BULLETIN DE LA S. M. F.

F. LUCAS

Sur les dérivées modulaires des polynômes

Bulletin de la S. M. F., tome 32 (1904), p. 185-195

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__185_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SUR LES DÉRIVÉES MODULAIRES DES POLYNOMES;

Par M. Félix Lucas.

Soit

$$(1)\qquad f(z) = A_0 z^p + A_1 z^{p-1} + \ldots + A_{p-1} z + A_p$$

un polynome de degré p, à coefficients réels ou imaginaires.

Formons l'expression

$$(2)\qquad \Delta_\alpha f(z) = pf(z) - (z-\alpha) f'(z);$$

c'est un polynome du degré $(p-1)$ en z et du premier degré en α, que nous appellerons la *dérivée modulaire* (module α) de $f(z)$.

En opérant m fois de suite cette sorte de dérivation, nous obtiendrons la $m^{\text{ième}}$ dérivée modulaire

$$(3) \qquad \Delta_\alpha^m f(z) = (-1)^m P_m \sum_{\theta=0}^{\theta=m} (-1)^\theta C_{p-\theta}^{p-m} \frac{1}{P_\theta} (z-\alpha)^\theta f^{(\theta)} z;$$

c'est un polynome du degré $(p-m)$ en z et du degré m en α. On peut considérer ce polynome comme la somme de $(p-m+1)(m+1)$ termes et écrire

$$(4) \qquad \Delta_\alpha^m f(z) = (-1)^m P_m \sum_{h=0}^{h=p-m} \sum_{k=0}^{k=m} b_{h,k} z^{p-m-h} \alpha^{m-k}.$$

Proposons-nous de déterminer la valeur du coefficient $b_{h,k}$.

A cet effet, commençons par développer le second membre de (3), suivant les puissances décroissantes de z, en posant

$$(5) \quad \begin{cases} \Delta_\alpha^m f(z) = (-1)^m P_m (B_0 z^{p-m} + B_1 z^{p-m-1} + \ldots \\ \qquad\qquad + B_h z^{p-m-h} + \ldots + B_{p-m-1} z + B_{p-m}), \end{cases}$$

chacun des coefficients B désignant un polynome en α du degré m.

Nous voyons immédiatement que

$$(6) \qquad (-1)^m P_m P_{p-m-h} B_h = [D_z^{p-m-h} \Delta_\alpha^m f(z)]_{z=0},$$

D étant le symbole de la dérivation ordinaire.

Or on a identiquement

$$D_z \Delta_\alpha f(z) = (p-1) f(z) - (z-\alpha) f'(z) = \Delta_\alpha D_z f(z);$$

d'où, plus généralement,

$$(7) \qquad D_z^n \Delta_\alpha^m f(z) = \Delta_\alpha^m D_z^n f(z) = \Delta_\alpha^m f^{(n)}(z);$$

on peut donc transposer les signes D et Δ.

Appliquant cette observation à la formule (6), nous trouvons

$$(8) \qquad (-1)^m P_m P_{p-m-h} B_h = [\Delta_\alpha^m f^{(p-m-h)}(z)]_{z=0}.$$

Comme $f^{(p-m-h)}(z)$ est un polynome du degré $(m+h)$, nous avons

$$(9) \quad \Delta_\alpha^m f^{(p-m-h)}(z) = (-1)^m P_m \sum_{\theta=0}^{\theta=m} (-1)^\theta C_{m+h-\theta}^h \frac{1}{P_\theta} (z-\alpha)^\theta f^{(p-m-h+\theta)}(z),$$

et, par conséquent,

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &[\Delta_\alpha^m f^{(p-m-h)}(z)]_{z=0} \\ &= (-1)^m P_m \sum_{\theta=0}^{\theta=m} (-1)^{2\theta} C_{m+h-\theta}^h \frac{1}{P_\theta} \alpha^\theta [f^{(p-m-h+\theta')}(z)]_{z=0}. \end{aligned}\right.$$

