Bulletin de la S. M. F.

L. Lévy

Sur les déplacements d'une figure invariable dans lesquels les différents points de la figure décrivent des courbes sphériques

Bulletin de la S. M. F., tome 32 (1904), p. 203-211
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__203_1>

SUR LES DÉPLACEMENTS D'UNE FIGURE INVARIABLE DANS LESQUELS LES DIFFÉRENTS POINTS DE LA FIGURE DÉCRIVENT DES COURBES SPHÉRIQUES;

Par M. Lucien Lévy.

1. On doit à M. Darboux un beau théorème sur le mouvement d'une figure dont tous les points décrivent des lignes *planes* (¹). M. Mannheim a en outre démontré que *tous les points d'une droite décrivent des lignes* SPHÉRIQUES *dont les centres sont dans un même plan si quatre points de la droite jouissent de cette propriété. Le lieu des centres des sphères qui contiennent les lignes sphériques est une conique* (*Principes de Géométrie cinématique,* p. 180). Il en résulte immédiatement que, dans le cas général, si tous les points d'une droite décrivent des lignes sphériques, le lieu des centres des sphères est une cubique gauche, puisque ce lieu ne peut pas être coupé par un plan en quatre points sans en faire entièrement partie.

Duporcq (*Journal de mathématiques pures,* 1898) a donné un élégant théorème sur le mouvement d'une droite : *s'il existe sur une droite cinq points qui, pour cinq positions déterminées de la droite, soient situés sur cinq sphères, les cinq positions d'un sixième point quelconque de la droite seront sur une même sphère.*

(¹) *Comptes rendus,* 1881. Voir aussi Kœnigs, *Leçons de Cinématique,* Note III de M. Darboux, p. 353. M. Mannheim s'est attaché au mouvement inverse de celui dont il s'agit, *d'une figure dont les plans passent par des points fixes* et en a fait une étude élégante (*Principes et développements de Géométrie cinématique,* p. 389).

Enfin, M. Raoul Bricard (*Journal de mathématiques pures*, 1898) a déterminé tous les déplacements dans lesquels tous les points d'un plan décrivent des lignes sphériques dont les centres sont dans un même plan.

La présente Note a seulement pour objet de retrouver par le calcul quelques-uns des résultats précédents et d'étendre le procédé à quelques théorèmes que nous croyons nouveaux.

2. Désignons par $x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots$ les coordonnées des points $M_0, M_1, \ldots$ de la figure mobile; par $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \ldots$ celles des centres $C_0, C_1, \ldots$ des sphères sur lesquelles restent les points correspondants, par $R_0, R_1, \ldots$ les rayons de ces sphères. Enfin, lorsque les points $M_0, M_1, \ldots$ seront sur une même droite (D), nous désignerons par a, b, c les cosinus directeurs de cette droite, et par ρ_i la distance $\overline{M_0 M_i}$, de sorte qu'on aura

$$\rho_0 = 0,$$

$$(1)\qquad \begin{cases} x_i = x_0 + a\rho_i, \\ y_i = y_0 + b\rho_i, \\ z_i = z_0 + c\rho_i, \end{cases}$$

avec $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.

On a aussi, dans tous les cas,

$$(2)\qquad (x_0 - \alpha_0)^2 + (y_0 - \beta_0)^2 + (z_0 - \gamma_0)^2 = R_0^2,$$

$$(3)\qquad (x_i - \alpha_i)^2 + (y_i - \beta_i)^2 + (z_i - \gamma_i)^2 = R_i^2,$$

et, dans le cas où tous les points M_i sont en ligne droite,

$$(4)\qquad (x_0 + a\rho_i - \alpha_i)^2 + (y_0 + b\rho_i - \beta_i)^2 + (z_0 + c\rho_i - \gamma_i)^2 = R_i^2$$

Soit O l'origine des coordonnées : posons

$$(5)\qquad \overline{Oc_i} = d_i^2 = \alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2.$$

L'équation (4) devient

$$(6)\qquad \begin{cases} x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + \rho_i^2 + d_i^2 \\ \quad - 2[\alpha_i(x_0 + a\rho_i) + \beta_i(y_0 + b\rho_i) + \gamma_i(z_0 + c\rho_i)] \\ \qquad\qquad + 2\rho_i(ax_0 + by_0 + cz_0) = R_i^2. \end{cases}$$

