BULLETIN DE LA S. M. F.

M. DE MONTCHEUIL

Séparation analytique d'un système de rayons incidents et réfléchis

Bulletin de la S. M. F., tome 32 (1904), p. 152-185
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__152_1>

SÉPARATION ANALYTIQUE D'UN SYSTÈME DE RAYONS INCIDENTS ET RÉFLÉCHIS (suite);

Par M. M. de Montcheuil.

Dans un article précédent (1), nous avons considéré le réseau des courbes génératrices d'une surface de translation, d'ailleurs quelconque; et nous avons vu comment les quatre plans isotropes, tangents en un même point, aux deux courbes du réseau qui s'y rencontrent, déterminent par leurs intersections quatre congruences de droites normales à autant de familles de surfaces. Ces congruences, avons-nous dit, se répartissent en deux couples formant chacun un système de rayons incidents et réfléchis analy-

(1) T. XXXI, fascicule 4, p. 233.

tiquement séparable. Nous avons montré comment cette propriété appartient encore aux nappes des enveloppes de sphères dont le centre décrit la surface dirimante, ces nappes étant d'ailleurs formées par les quatre familles de surfaces normales aux congruences.

Nous nous proposons aujourd'hui de déterminer sur une surface absolument quelconque une catégorie de réseaux jouissant de propriétés analogues au réseau des courbes génératrices d'une surface de translation.

Il serait aisé, comme nous le montrerons dans la suite, de déterminer les réseaux que nous avons en vue, sans passer par l'intermédiaire des surfaces de translation. Toutefois, deux motifs nous engagent à les faire intervenir.

Nous y gagnerons d'abord de pouvoir mettre en relief une correspondance intéressante, qui relie une surface arbitrairement donnée à un ensemble de surfaces de translation dépendant de deux paramètres.

Cette façon de procéder nous permettra encore de définir une catégorie, d'ailleurs illimitée, de formules qui, établies dans l'hypothèse d'une surface de translation, s'étendent au cas de surfaces quelconques.

Surfaces de translation. — Avant d'aborder l'objet propre de ce travail, nous allons rappeler brièvement et compléter quelques résultats que nous avons exposés ailleurs concernant les surfaces de translation ([1]).

Nous avons défini les coordonnées de ces surfaces au moyen du système suivant ([2]) :

$$(1)\quad \begin{cases} y = \displaystyle\int \frac{1-u^2}{4} C''' du + \frac{1-u^2}{4} D' + \int \frac{1-u_1^2}{4} C_1''' du_1 + \frac{1-u_1^2}{4} D_1', \\ x = i\displaystyle\int \frac{1+u^2}{4} C''' du + i\frac{1+u^2}{4} D' - i\int \frac{1+u_1^2}{4} C_1''' du_1 - i\frac{1+u_1^2}{4} D_1', \\ z = \displaystyle\int \frac{u}{2} C''' du \quad + \frac{u}{2} D' \quad + \int \frac{u_1}{2} C_1''' du_1 \quad + \frac{u_1}{2} D_1'. \end{cases}$$

D', C''' représentent ici les dérivées premières et troisièmes de

([1]) Thèse de doctorat.

([2]) *Ibid.*, p. 55.

deux fonctions arbitraires de la variable u; D'_1, C'''_1 les dérivées correspondantes de la variable u_1. On vérifie, en outre, que les fonctions D, D_1 représentent les longueurs des arcs des deux courbes, lieux des extrémités du segment dont le point milieu décrit la surface de translation.

L'interprétation géométrique du système (1) peut être formulée comme il suit :

Sur les tangentes à deux courbes minima quelconques prenons deux points eux aussi quelconques; le milieu du segment qui relie les deux points décrira la surface de translation dont les coordonnées sont définies par les relations précédentes.

Interpréter les formules du système (1), comme nous venons de le faire, revient à considérer les surfaces de translation comme le lieu d'un point du plan tangent à une surface minima quelconque. Cela équivaut à appliquer le mode de construction de Ribaucour à ces surfaces. La surface minima est ici la surface de référencé.