Nous pouvons, dans la formule (8), remplacer B_h par $b_{h,k}$ en réduisant le second membre au terme en α^{m-k}; or ce terme est, d'après la formule (10), celui qui correspond à $\theta = m - k$, c'est-à-dire

$$(-1)^m P_m C_{h+k}^h \frac{1}{P_{m-k}} \alpha^{m-k} A_{h+k} P_{p-h-k}.$$

Par conséquent,

$$(11)\quad P_{m-k} P_{p-m-h} b_{h,k} = P_{p-h-k} C_{h+k}^h A_{h+k}.$$

On a identiquement

$$\frac{P_{p-h--k}}{P_{m-k} P_{p-m-h}} = \frac{P_{(m-k)+(p-m-h)}}{P_{m-k} P_{p'-m-h}} = C_{p-h-k}^{m-k}.$$

Donc, en dernière analyse,

$$(12)\quad b_{h,k} = C_{p-h-k}^{m-k} C_{h+k}^k A_{h+k}.$$

La formule (4) devient, par suite,

$$(13)\quad \Delta_\alpha^m f(z) = (-1)^m P_m \sum_{h=0}^{h=p-m} \sum_{k=0}^{h=m} C_{p-h-k}^{m-k} C_{h+k}^k A_{h+k} z^{p-m-h} \alpha^{m-k}.$$

L'ensemble des termes du second membre pour lesquels la somme $h + k$ reste constante, de manière que l'on ait

$$(14)\quad h + k = q,$$

est le polynome du degré $p - q$, en z et α,

$$(-1)^m P_m A_q \sum_{h=0}^{h=p-m} C_{p-q}^{m+h-q} C_q^{q-h} z^{p-m-h} \alpha^{m+h-q}.$$

(Il faut remarquer que la limite inférieure de h doit être $q - m$ au lieu de zéro si $m - q$ est négatif, et que la limite supérieure de h

doit être q au lieu de $p - m$ si q est le plus petit de ces deux nombres.)

Par conséquent :

Le coefficient de chaque terme du degré $p - q$ dans une dérivée modulaire de degré quelconque est égal au coefficient du terme du même degré dans $f(z)$ multiplié par un facteur simplement numérique.

Si le terme du degré $(p - q)$ manque dans $f(z)$, le polynome du même degré manque dans toutes ses dérivées modulaires.

Reportons-nous à la formule (3) et faisons $\alpha = z$; tous les termes du second membre s'annuleront, à l'exception de celui qui correspond à $\theta = 0$; par conséquent,

$$(15)\qquad [\Delta_\alpha^m f(z)]_{\alpha=z} = (-1)^m P_m C_p^{p-m} f(z);$$

le coefficient de z^{p-q} est donc

$$(-1)^m P_m C_p^{p-m} A_q.$$

D'autre part, en faisant $\alpha = z$ dans le polynome du degré $p - q$, en α et z, indiqué plus haut, nous trouvons pour coefficient de z^{p-q}

$$(-1)^m P_m A_q \sum_{h=0}^{h=p-m} C_{p-q}^{m+h-q} C_q^{q-h}.$$

Égalant ces valeurs d'un même coefficient, nous obtenons cette formule (peu connue, bien qu'elle ne soit pas nouvelle)

$$(16)\qquad \sum_{h=0}^{h=p-m} C_{p-q}^{m+h-q} C_q^{q-h} = C_p^{p-m};$$

dans laquelle il faut regarder comme nulle la valeur de tout coefficient C dont l'indice supérieur serait négatif.

Nous allons maintenant indiquer une propriété remarquable des dérivées modulaires.