En retranchant l'équation (2) de l'équation (6), on obtient la nouvelle égalité

$$(7)\quad \begin{cases} 2(a\rho_i+\alpha_0-\alpha_i)x_0+2(b\rho_i+\beta_0-\beta_i)y_0+2(c\rho_i+\gamma_0-\gamma_i)z_0 \\ \qquad -2(a\alpha_i+b\beta_i+c\gamma_i)\rho_i+\rho_i^2+d_i^2-d_0^2-\mathrm{R}_i^2+\mathrm{R}_0^2=0, \end{cases}$$

que nous écrirons

$$(8)\quad \begin{cases} 2a\rho_i(x_0-\alpha_i)+2b\rho_i(y_0-\beta_i)+2c\rho_i(z_0-\gamma_i) \\ \quad = l_i^2+2[(\alpha_i-\alpha_0)x_0+(\beta_i-\beta_0)y_0+(\gamma_i-\gamma_0)z_0], \end{cases}$$

en posant, pour abréger,

$$(9)\qquad l_i^2=\mathrm{R}_i^2-\mathrm{R}_0^2-\rho_i^2-d_i^2+d_0^2.$$

Nous sommes maintenant en mesure d'établir un certain nombre de théorèmes.

3. Théorème de M. Mannheim. — *Supposons que quatre points de la droite* (D), *ceux qui correspondent à* $i=0, 1, 2, 3$, *soient sur des sphères dont les centres sont dans un même plan, que nous prendrons pour plan des* yz. On aura

$$\gamma_0=\gamma_1=\gamma_2=\gamma_3=0.$$

On peut même, pour simplifier l'écriture, supposer $\alpha_0=0$, $\beta_0=0$.

L'égalité (8) est une identité pour $i=0$. Nous déduisons donc de (8) trois égalités qui sont vérifiées, par hypothèse :

$$(10)\quad \begin{cases} 2a\rho_1(x_0-\alpha_1)+2b\rho_1(y_0-\beta_1)+2c\rho_1 z_0=l_1^2+2(\alpha_1x_0+\beta_1y_0), \\ 2a\rho_2(x_0-\alpha_2)+\ldots, \\ 2a\rho_3(x_0-\alpha_3)+\ldots. \end{cases}$$

Considérons maintenant un cinquième point M_4 de la droite, $i=4$. On tire des formules (1)

$$(11)\quad \begin{cases} x_0=x_4-a\rho_4, \\ y_0=y_4-b\rho_4, \\ z_0=z_4-c\rho_4 \end{cases}$$

et aussi

$$x_4^2+y_4^2+z_4^2=x_0^2+y_0^2+z_0^2+\rho_4^2+2\rho_4(ax_0+by_0+cz_0)$$

ou, en tenant compte de l'équation (2),

$$(12) \qquad x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 = R_0^2 + \rho_4^2 + 2\rho_4(ax_0 + by_0 + cz_0).$$

Portons les valeurs de x_0, y_0, z_0 tirées de (11) *dans les seconds membres* de (10); ces égalités peuvent s'écrire

$$2\rho_1(ax_0 + by_0 + cz_0) - 2\alpha_1\rho_1 a - 2\beta_1\rho_1 b = l_1^2 + 2\alpha_1 x_4 + 2\beta_1 y_4 - 2\rho_4(a\alpha_1 + b\beta_1),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ou

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\rho_1(ax_0 + by_0 + cz_0) + 2(\rho_4 - \rho_1)\alpha_1 a + 2(\rho_4 - \rho_1)\beta_1 b \\ \quad = l_1^2 + 2\alpha_1 x_4 + 2\beta_1 y_4, \\ 2\rho_2(ax_0 + by_0 + cz_0) + \ldots, \\ 2\rho_3(\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots) + \ldots. \end{array} \right.$$

En éliminant a, b et $ax_0 + by_0 + cz_0$ entre les équations (12) et (13), nous obtenons le lieu du point M_4

$$0 = \begin{vmatrix} x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 - R_0^2 - \rho_4^2 & 2\rho_4 & 0 & 0 \\ l_1^2 + 2\alpha_1 x_4 + 2\beta_1 y_4 & 2\rho_1 & 2(\rho_4 - \rho_1)\alpha_1 & 2(\rho_4 - \rho_1)\beta_1 \\ l_2^2 + 2\alpha_2 x_4 + 2\beta_2 y_4 & 2\rho_2 & 2(\rho_4 - \rho_2)\alpha_2 & 2(\rho_4 - \rho_2)\beta_2 \\ l_2^2 + 2\alpha_3 x_4 + 2\beta_3 y_4 & 2\rho_3 & 2(\rho_4 - \rho_3)\alpha_3 & 2(\rho_4 - \rho_3)\beta_3 \end{vmatrix}$$

qui peut s'écrire, en développant suivant les éléments de la première colonne,

$$x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 - 2\xi x_4 - 2\eta y_4 + \lambda = 0.$$

Le lieu est donc une sphère ayant son centre C_4 dans le plan des xy.

