upsilon.\nabla s_1 - 2s_1^2 & \upsilon.\nabla s_2 - s_2^2 & \upsilon.\nabla s_3 - s_3^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Cherchons, par exemple, une solution de la forme

$$u = X + Y + Z,$$

où X, Y et Z sont des fonctions de $\alpha.\rho$, $\beta.\rho$ et $\gamma.\rho$ respectivement. On aura

$$\upsilon = X'\alpha + Y'\beta + Z'\gamma,$$

$$d\upsilon = \varphi\, d\rho = X''\alpha.d\rho\,\alpha + Y''\beta.d\rho\,\beta + Z''\gamma.d\rho\,\gamma,$$

d'où

$$a = X', \qquad b = Y', \qquad c = Z',$$

$$s_1 = X'', \qquad s_2 = Y'', \qquad s_3 = Z'',$$

$$\upsilon.\nabla s_1 = X'X''', \qquad \upsilon.\nabla s_2 = Y'Y''', \qquad \upsilon.\nabla s_3 = Z'Z'''$$

et l'équation (17) devient

$$X'Y'Z' \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ X'' & Y'' & Z'' \\ X'X''' - X''^2 & Y'Y''' - Y''^2 & Z'Z''' - Z''^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ce qui est conforme à un résultat obtenu par Bouquet.

10. L'équation (15) peut évidemment se mettre sous la forme

$$(18) \qquad d\rho.(\Psi - 2\varphi^2)\delta\rho = 0$$

où d et δ sont des symboles de dérivation relatifs à des déplacements suivant les lignes de courbure de la surface (u). Si d'ailleurs nous désignons par $\rho\, du$ la distance des surfaces de paramètres u et $u \times du$, on aura

$$\rho = \frac{1}{\upsilon},$$

Si nous différentions cette équation pour un déplacement $d\rho$ suivant une des lignes de courbure de la surface de paramètre u, il vient

$$-dp = p^2\,\upsilon.d\upsilon = p^3\,d\rho.\varphi\upsilon = \omega.d\rho,$$

en posant

$$\omega = p^3\varphi\upsilon;$$

et l'on aura

$$(19)\qquad d\omega = \psi\,d\rho = p^3(\Psi + \varphi^2)\,d\rho - 3p^5\varphi\upsilon.d\rho\varphi\upsilon;$$

d'où

$$(20)\qquad \delta\rho.\Psi\,d\rho = p^3\,\delta\rho.(\psi + \varphi^2)\,d\rho - 3p^5\varphi\upsilon.\delta\rho\varphi\upsilon.\delta\rho.$$

Or les vecteurs $\upsilon \times \varphi\,d\rho$ et $\upsilon \times \varphi\,\delta\rho$ sont respectivement parallèles à $d\rho$ et $\delta\rho$: donc on a

$$(\upsilon \times \varphi\,d\rho).(\upsilon \times \varphi\,\delta\rho) = 0,$$

d'où

$$\bar{\upsilon}^{2}\,d\rho.\varphi^2\,\delta\rho = \upsilon.\varphi\,d\rho\,\upsilon.\varphi\,\delta\rho.$$

En tenant compte de cette relation, l'équation (20) devient

$$d\rho.\psi\,\delta\rho = p^3\,d\rho.(\Psi - 2\varphi^2)\,\delta\rho,$$

de sorte que l'équation (18) peut s'écrire sous la forme

$$d\rho.\psi\,d\rho = 0,$$

où la fonction ψ définie par l'équation (19) est conjuguée à elle-même.

L'équation (16) d'une famille de Lamé peut donc elle-même être remplacée par la suivante :

$$(21)\qquad \bar{\upsilon}^{2}\,\varepsilon.\upsilon - \overline{\upsilon\varphi\upsilon\varphi\upsilon} = 0,$$

où

$$\varepsilon = \Sigma(\varphi\alpha \times \psi\alpha) = \Sigma(\alpha \times \psi\varphi\alpha).$$

11. Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que l'équation de la famille de surfaces de paramètre u était résolue par rapport à u. Considérons maintenant le cas où cette équation est de la forme

$$f(\rho, u) = 0$$

et ne peut pas être résolue par rapport à u.