A cet effet, reprenons la formule (13) en l'écrivant sous la forme

$$\frac{\Delta_\alpha^m f(z)}{(-1)^m P_m} = \sum_{h=0}^{h=p-m} \sum_{k=0}^{m} C_{p-h-k}^{m-k} C_{h+k}^k A_{h+k} z^{p-m-h} \alpha^{m-k}.$$

Le second membre ne change pas si l'on permute $p-m$ et m, z et α. Par conséquent,

$$\frac{\Delta_\alpha^m f(z)}{(-1)^m P_m} = \frac{\Delta_z^{p-m} f(\alpha)}{(-1)^{p-m} P_{p-m}}.$$

Soit, sous une forme plus simple, la formule remarquable

$$(17) \qquad (-1)^p P_{p-m}\, \Delta_\alpha^m f(z) = P_m\, \Delta_z^{p-m} f(\alpha).$$

Remplaçons dans le second membre $\Delta_z^{p-m} f(\alpha)$ par le second membre de l'équation (3), dans lequel nous permuterons z et α, m et $p-m$. Nous obtiendrons pour $\Delta_\alpha^m f(z)$ l'expression nouvelle

$$(18) \qquad \Delta_\alpha^m f(z) = (-1)^m P_m \sum_{\theta=0}^{\theta=p-m} (-1)^\theta C_{p-\theta}^m \frac{1}{P_\theta} (\alpha - z)^\theta f^{(\theta)}(\alpha).$$

SUR LES DÉRIVÉES MODULAIRES DES POLYNOMES;

Par M. Félix Lucas.

Dans une précédente Communication, nous avons donné le nom de *dérivée modulaire* (module α) du polynome $f(z)$, du degré p, à la fonction

$$(1) \qquad \Delta_\alpha f(z) = p f(z) - (z-\alpha) f'(z),$$

et nous avons étudié les dérivations modulaires successives faites avec conservation du module.

Nous allons étudier aujourd'hui les dérivations modulaires successives faites avec changement du module.

On a identiquement

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta_\beta \Delta_\alpha f(z) = \Delta_{\alpha,\beta}^2 f(z) &= p(p-1) f(z) - (p-1) \left\{ \begin{matrix} (z-\alpha) \\ +(z-\beta) \end{matrix} \right\} f'(z) \\ &+ (z-\alpha)(z-\beta) f''(z); \end{aligned} \right.$$

cette fonction étant symétrique relativement à α et β, on voit que l'on peut intervertir l'ordre des dérivations.

On a ensuite

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} \Delta_{\alpha,\beta,\gamma}^3 f(z) &= p(p-1)(p-2) f(z) - (p-1)(p-2) \left\{ \begin{matrix} (z-\alpha) \\ +(z-\beta) \\ +(z-\gamma) \end{matrix} \right\} f'(z) \\ &+ (p-2) \left\{ \begin{matrix} (z-\alpha)(z-\beta) \\ +(z-\beta)(z-\gamma) \\ +(z-\gamma)(z-\alpha) \end{matrix} \right\} f''(z) - (z-\alpha)(z-\beta)(z-\gamma) f'''(z). \end{aligned} \right.$$

La loi de formation est simple; le résultat des dérivations successives pour une série de m modules $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ est

$$(4) \qquad \Delta^m_{\alpha,\beta,\ldots,\lambda} f(z) = \sum_{\theta=0}^{\theta=m} (-1)^\theta A^{m-\theta}_{p-\theta} S_\theta f^{(\theta)}(z);$$

dans cette formule S_θ désigne la somme des produits θ à θ des m binomes $(z-\alpha), (z-\beta), \ldots, (z-\lambda)$; $A^{m-\theta}_{p-\theta}$ désigne le nombre des arrangements de $(p-\theta)$ objets $(m-\theta)$ à $(m-\theta)$. Conventionnellement $S_0 = 1$.

Nous pouvons poser

$$(5) \qquad (z-\alpha)(z-\beta)\ldots(z-\lambda) = \varpi(z);$$

$\varpi(z)$ sera un polynome du degré m dont le terme du degré le plus élevé a pour coefficient l'unité. Nous écrirons alors symboliquement

$$(6) \qquad \Delta^m_{\alpha,\beta,\ldots,\lambda} f(z) = \Delta^m_{(\varpi)} f(z)$$

pour désigner le résultat des m dérivations modulaires successives faites avec les m racines de l'équation $\varpi(z) = 0$.