On calculerait aisément ξ, η d'où résulterait, par l'élimination de ρ_4, la conique lieu du point C_4. Nous ne donnerons pas ce calcul.

4. Autre théorème. — *Si cinq points d'une droite décrivent des lignes sphériques, tous les points de la droite décrivent des lignes sphériques.*

Le mode de démonstration est tout à fait le même. Nous pouvons encore supposer $\alpha_0 = \beta_0 = \gamma_0 = 0$; mais les quatre centres C_1, C_2, C_3, C_4 sont quelconques.

L'équation (8) s'écrit ici

$$(14) \quad \left\{ \begin{array}{l} 2\rho_i[(x_0 - \alpha_i)a + (y_0 - \beta_i)b + (z_0 - \gamma_i)c] \\ \quad = l_i^2 + 2(\alpha_i x_0 + \beta_i y_0 + \gamma_i z_0) \end{array} \right.$$

et cette équation en vaut quatre en faisant $i=1, 2, 3, 4$.

Considérons maintenant un sixième point M_5 ($i=5$); des formules (1), on tire

$$(15)\qquad \left\{\begin{aligned} x_0 &= x_5 - a\rho_5,\\ y_0 &= y_5 - b\rho_5,\\ z_0 &= z_5 - c\rho_5 \end{aligned}\right.$$

et aussi

$$(16)\qquad x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 = R_0^2 + \rho_5^2 + 2\rho_5(ax_0 + by_0 + cz_0).$$

Portons les valeurs de x_0, y_0, z_0 tirées de (15) dans les seconds membres des quatre équations (14); on obtient quatre nouvelles équations qui peuvent s'écrire

$$(17)\qquad \left\{\begin{aligned} &2\alpha_i(\rho_5 - \rho_i)a + 2\beta_i(\rho_5 - \rho_i)b + 2\gamma_i(\rho_5 - \rho_i)c\\ &\quad = l_i^2 + 2(\alpha_i x_5 + \beta_i y_5 + \gamma_i z_5) + 2\rho_i(ax_0 + by_0 + cz_0). \end{aligned}\right.$$

En éliminant a, b, c et $ax_0 + by_0 + cz_0$ entre ces quatre équations et l'équation (16), on trouve enfin

$$\begin{vmatrix} x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 - R_0^2 - \rho_5^2 & 2\rho_5 & 0 & 0 & 0\\ l_1^2 + 2(\alpha_1 x_5 + \beta_1 y_5 + \gamma_1 z_5) & 2\rho_1 & 2\alpha_1(\rho_5 - \rho_1) & 2\beta_1(\rho_5 - \rho_1) & 2\gamma_1(\rho_5 - \rho_1)\\ l_2^2 + \ldots & & & & \\ l_3^2 + \ldots & & & & \\ l_4^2 + \ldots & & & & \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation développée et ordonnée s'écrit

$$x_5^2 + y_5^2 + z_5^2 - 2\xi x_5 - 2\eta y_5 - 2\zeta z_5 + \lambda = 0,$$

ce qui montre que le lieu du point quelconque M_5 est sur une sphère, et le théorème est démontré.

Le calcul des coordonnées ξ, η, ζ du centre de cette sphère se fait sans difficulté; il est seulement un peu long et nous nous bornerons à transcrire le résultat. Il est de la forme

$$(18)\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{(\mu_1\rho_5^2 + \nu_1\rho_5 + \varpi_1)\rho_5}{\lambda\rho_5^3 + \mu\rho_5^2 + \nu\rho_5 + \varpi},\\ \eta &= \frac{(\mu_2\rho_5^2 + \nu_2\rho_5 + \varpi_2)\rho_5}{\lambda\rho_5^3 + \mu\rho_5^2 + \nu\rho_5 + \varpi},\\ \zeta &= \frac{(\mu_3\rho_5^2 + \nu_3\rho_5 + \varpi_3)\rho_5}{\lambda\rho_5^3 + \mu\rho_5^2 + \nu\rho_5 + \varpi}. \end{aligned}\right.$$

Ces équations définissent une cubique gauche, comme c'était prévu.