Si nous différentions cette équation, il vient

$$\upsilon . d\rho + \frac{\partial f}{\partial u} du = 0,$$

et la quantité que nous avons désignée par p aura pour valeur

$$p = -\frac{\frac{\partial f}{\partial u}}{\overline{\upsilon}}.$$

Il est évident d'ailleurs que tous les résultats du Paragraphe qui précède subsisteront en partant de cette valeur de p et en laissant u constant dans les dérivations.

12. L'équation (21) est vérifiée pour $p =$ constante, c'est-à-dire quand la famille de paramètre u est composée de snrfaces parallèles.

Toutes les solutions de l'équation

$$p = a\overline{\rho}^{2} + 2\lambda.\rho + b, \tag{22}$$

où les scalaires a et b et le vecteur λ sont des fonctions de u, appartiennent également à l'équation (21) et feront par suite connaître des familles de Lamé.

On a, en effet, u restant constant,

$$dp = 2(a\rho.d\rho + \lambda.d\rho),$$

d'où

$$\omega = 2(a\rho + \lambda)$$

et

$$d\omega = \psi\, d\rho = 2a\, d\rho;$$

en sorte que l'équation

$$d\rho.\psi\,\delta\rho = 0$$

se réduit à

$$d\rho.\delta\rho = 0,$$

et elle est toujours vérifiée par les directions rectangulaires $d\rho$ et $\delta\rho$.

Les familles de sphères et de plans rentrent dans ce cas particulier et peuvent dès lors faire partie d'un système triple orthogonal.

En effet, une famille quelconque de sphères a une équation de la forme

$$\overline{\rho - \alpha}^2 = R^2,$$

α et R étant des fonctions de u, et l'on a

$$\upsilon = \rho - \alpha, \qquad \bar{\upsilon} = \overline{\rho - \alpha} = R,$$

$$p = -\frac{\alpha'.(\rho - \alpha)}{R},$$

α' étant la dérivée du vecteur α par rapport à u; et cette équation est bien une forme particulière de l'équation (22).

13. Nous allons enfin montrer comment on peut obtenir l'équation (16) en exprimant que les lignes de courbure des surfaces de la famille considérée sont normales respectivement à deux familles de surfaces. Mais, auparavant, nous ferons quelques remarques sur l'orienteur normal d'une surface et ses différentielles.

14. Désignons par ν l'orienteur de la normale, et soit

$$d\nu = \psi\, d\rho.$$

On a, puisque ν est un orienteur,

$$\nu . d\nu = 0$$

ou

$$\nu . \psi\, d\rho = d\rho . \psi' \nu = 0;$$

et, comme $d\rho$ est un vecteur quelconque, on a identiquement

$$\psi' \nu = 0.$$

On voit donc que la fonction ψ appliquée à un vecteur quelconque l'amène dans le plan tangent et que l'équation vectorielle

$$\varpi \times \psi\varpi = 0$$

n'a que deux racines distinctes pour lesquelles $\psi\varpi$ est différent de zéro.

Si ε et ε_1 sont les deux orienteurs qui satisfont à cette équation, on aura

$$\psi\varepsilon = s\varepsilon, \qquad \psi\varepsilon_1 = s_1\varepsilon_1,$$

s et s_1 étant les racines de l'équation

(23) $$s^2 - m_2 s + m_1 = 0.$$

La fonction ψ satisfait d'ailleurs à l'équation symbolique

$$\psi(\psi^2 - m_2\psi + m_1) = 0,$$

qui, pour un vecteur situé dans le plan tangent, se réduit à

(24) $$\psi^2 - m_2\psi + m_1 = 0.$$

On voit immédiatement que ε et ε_1 satisfont également à l'équation des lignes de courbure de la surface (u)

$$\overline{\nu\, d\nu\, d\rho} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \overline{\nu\psi\, d\rho\, d\rho} = 0;$$

ce sont donc les orienteurs des lignes de courbure de la surface (u) au point ρ.