On a identiquement

$$S_m = \varpi(z),$$
$$S_{m-1} = \varpi'(z);$$

pour obtenir S_{m-2}, nous remarquons que cette somme des produits $(n-2)$ à $(n-2)$ des m binomes $(z-\alpha), (z-\beta), \ldots, (z-\lambda)$ contient $\frac{n(n-1)}{2}$ termes, tandis que $\varpi''(z)$ contient deux fois ce nombre de termes; par conséquent

$$S_{m-2} = \frac{1}{1.2} \varpi''(z);$$

on trouve ensuite

$$S_{m-3} = \frac{1}{1.2.3} \varpi'''(z),$$

et généralement

$$(7) \qquad S_\theta = S_{m-(m-\theta)} = \frac{1}{P_{m-\theta}} \varpi^{(m-\theta)}(z),$$

en désignant, suivant l'usage, par $P_{m-\theta}$ la factorielle

$$1.2.3\ldots(m-\theta).$$

Avec ces notations nouvelles, la formule (4) devient

$$(8)\qquad \Delta_{(\varpi)}^{m} f(z) = \sum_{\theta=0}^{\theta=m} (-1)^{\theta} C_{p-\theta}^{m-\theta}\, \varpi^{(m-\theta)}(z) f^{(\theta)}(z),$$

$C_{p-\theta}^{m-\theta}$ désignant le nombre des combinaisons de $(p-\theta)$ objets $(m-\theta)$ à $(m-\theta)$.

Il est intéressant de considérer le cas où $\varpi(z)$ est du même degré que $f(z)$, c'est-à-dire le cas où m est égal à p. La formule précédente devient alors

$$(9)\qquad \Delta_{(\varpi)}^{p} f(z) = \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^{\theta} \varpi^{(p-\theta)}(z) f^{(\theta)}(z).$$

Nous avons, d'ailleurs, par la formule (7), dans laquelle nous remplaçons m par p,

$$(10)\qquad \varpi^{p-\theta}(z) = P_{p-\theta} S_{\theta}.$$

De même, en admettant que le polynome $f(z)$ ait l'unité pour coefficient de son terme du plus haut degré et en désignant par $T_{p-\theta}$ la somme des produits $(p-\theta)$ à $(p-\theta)$ des p facteurs binomes de ce polynome, on a

$$(11)\qquad f^{\theta}(z) = P_{\theta} T_{p-\theta}.$$

La formule (9) peut, par conséquent, s'écrire sous la forme

$$(12)\qquad \Delta_{(\varpi)}^{p} f(z) = \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^{\theta} P_{p-\theta} P_{\theta} S_{\theta} T_{p-\theta}.$$

Comme chaque dérivation modulaire abaisse d'une unité le degré du polynome $f(z)$, le second membre de cette formule (12) doit être du degré *zéro*; en d'autres termes, ce second membre doit se réduire à une constante. Par conséquent, les coefficients de toutes les puissances de z doivent être identiquement nuls.

Pour déterminer ces coefficients, désignons par

$$s_1,\quad s_2,\quad \ldots,\quad s_p$$

les sommes des produits 1 à 1, 2 à 2, ..., p à p des p racines de l'équation $\varpi(z) = 0$, et, de même, par

$$t_1, \quad t_2, \quad \ldots, \quad t_p$$

les sommes de produits analogues pour les racines de l'équation $f(z) = 0$, Nous aurons alors

$$(13) \quad \begin{cases} S_\theta \ = C_p^\theta \left[z^\theta - \frac{\theta}{p} s_1 z^{\theta-1} + \frac{\theta(\theta-1)}{p(p-1)} s_2 z^{\theta-2} \ldots \right], \\ T_{p-\theta} = C_p^{p-\theta} \left[z^{p-\theta} - \frac{p-\theta}{p} t_1 z^{p-\theta-1} + \frac{(p-\theta)(p-\theta-1)}{p(p-1)} t_2 z^{p-\theta-2} \ldots \right], \end{cases}$$