5. *Corollaire.* — En éliminant a, b, c entre les quatre équations (14), on obtient une équation du second degré en x_0, y_0, z_0. Cette équation jointe à

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = R_0^2$$

montre que le point M_0 et, puisque ce point n'a rien de spécial, tous les points de la droite (D) décrivent des biquadratiques sphériques (Duporcq).

6. La même méthode fournit des théorèmes sur le nombre de points qui suffisent à assurer le mouvement sur des lignes sphériques de tous les points d'une figure quelconque, plane ou non. En voici quelques-uns.

Théorème. — *Si treize points arbitraires d'un solide décrivent des lignes sphériques, il en sera de même de tous les points du solide.*

Un point mobile quelconque M_i peut être représenté par les formules suivantes :

$$(19)\qquad \begin{cases} x_i = x_0 + a\rho_i + a'\rho'_i + a''\rho''_i, \\ y_i = y_0 + b\rho_i + b'\rho'_i + b''\rho''_i, \\ z_i = z_0 + c\rho_i + c'\rho'_i + c''\rho''_i, \end{cases}$$

dans lesquelles a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' sont les cosinus directeurs des arêtes d'un trièdre trirectangle mobile. L'interprétation géométrique de ces formules est évidente. Par le point M_0 menons trois droites dont les cosinus directeurs soient respectivement a, b, c; a', b', c'; a'', b'', c'' et prenons-les pour nouveaux axes de coordonnées. Les constantes ρ_i, ρ'_i, ρ''_i représenteront les coordonnées du point mobile M_i rapportées à ces axes mobiles. Les formules (19) sont des formules de transformation de coordonnées.

Convenons enfin de désigner par le signe S la somme de trois termes déduits de l'un d'eux par la substitution des lettres x, y, z à x, ou a, b, c à a ou α, β, γ à α, ... En élevant les équations (19) au carré, et ajoutant, on obtient l'identité

$$(20)\qquad Sx_i^2 = Sx_0^2 + \rho_i^2 + \rho_i'^2 + \rho_i''^2 + 2S(a\rho_i + a'\rho_i' + a'\rho_i'')x_0.$$

Si le point M_0 reste sur une sphère ayant son centre à l'origine, on aura

$$Sx_0^2 = R_0^2,$$

d'où

$$(21)\qquad Sx_i^2 = R_0^2 + \rho_i^2 + \rho_i'^2 + \rho_i''^2 + 2S(a\rho_i + a'\rho_i' + a''\rho_i'')x_0$$

et, si le point M_i est aussi sur une sphère, on aura nécessairement

$$(22)\qquad S(a\rho_i + a'\rho_i' + a''\rho_i'')x_0 = \alpha_i x_i + \beta_i y_i + \gamma_i z_i + p_i,$$

α_i, β_i, γ_i, p_i étant des constantes dont les trois premières sont les coordonnées du centre c_i de la sphère sur laquelle reste le point M_i. Remplaçons dans (22) x_i, y_i, z_i par leurs valeurs tirées de (19) et ordonnons par rapport aux constantes ρ_i, ρ_i', ρ_i''; il vient

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} &\rho_i S(ax_0) + \rho_i' S(a'x_0) + \rho_i'' S(a''x_0)\\ &\quad = S(\alpha_i x_0) + \rho_i S(a\alpha_i) + \rho_i' S(a'\alpha_i) + \rho_i'' S(a''\alpha_i) + p_i.\end{aligned}\right.$$

Cela posé, considérons un point quelconque M ayant pour coordonnées x, y, z par rapport aux axes fixes et ρ, ρ', ρ'' par rapport au trièdre mobile, de sorte que

$$(24)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= x_0 + a\rho + a'\rho' + a''\rho'',\\ y &= y_0 + b\rho + b'\rho' + b''\rho'',\\ z &= z_0 + c\rho + c'\rho' + c''\rho''\end{aligned}\right.$$

et

$$(25)\qquad Sx^2 = R^2 + \rho^2 + \rho'^2 + \rho''^2 + 2\rho S(ax_0) + 2\rho' S(a'x_0) + 2\rho'' S(a''x_0).$$

Entre les égalités (24), (25) et les douze qu'on déduira de (23) en donnant à i douze valeurs distinctes, on pourra éliminer les quinze inconnues x_0, y_0, z_0, a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'', $S(ax_0)$, $S(a'x_0)$, $S(a''x_0)$ qui y figurent au premier degré. Il en résultera une relation de la forme

$$(26)\qquad x^2 + y^2 + z^2 - 2\xi x - 2\eta y - 2\zeta z + \lambda = 0,$$

qui exprime que le point M reste sur une sphère si M_0 et les douze points M_i restent sur des sphères.