Poursuivant nos investigations, eonsidérons le point du plan tangent à la surface de référence qui engendre la surface de translation précédemment définie et, par ce point, menons une parallèle à la normale de la surface minima. Nous obtenons ainsi une congruence de droites normale à une famille de surfaces. Ces surfaces, que nous avons appelées ailleurs *surfaces* Ξ (1), donnent la solution de l'équation

$$\frac{\partial^4 \xi}{\partial u^2 \partial u_1^2} = 0,$$

ξ, u, u_1 désignant les coordonnées d'O. Bonnet. Nous avons montré que la surface de translation correspondante en constituait la développée moyenne ponctuelle. Il suit de là que la surface minima est l'enveloppe d'un plan perpendiculaire au segment focal de Ξ et le coupant en son milieu. De là, nous tirons cette conséquence :

Si l'on associe à une surface minima quelconque une des

(1) Thèse de doctorat.

surfaces de translation, lieu du point du plan tangent à celle-là, précédemment défini, ces deux surfaces seront les développées moyennes tangentielles et ponctuelles de la famille de surfaces Ξ normales à la congruence des droites menées par chaque point de la surface de translation parallèlement aux normales de la surface minima.

Le segment focal de la famille de surfaces Ξ est donné, à une constante près, par la relation

$$\rho = -\frac{D + D_1}{2}. \tag{2}$$

La surface Ξ correspondante a pour équation

$$\xi = uC_1 + u_1 C - \frac{1 + uu_1}{2}(C' + C'_1 + D + D_1). \tag{3}$$

Il suffira de supprimer les fonctions D et D_1 dans cette équation pour obtenir celle de la surface minima développée tangentielle de Ξ.

Il resterait à indiquer comment, des surfaces trouvées, on déduit les deux systèmes de rayons incidents et réfléchis normaux à quatre familles de surfaces Ξ dont font partie celles que nous avons déterminées. Nous renvoyons, pour ces développements, à l'article précédemment cité.

Extension des formules (1) *à des surfaces quelconques.* — Exprimer les coordonnées d'une surface de translation au moyen du système (1) revient à la considérer comme la développée moyenne [1] d'une surface Ξ définie par l'équation (3), ξ, u, u_1 désignant toujours les coordonnées d'O. Bonnet.

Étendons ce mode de représentation à une surface quelconque. Soient donc x, y, z les coordonnées d'une surface développée moyenne d'une seconde surface définie par une fonction ξ de u, u_1. Nous désignerons par la lettre ξ cette surface.

---

[1] Par développée moyenne nous entendrons toujours la développée moyenne ponctuelle.

ρ désignant le segment focal de ξ, on trouve

$$(4)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{1}{2}\left[(u+u_1)\dfrac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial u_1} - \dfrac{\partial\xi}{\partial u} - \dfrac{\partial\xi}{\partial u_1}\right], \\ y = \dfrac{i}{2}\left[(u_1-u)\dfrac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial u_1} - \dfrac{\partial\xi}{\partial u} + \dfrac{\partial\xi}{\partial u_1}\right], \\ z = \dfrac{1}{2}\left[(uu_1-1)\dfrac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial u_1} - u\dfrac{\partial\xi}{\partial u} - u_1\dfrac{\partial\xi}{\partial u_1} + \xi\right], \\ \rho = \dfrac{1}{2}\left[(uu_1+1)\dfrac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial u_1} - u\dfrac{\partial\xi}{\partial u} - u_1\dfrac{\partial\xi}{\partial u_1} + \xi\right]. \end{cases}$$

C'est ce système (4) qui, *dans le cas des surfaces de translation,* se confond avec le système (1).

Or nous allons définir quatre nouvelles fonctions, que nous désignerons, comme les précédentes, par les lettres C, D, C_1, D_1 et qui entraîneront l'identification des sytèmes (1) et (4) *quelles que soient les surfaces de coordonnées* x, y, z.