Les orienteurs ν, ε et ε_1 déterminent ainsi un système de trois directions rectangulaires.

D'autre part, la relation

$$(\psi - \psi')\nu = \Delta\nu \times \nu$$

se réduit, dans le cas actuel, à

$$\psi\nu = \Delta\nu \times \nu.$$

L'équation $\nu . d\rho = 0$ étant d'ailleurs intégrable, on a

$$\nu . \Delta\nu = 0$$

et, par suite,

$$\Delta\nu = \nu \times \psi\nu.$$

Si donc on pose

$$\psi\nu = r\lambda, \qquad \Delta\nu = r\mu,$$

λ et μ étant des orienteurs, on aura un second système d'orienteurs rectangulaires λ, μ et ν dont on aperçoit immédiatement la signification géométrique : ν est l'orienteur de la tangente, λ celui de la normale principale et μ celui de la binormale des trajectoires orthogonales de la famille de surfaces considérée, et r est la courbure de la trajectoire qui passe au point ρ.

Si, de plus, r_1 est la torsion de cette courbe, on aura

$$\frac{d\mu}{dn} = r_1 \lambda,$$

$\frac{d}{dn}$ étant un symbole de dérivation suivant la normale à la surface u, c'est-à-dire suivant la tangente à la trajectoire orthogonale.

L'équation

$$\Delta\nu = \nu \times \psi\nu$$

montre enfin qu'on a

$$\lambda \times \psi\lambda + \mu \times \varphi\mu = 0.$$

15. Revenons maintenant à la question que nous avons en vue. Nous avons montré précédemment que, si υ_1 et υ_2 sont des vecteurs de modules quelconques tangents aux lignes de courbure de la surface u, la condition qui exprime que les lignes de courbure de toutes les surfaces de la famille sont, pour chaque système, orthogonales à une famille de surfaces, est indifféremment

$$\upsilon_1 . \Delta\upsilon_1 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \upsilon_2 . \Delta\upsilon_2 = 0.$$

Il est clair dès lors qu'on peut mettre cette condition sous la forme

$$(24\ bis) \qquad \upsilon_1 . \Delta\upsilon_1 + \upsilon_2 . \Delta\upsilon_2 = 0.$$

Or on obtiendra deux vecteurs dirigés suivant les lignes de courbure de la surface ν en opérant avec $\psi - s$ et avec $\psi - s_1$ sur un vecteur quelconque du plan tangent; par exemple, sur le vecteur μ. L'équation (24 *bis*) peut donc s'écrire

$$(\psi\mu - s\mu) . \Delta(\psi\mu - s\mu) + (\psi\mu - s_1\mu) . \Delta(\psi\mu - s_1\mu) = 0,$$

ou, en développant et remarquant que $s + s_1 = m_2$ et $ss_1 = m_1$,

$$(25) \qquad \begin{cases} (2\psi\mu - m_2\mu) . \Delta\psi\mu \\ \quad + (m_2^2\mu - 2m_1\mu - m_2\psi\mu) . \Delta\mu - \overline{\mu\psi\mu\nabla m_2} = 0. \end{cases}$$

Nous allons calculer séparément chacun des trois termes du premier membre de cette équation.

Posons

$$d\Delta\nu = \theta\, d\rho \qquad \text{et} \qquad d\mu = \chi\, d\rho;$$

nous aurons

$$d\psi\mu = \Psi(\mu, d\rho) + \psi\chi\, d\rho.$$

On aura donc, en employant, selon le cas, l'un ou l'autre des deux systèmes d'orienteurs rectangulaires que nous avons signalés dans le paragraphe qui précède,

$$\Delta\psi\mu = \Sigma[\alpha \times \psi(\mu, \alpha)] + \Sigma\lambda \times \psi\chi\lambda = \frac{d\Delta\nu}{dm} + \Sigma(\lambda \times \psi\chi\lambda).$$

Mais, dans l'expression $\Sigma(\lambda \times \psi\chi\lambda)$, nous pouvons négliger les termes $\lambda \times \psi\chi\lambda$ et $\mu \times \psi\chi\mu$, qui sont dirigés suivant la normale, ainsi qu'on le reconnaît en les projetant avec λ et avec μ, et qui n'influent pas dès lors sur le résultat que nous avons en vue.