et, par suite,

$$(14) \quad S_\theta T_{p-\theta} = C_p^\theta C_p^{p-\theta} \begin{cases} z^p - \left(\frac{\theta}{p} s_1 + \frac{p-\theta}{p} t_1 \right) z^{p-1} \\ + \left[\frac{\theta(\theta-1)}{p(p-1)} s_2 + \frac{\theta}{p} \frac{p-\theta}{p} s_1 t_1 + \frac{(p-\theta)(p-\theta-1)}{p(p-1)} t_2 \right] z^{p-2}. \\ + \ldots. \end{cases}$$

En portant cette valeur de $S_\theta T_{p-\theta}$ dans la formule (12) et exprimant ensuite que les coefficients des diverses puissances de z sont nuls, nous obtiendrons les équations

$$(15) \quad \begin{cases} \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^\theta \ A_p^\theta A_p^{p-\theta} = 0, \\ \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^\theta \theta \ A_p^\theta A_p^{p-\theta} = 0, \\ \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^\theta \theta^2 A_p^\theta A_p^{p-\theta} = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

que nous pouvons réunir dans l'équation générale

$$(16) \quad \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^\theta \theta^m A_p^\theta A_p^{p-\theta} = 0,$$

l'exposant m désignant n'importe lequel des nombres entiers 0, 1, 2, ..., $(p-1)$.

Divisons le premier membre de cette équation par la constante P_p et posons pour simplifier les écritures

$$(17) \quad (-1)^\theta \frac{A_p^\theta A_p^{p-\theta}}{P_p} = x_\theta;$$

nous aurons, pour chacune des valeurs de m, l'équation

$$(18)\qquad \sum_{\theta=0}^{\theta=p} \theta^m x_\theta = 0.$$

La valeur de x_0 est l'unité; les autres valeurs de x

$$(18')\qquad x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_\theta,\ \ldots,\ x_p$$

doivent vérifier le système d'équations linéaires

$$(19)\qquad \begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_\theta + \ldots + x_p = 1, \\ x_1 + 2x_2 + \ldots + \theta x_\theta + \ldots + p x_p = 0, \\ x_1 + 2^2 x_2 + \ldots + \theta^2 x_\theta + \ldots + p^2 x_p = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_1 + 2^{p-1} x_2 + \ldots + \theta^{p-1} x_\theta + \ldots + p^{p-1} x_p = 0. \end{cases}$$

Nous pouvons obtenir une démonstration nouvelle de la formule (16) en regardant $x_1, x_2, \ldots, x_p$ comme des inconnues et résolvant ce système d'équations.

Le dénominateur commun est

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & \ldots & \theta & \ldots & p \\ 1 & 2^2 & \ldots & \theta^2 & \ldots & p^2 \\ . & .. & \ldots & .. & \ldots & .. \\ 1 & 2^{p-1} & \ldots & \theta^{p-1} & \ldots & p^{\theta-1} \end{vmatrix} = P_1 P_2 \ldots P_{p-1}.$$

Le numérateur de x_θ est

$$(-1)^\theta \frac{1}{\theta} P_p \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 2 & \ldots & (\theta-1) & (\theta-2) & \ldots & p \\ 1 & 2^2 & \ldots & (\theta-1)^2 & (\theta-2)^2 & \ldots & p^2 \\ . & \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 2^{p-2} & \ldots & (\theta-1)^{p-2} & (\theta-2)^{p-2} & \ldots & p^{p-2} \end{vmatrix} = (-1)^\theta \frac{P_1 P_2 \ldots P_{p-1} P_p}{P_\theta P_{p-\theta}}.$$

La valeur de x_θ est, par conséquent,

$$x_\theta = (-1)^\theta \frac{P_p}{P_{p-\theta} P_\theta} = (-1)^\theta \frac{A_p^\theta A_p^{p-\theta}}{P_p},$$

comme dans la formule (17). L'équation (16) est donc ainsi démontrée.