Il est évident que, dans le cas général, les nouvelles fonctions dépendent chacune des deux variables u, u_1. Du reste, il suffit, pour les obtenir, d'écrire que les deux systèmes de valeurs des expressions de x, y, z, ρ, définies par les équations (1) et (2) d'une part et (4) de l'autre, sont identiques.

Cette identification conduit aux relations

$$(5)\qquad \begin{cases} C = \dfrac{1}{2}\left[(1+uu_1)\dfrac{\partial\xi}{\partial u_1} - u\xi\right], \\ C_1 = \dfrac{1}{2}\left[(1+uu_1)\dfrac{\partial\xi}{\partial u} - u_1\xi\right], \\ D = D_1 = -\dfrac{1}{2}\left[(1+uu_1)\dfrac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial u_1} - u\dfrac{\partial\xi}{\partial u} - u_1\dfrac{\partial\xi}{\partial u_1} + \xi\right]. \end{cases}$$

De ce système on déduit l'identité

$$(6)\qquad \xi = u_1 C + uC_1 - \frac{1+uu_1}{2}\left(\frac{\partial C}{\partial u} + \frac{\partial C_1}{\partial u_1} + D + D_1\right).$$

Ainsi donc, sous le bénéfice du système (5), *l'équation d'une surface quelconque* ξ *prend la forme de l'équation* (3) *que vérifient les surfaces* Ξ.

Il ne serait pas sans intérêt de prendre pour point de départ cette équation de la surface ξ et d'en déduire [toujours en tenant compte du système (5)] les éléments géométriques qui s'y rattachent : développée moyenne, etc. Sans entreprendre cette étude en détail, nous signalerons les résultats suivants :

Les dérivées $\frac{\partial\xi}{\partial u}$, $\frac{\partial\xi}{\partial u_1}$, $\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial u_1}$ *de la fonction* ξ *définie par l'équation* (6) *peuvent s'obtenir en opérant comme si* C, D *étaient des fonctions de* u *seulement;* C_1, D_1 *des fonctions de* u_1 *seulement.*

La même remarque s'applique aux dérivées $\frac{\partial^n\xi}{\partial u^n}$, $\frac{\partial^n\xi}{\partial u_1^n}$, $\frac{\partial^{n+1}\xi}{\partial u^n\,\partial u_1}$, $\frac{\partial^{n+1}\xi}{\partial u_1^n\,\partial u}$, *où l'on suppose* $n \geqq 2$, *avec cette restriction que les expressions trouvées doivent être multipliées par le facteur* 2.

Il suit de là que toute expression où figurent les seules quantités u, u_1, ξ, $\frac{\partial\xi}{\partial u}$, $\frac{\partial\xi}{\partial u_1}$, $\frac{\partial^2\xi}{\partial u\,\partial u_1}$ prend la même forme, qu'on y remplace ξ et ses dérivées par les expressions déduites de l'équation (3) particulières aux surfaces Ξ ou par celles que l'on déduit de l'équation (6) qui convient à toutes les surfaces.

La même remarque s'applique, au facteur près 2^n, à toute expression homogène et de degré n en $\frac{\partial^n\xi}{\partial u^n}$, ...

Nous avons ainsi défini la catégorie illimitée de formules dont nous avons parlé au début qui, établies dans l'hypothèse des surfaces Ξ ou, ce qui revient au même, des surfaces de translation, leurs développées moyennes, conviennent à des surfaces quelconques.

Comme application des remarques précédentes, considérons les coordonnées de la développée moyenne d'une surface Ξ, définie par le système (1) où C, D, C_1, D_1 sont fonctions respectives d'*une seule variable*. Le système (4) montre que les expressions des coordonnées de la développée moyenne d'une surface quelconque ne contiennent que les seules quantités u, u_1, ... Nous pouvons donc affirmer sans calcul que le système (1), où l'on considère les fonctions C, D, ... comme définies par le système (5), donnera les coordonnées de la développée moyenne d'une surface quelconque.