On a donc

$$\Delta\psi\mu = \frac{d\Delta\nu}{dm} + \nu \times \psi\chi\nu = \theta\mu + \nu \times \psi\frac{d\mu}{dn} + \ldots,$$

ou enfin

$$\Delta\psi\mu = \theta\mu + r_1\nu \times \psi\lambda + \ldots.$$

Le premier terme de l'équation (25) peut donc s'écrire

$$(2\psi\mu - m_2\mu).(\theta\mu + r_1\nu \times \psi\lambda),$$

ou encore, en remarquant que

$$m_1 = \Sigma\overline{\nu\psi\lambda\psi\mu} = \overline{\nu\psi\lambda\psi\mu},$$
$$(2\psi\mu - m_2\mu).\theta\mu + 2m_1r_1 - m_2r_1\lambda.\psi\lambda.$$

Pour calculer le second terme de l'équation (25), nous allons chercher les composantes du vecteur $\Delta\mu$ suivant les directions λ et μ.

On a

$$\begin{aligned}\lambda.\Delta\mu = \overline{\mu\nu\Delta\mu} &= -\mu.(\chi - \chi')\nu = -\mu.\frac{d\mu}{dn} + \nu.\chi\mu = \nu.\chi\mu \\ &= \nu.\frac{d\mu}{dm} = -\mu.\frac{d\nu}{dm} = -\mu.\psi\mu.\end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned}\mu.\Delta\mu = \lambda.(\chi - \chi')\nu &= \lambda.\frac{d\mu}{dn} - \nu.\chi\lambda = r_1 - \nu.\frac{d\mu}{dl} \\ &= r_1 + \mu.\frac{d\nu}{dl} = r_1 + \mu.\psi\lambda = r_1 + \lambda.\psi\mu,\end{aligned}$$

car $(\psi - \psi')\mu = \Delta\nu \times \mu = 0$.

Donc

$$\Delta\mu = -\mu.\psi\mu\lambda + \quad r_1 + \lambda.\psi\mu)\mu + \dots .$$

En tenant compte de cette expression de $\Delta\mu$, le deuxième terme de l'équation (25) se ramène immédiatement à la forme

$$m_2^2 r_1 + m_2^2 \lambda.\psi\mu - 2\, m_1 r_1 - 2 m_1 \lambda.\psi\mu - m_2 r_1\, \mu.\psi\mu.$$

Enfin le troisième terme de l'équation (25) est égal à

$$\frac{dm_2}{dn}\lambda.\psi\mu.$$

En réunissant tous ces résultats, l'équation (25) devient

$$(26) \qquad (2\psi\mu - m_2\mu).\theta\mu + \left(m_2^2 - 2 m_1 + \frac{dm_2}{dn}\right)\lambda.\psi\mu = 0.$$

On peut simplifier l'écriture en remarquant que

$$d\psi\,\nu = \Psi(\nu,\, d\rho) + \psi^2 d\rho\,;$$

d'où

$$D\psi\,\nu = \Sigma\alpha.\Psi(\nu,\, \alpha) + \Sigma\alpha.\psi^2\alpha = m_2^2 - 2 m_1 + \frac{dm_2}{dn}.$$

L'équation (26) peut donc s'écrire

$$(27) \qquad (2\psi\mu - m_2\mu).\theta\mu + D\psi\,\nu\lambda.\psi\mu = 0.$$

On donnera une autre forme à cette équation en introduisant la fonction conjuguée θ' à l'aide de la relation

$$(\theta - \theta')\mu = \Delta^2\nu \times \mu,$$

où l'on a posé $\Delta(\Delta\nu) = \Delta^2\nu$.