Cela posé, revenons à la formule (12), qui détermine la dérivée modulaire

$$\Delta^p_{(\varpi)} f(z).$$

Le second membre de cette formule se réduit à son terme constant, que l'on obtient en faisant $z = 0$; on trouve, par conséquent,

$$(20) \qquad \Delta^p_{(\varpi)} f(z) = (-1)^p \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^\theta \mathrm{P}_{p-\theta} \mathrm{P}_\theta s_\theta t_{p-\theta}.$$

Il est intéressant d'examiner le cas où le polynome $\varpi(z)$ ne diffère pas de $f(z)$. Nous obtenons ainsi la $p^{\text{ième}}$ dérivée modulaire de $f(z)$ relativement à ses p racines

$$(21) \qquad \Delta^p_{(f)} f(z) = (-1)^p \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^\theta \mathrm{P}_{p-\theta} \mathrm{P}_\theta t_\theta t_{p-\theta},$$

t_m désignant la somme des produits m à m des p racines de $f(z)$.

Dans le cas particulier où

$$f(z) = z^p - 1,$$

la dérivée modulaire prise relativement à toutes les racines $p^{\text{ièmes}}$ de l'unité se réduit à zéro si p est impair et à -2 si p est pair.

Dans le cas particulier où

$$f(z) = (z - a)^p,$$

la dérivée modulaire considérée est toujours nulle, car on a

$$\Delta^p_{(f)} = \Delta^p_\alpha (z-\alpha)^p = (-1)^p (z-\alpha)^p \sum_{\theta=0}^{\theta=p} (-1)^\theta \mathrm{A}^\theta_p \mathrm{A}^{p-\theta}_p = 0.$$

Ce dernier exemple concerne les dérivées modulaires sans changement de module dont nous avons parlé dans notre précédente Communication. Voici une remarque nouvelle au sujet de ces dérivées.

Posons

$$(22) \qquad \frac{f(z)}{(z-\alpha)^p} = \varphi(z),$$

$f(z)$ désignant un polynome du degré p. On a identiquement

$$(23)\qquad \begin{cases} \Delta_\alpha f(z) = (-1)(z-\alpha)^{p+1}\varphi'(z), \\ \Delta_\alpha^2 f(z) = (-1)^2(z-\alpha)^{p+1}[2\varphi'(z) + (z-\alpha)\varphi''(z)], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

et généralement

$$(24)\qquad \Delta_\alpha^m f(z) = (-1)^m(z-\alpha)^{p+1} \left\{ \begin{array}{l} b_{m,1}\varphi'(z) + b_{m,2}\,(z-\alpha)\varphi''(z) \qquad +\dots \\ +\dots\dots\dots + b_{m,h}\,(z-\alpha)^{h-1}\varphi^{(h)}(z) \;+\dots \\ +\dots\dots\dots + b_{m,m}(z-\alpha)^{m-1}\varphi^{(m)}(z) \end{array} \right\},$$

les $b_{m,h}$ désignant des coefficients numériques. La loi de formation de ces nombres est représentée par la formule

$$(25)\qquad b_{m,h} = (m+h-1)b_{m-1,h} + b_{m-1,h-1};$$

on a d'ailleurs

$$b_{m,1} = P_m \qquad \text{et} \qquad b_{m,m} = 1.$$

On peut former ainsi avec ces nombres le triangle suivant :

$m \backslash h$	1	2	3	4	5	6
1	1					
2	2	1				
3	6	6	1			
4	24	36	12	1		
5	120	240	120	20	1	
6	720	1800	1200	300	30	1
	...	....	....	...	..	.

Un nombre quelconque de ce triangle est égal au produit du nombre placé au-dessus de lui par la somme des rangs de la ligne et de la colonne de ce terme, augmenté du nombre qui précède celui-ci dans la même ligne.

C'est une loi de formation beaucoup moins simple que celle des nombres du triangle arithmétique de Pascal.