Les lignes de courbure de ξ nous fourniront une autre application de notre proposition.

Ces lignes sont définies par l'équation

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2} du^2 = \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} du_1^2,$$

équation homogène en $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}$.

D'ailleurs, dans le cas des surfaces Ξ, cette équation prend la forme

$$\left[2 u_1 \frac{\partial D}{\partial u} + (1 + u u_1)\left(\frac{\partial^3 C}{\partial u^3} + \frac{\partial^2 D}{\partial u^2}\right)\right] du^2$$
$$= \left[2 u \frac{\partial D_1}{\partial u_1} + (1 + u u_1)\left(\frac{\partial^3 C_1}{\partial u_1^3} + \frac{\partial^2 D_1}{\partial u_1^2}\right)\right] du_1^2.$$

Cette équation sera donc celle des lignes de courbure d'une surface quelconque; C, D, C_1, D_1 et leurs dérivées désignent alors les fonctions définies par le système (5).

Nous venons de voir comment, C, D, C_1, D_1 désignant les fonctions à deux variables, les formules du système (1) représentent les coordonnées d'une surface quelconque. Or, de ces formules, on peut en déduire de beaucoup plus simples.

On vérifie en effet que, si dans l'un quelconque des seconds membres du système (1) on groupe d'une part les termes en C, D, de l'autre les termes en C_1, D_1, ces deux groupes représentent des valeurs égales. Il suit de là que les quantités x, y, z, ρ peuvent s'exprimer au moyen d'un seul de ces groupes à la condition de le multiplier par 2.

Ainsi donc les coordonnées d'une surface et le segment focal ρ correspondant pourront être exprimées par le système

$$(7) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{1 - u^2}{2}\left(\dfrac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \dfrac{\partial D}{\partial u}\right) + u \dfrac{\partial C}{\partial u} - C, \\ y = i\left[\dfrac{1 + u^2}{2}\left(\dfrac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \dfrac{\partial D}{\partial u}\right) - u \dfrac{\partial C}{\partial u} + C\right], \\ z = u\left(\dfrac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \dfrac{\partial D}{\partial u}\right) - \dfrac{\partial C}{\partial u}, \\ \rho = -D. \end{cases}$$

On déduirait le second système de celui-ci en changeant C, D en C_1, D_1 et i en $-i$.

Ces formules sont celles que nous avons établies ailleurs [1],

---

[1] *Bulletin de la Soc. math.*, t. XXXI, fascicule 4, p. 235.

dans le but d'obtenir des expressions rationnelles et sans signe de quadrature des coordonnées et de l'arc d'une courbe.

Ici, seulement, les deux systèmes définissent deux familles de courbes de paramètres u_1 et u qui engendrent chacun la même surface. Nous reviendrons sur le réseau de ces courbes.

Les coordonnées de la développée moyenne tangentielle de ξ se déduisent de celles de la développée moyenne ponctuelle de la façon la plus simple.

On passe de cette seconde surface à la première par un simple changement de signe devant les termes en D', D'_1 *qui figurent dans les formules du système* (1).

Nous supposons toujours les fonctions C, D, C_1, D_1 définies par le système (5).

Enveloppes et enveloppées. — Rappelons les surfaces définies respectivement par les équations

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \xi &= u_1 C(u, u_1) + u C_1(u, u_1) \\ &\quad - \frac{1+uu_1}{2}\left[\frac{\partial C(u, u_1)}{\partial u} + \frac{\partial C_1(u, u_1)}{\partial u_1} + D(u, u_1) + D_1(u, u_1)\right], \end{aligned}\right.$$

$$(9)\quad \left\{\begin{aligned} \zeta &= u_1 C(u, \alpha_1) + u C_1(\alpha, u_1) \\ &\quad - \frac{1+uu_1}{2}\left[\frac{\partial C(u, \alpha_1)}{\partial u} + \frac{\partial C_1(\alpha, u_1)}{\partial u_1} + D(u, \alpha_1) + D_1(\alpha, u_1)\right]. \end{aligned}\right.$$

Les fonctions C, D, C_1, D_1 qui figurent dans la première équation sont celles que définit le système (5). Les fonctions qui rentrent dans l'expression de ζ se déduisent des précédentes par le changement de u_1 en α_1 dans C, D, de u en α dans C_1, D_1, α, α_1 désignant des paramètres quelconques.