Il vient en effet, en tenant compte de cette relation,

$$\begin{aligned}(2\psi\mu - m_2\mu).\theta\mu &= (2\psi\mu - m_2\mu).\theta'\mu + 2\,\overline{\mu\psi\mu\Delta^2\nu}\\ &= (2\psi\mu - m_2\mu)\theta'\mu \;\; + 2\,\overline{(\nu\times\lambda)\psi\mu\Delta^2\nu}\\ &= (2\psi\mu - m_2\mu)\theta'\mu \;\; - 2(\lambda.\psi\mu)(\nu.\Delta^2\nu).\end{aligned}$$

Or on a (n° 9)

$$\Delta^2\nu = \Delta(\nu\times\psi\nu) = 2\psi\nu - \Delta\nu\times\psi\nu - \Delta\psi\nu\times\nu - D\nu\,\psi\nu + D\psi\nu\,\nu,$$

d'où

$$\nu.\Delta^2\nu = \overline{\Delta\nu}^2 + D\psi\nu.$$

On a donc enfin

$$(2\psi\mu - m_2\mu).\theta\nu = (2\psi\mu - m_2\mu).\theta'\nu - 2\left(\overline{\Delta\nu}^2\, D\psi\nu\right)\lambda.\psi\mu.$$

En tenant compte de ce résultat, l'équation (27) devient

$$(28)\qquad (2\psi\mu - m_2\mu)\theta'\mu - \left(2\overline{\Delta\nu}^2\, D\psi\nu\right)\lambda.\psi\mu = 0.$$

On obtient enfin une dernière forme de l'équation cherchée en additionnant les équations (27) et (28), ce qui donne

$$(2\psi\mu - m_2\mu).(\theta + \theta')\mu - 2\,\overline{\Delta\nu}^2\,\psi\nu.\psi\Delta\nu = 0,$$

ou

$$(29)\qquad \Delta\nu.(\theta + \theta')(2\psi\Delta\nu - m_2\Delta\nu) - 2\,\overline{\Delta\nu}^2\,\psi\nu.\psi\Delta\nu = 0.$$

16. Il est intéressant de montrer que l'équation que nous venons d'obtenir est identique à l'équation (16).

On a

$$\nu = p\upsilon,$$
$$dp = -p^3\upsilon.\varphi\, d\rho,$$
$$d\nu = \psi\, d\rho = p(\varphi\, d\rho - p^2\, d\rho.\varphi\upsilon\,\upsilon) = p(\varphi\, d\rho - d\rho.\varphi\nu\,\nu),$$

d'où

$$\psi\nu = p(\varphi\nu - \nu.\varphi\nu\,\nu),$$
$$m_2 = \Sigma\alpha.\psi\alpha = p(M_2 - \nu.\varphi\nu),$$

en désignant par des lettres majuscules les invariants de la fonction φ,

$$\Delta\nu = \nu\times\psi\nu = p\nu\times\varphi\nu = p^3\upsilon\times\varphi\upsilon$$

et, par suite,

$$\nu.\Delta\nu = 0,\qquad \Delta\nu.\varphi\nu = 0$$

et

$$\overline{\Delta\nu}^2 = p^2\,\overline{\nu\times\varphi\nu}^2,$$
$$\psi\Delta\nu = p\varphi\Delta\nu$$

et enfin

$$\begin{aligned}\theta\, d\rho = d\Delta\nu &= p^3(\varphi\, d\rho\times\varphi\upsilon + \upsilon\times\varphi^2 d\rho + \upsilon\times\Psi\, d\rho) - 3p^5\, d\rho.\varphi\upsilon\,\upsilon\times\varphi\upsilon\\ &= p^2(\varphi\, d\rho\times\varphi\nu + \nu\times\varphi^2\, d\rho + \nu\Psi\, d\rho - 3\, d\rho.\varphi\nu\,\nu\times\varphi\nu).\end{aligned}$$