7. Supposons ρ''_i et ρ'' nuls; tout ce qui renferme les lettres a'', b'', c'' et $S(a''x_0)$ disparaît et il suffit de donner à i dans les formules (23) huit valeurs différentes pour avoir ce nouveau théorème : *Si neuf points d'un plan décrivent des lignes sphériques, il en est de même de tous les points de ce plan.*

8. Enfin si l'on supposait de plus ρ'_i et ρ' nuls, on retomberait sur le théorème du n° 3.

9. Les raisonnements précédents ne prouvent pas qu'on ne puisse pas se contenter d'assujettir moins de neuf points d'un plan ou moins de treize points d'un solide à décrire des lignes sphériques, tous les points du plan ou du solide décrivant en conséquence des lignes sphériques. Soit, en effet, $M_0\rho\rho'\rho''$ le trièdre mobile. Dès qu'on aura assujetti cinq points de $M_0\rho$ et un point de $M_0\rho'$ à décrire des lignes sphériques le mouvement sera entièrement déterminé; tous les autres points du système décriront des courbes déterminées et l'on n'a aucune indication sur le nombre de ces courbes qu'il faut assujettir à être sphériques pour entraîner la sphéricité des autres. Il y a cependant des présomptions : si $M_0\rho'$ était indépendante de $M_0\rho$, il faudrait bien asujettir cinq points de $M_0\rho$ à être sur des sphères, ce qui, avec les cinq points de $M_0\rho$ parmi lesquels on peut compter M_0, fait bien neuf points. On ferait le même raisonnement pour les points de $M_0\rho''$, ce qui semble donner treize points pour la possibilité d'un mouvement satisfaisant d'une figure solide.

10. D'ailleurs la possibilité même du mouvement reste à établir; c'est bien ce qu'a fait M. Bricard dans le Mémoire dont nous avons déjà parlé en montrant que si les centres des sphères sont assujettis à être dans deux plans rectangulaires, tandis que les points qui décrivent les lignes sphériques sont eux-mêmes dans deux plans rectangulaires, aucun point attaché aux deux plans mobiles ne peut décrire de ligne sphérique en dehors de ceux situés dans ces plans.

11. *Cas particuliers.* — Le nombre des conditions diminue si les centres ont certaines positions particulières. Sans parler du cas évident où toutes les sphères sont concentriques, nous citerons

par exemple le cas signalé par M. Mannheim des sphères ayant leurs centres dans un même plan et où il suffit qu'une droite ait *quatre* points satisfaisants pour que tous ses points décrivent des lignes sphériques.

Par analogie avec le raisonnement du n° 9, on peut prévoir que *tous les points d'un plan resteront sur des sphères ayant leurs centres dans un même plan dès que sept points du plan mobile jouissent de cette propriété*. C'est ce qu'il est facile de vérifier.

Prenons en effet pour plan fixe le plan des xy; dans les équations des pages 9 et 10, il faudra faire $\gamma_i = 0$, et les seconds membres des équations (23) ne contiendront plus comme inconnues que x_0, y_0, a, b, a', b', parce que $\rho''_i = 0$. Comme de plus $\rho'' = 0$, il n'y aura en dehors des inconnues précédentes que $S(ax_0)$, $S(a'x_0)$ et enfin z_0 qui ne figure que dans la troisième équation (24), et dont par conséquent il n'y a pas à tenir compte. Pour pouvoir éliminer les huit inconnues, il n'y a donc à joindre à l'équation (25) et aux deux premières équations (24) que six équations (23). En d'autres termes, en comptant le point M_0, il suffit de supposer que sept points du plan mobile décrivent des lignes sphériques. La non-utilisation de la troisième équation (24) prouve que, dans l'équation (26), on aura

$$\zeta = 0,$$

c'est-à-dire que les centres des sphères sur lesquelles restent les points du plan mobile sont bien dans le plan fixe.