Or l'équation (29) peut s'écrire

$$(30)\qquad \Delta\nu.\theta\psi\Delta\nu + \psi\Delta\nu.\theta\Delta\nu - m_2\Delta\nu.\theta\Delta\nu - \overline{\Delta\nu}^2\,\psi\nu.\psi\Delta\nu = 0,$$

et les formules qui précèdent permettent d'obtenir par des calculs très simples, pour les quatre termes du premier membre de cette équation, les valeurs suivantes :

$$\Delta\nu . \theta\psi\,\Delta\nu = p^4\Big[\big(\nu.\varphi^2\nu - 2\,M_2\nu.\varphi\nu + M_2^2 - M_1 - 3\,\overline{\nu\times\varphi\nu}^2\big)\,\Delta\nu.\varphi^2\nu$$
$$+ \Delta\nu.\varphi\Psi\varphi\nu - \nu.\varphi\nu\,\overline{\nu\varphi\nu\varphi\Psi\nu}\Big],$$

$$\psi\,\Delta\nu.\theta\,\Delta\nu = p^4\big[(M_1 - M_2\nu.\varphi\nu + \nu.\varphi^2\nu)\,\Delta\nu.\varphi^2\nu + \nu.\varphi^2\nu\,\Delta\nu.\Psi\nu - \Delta\nu.\Psi\varphi^2\nu$$
$$+ M_2(\Delta\nu.\Psi\varphi\nu - \nu.\varphi\nu\,\overline{\nu\varphi\nu\Psi\nu})\big],$$

$$m_2\,\Delta\nu.\theta\,\Delta\nu = p^4(M_2 - \nu.\varphi\nu)\,[(M_2 - 2\nu.\varphi\nu)\,\Delta\nu.\varphi^2\nu + \Delta\nu\Psi\varphi\nu - \nu.\varphi\nu\,\Delta\nu.\Psi\nu],$$

$$\overline{\Delta\nu}^2\,\psi\nu.\psi\,\Delta\nu = p^4\,\overline{\nu\times\varphi\nu}^2\,\Delta\nu.\varphi^2\nu.$$

En réunissant tous ces résultats, l'équation (30) devient

$$(31)\quad \left\{\begin{array}{l} \overline{\Delta\nu}^2(2\,\Delta\nu.\varphi^2\nu - \Delta\nu\,\Psi\nu) \\ \quad + p^2(\nu.\varphi\nu\,\Delta\nu\varphi\Psi\nu + \Delta\nu.\Psi\varphi^2\nu - \Delta\nu.\varphi\Psi\varphi\nu - \nu.\varphi\nu\,\Delta\nu\,\Psi\varphi\nu) = 0. \end{array}\right.$$

Or on a

$$\begin{aligned} &\nu.\varphi\nu(\Delta\nu.\nu\Psi\nu - \Delta\nu.\Psi\varphi\nu) + \Delta\nu.\Psi\varphi^2\nu - \Delta\nu.\varphi\Psi\varphi\nu \\ &= \Delta\nu.(\Psi\varphi - \varphi\Psi)\varphi\nu - \nu.\varphi\nu\,\Delta\nu.(\Psi\varphi - \varphi\Psi)\nu \\ &= \overline{\Delta\nu\,\eta\varphi\nu} - \overline{\Delta\nu\,\eta\nu} = [(\Delta\nu\times\eta) + \nu].(\varphi\nu\times\nu) \\ &= -\frac{1}{p}(\Delta\nu\times\eta).(\nu\times\Delta\nu) = \frac{\overline{\Delta\nu}^2}{p}\eta.\nu. \end{aligned}$$

Donc enfin l'équation (31) peut s'écrire

$$p\nu.\eta - \Delta\nu.\Psi\nu + 2\,\Delta\nu.\varphi^2\nu = 0$$

et, sous cette forme, on reconnaît immédiatement qu'elle est identique à l'équation (16).