L'équation (8) définit une surface quelconque, dont la développée moyenne ponctuelle est représentée par le système (7).

L'équation (9) définit un ensemble de surfaces Ξ à deux paramètres qui auront pour développées moyennes des surfaces de translation.

Avant d'étudier les rapports qui existent soit entre les surfaces ξ et les surfaces ζ, soit entre leurs développées moyennes, nous devons déterminer la nature de ces surfaces.

La surface ξ et sa développée moyenne sont absolument quelconques. La surface définie par la fonction ζ est une surface Ξ et sa développée moyenne une surface de translation. Mais cette dernière surface n'est pas la plus générale de cette catégorie. Nous devons donc préciser sa nature.

Pour y arriver nous pourrons procéder comme il suit :

Supposons l'une des familles des courbes lieux des extrémités du segment mobile, dont le milieu décrit la surface de translation, définie par le système (7), où C, D désignent des fonctions quelconques de la variable u et d'un paramètre arbitraire α_1. Supposons la seconde famille définie par un système analogue que nous appellerons le *système* (7)' et qu'on déduira du précédent en changeant C, u, α_1, i en C_1, u_1, α, $-i$.

Assujettissons maintenant deux courbes quelconques de famille différente à se rencontrer. Écrivant seulement la première équation de condition, nous aurons

$$(10)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1-u^2}{2}\left[\frac{\partial^2 C(u,\alpha_1)}{\partial u^2}+\frac{\partial D(u,\alpha_1)}{\partial u}\right]+u\frac{\partial C(u,\alpha_1)}{\partial u}-C(u,\alpha_1)\\ &=\frac{1-u_1^2}{2}\left[\frac{\partial^2 C_1(u_1,\alpha)}{\partial u_1^2}+\frac{\partial D_1(u_1,\alpha)}{\partial u_1}\right]+u_1\frac{\partial C_1(u_1,\alpha)}{\partial u_1}-C_1(u_1,\alpha).\end{aligned}\right.$$

Nous allons imposer à ces courbes une nouvelle condition et exiger que toutes celles d'une même famille rencontrent chaque courbe de l'autre tangentiellement à une famille de plans isotropes parallèles. Si nous remarquons que les variables u, u_1 désignent deux paramètres directeurs de plans isotropes tangents aux courbes de chaque famille, nous nous rendons compte aisément que, au point de rencontre de deux courbes, u sera fonction de α seulement et u_1 de α_1. On peut d'ailleurs, sans restreindre la généralité du problème, supposer qu'on a précisément en ce point $u=\alpha$, $u_1=\alpha_1$.

Mais, alors, le système (10) sera vérifié pour $u=\alpha$, $u_1=\alpha_1$ ou, ce qui revient au même, pour $\alpha=u$, $\alpha_1=u_1$. Dès lors, les trois relations (10) expriment trois conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions $C(u, u_1)$, $D(u, u_1)$, ... définies par le système (5). Cela résulte de ce fait que les coordonnées des surfaces définies par ces fonctions doivent pouvoir être représentées indifféremment par les systèmes (7) ou (7)'.

D'ailleurs, le système (5) montre que, entre les fonctions

$C(u, u_1), \ldots$, il ne saurait y avoir plus de trois relations distinctes. Ainsi donc, les conditions que nous nous sommes imposées nous ont conduit à déterminer *précisément* les quatre fonctions C, D, ... définies par le système (5), c'est-à-dire les quatre fonctions qui figurent dans l'expression de ξ donnée par la relation (8). D'ailleurs, les fonctions $C(u, \alpha_1), \ldots$ sont bien déduites des fonctions précédentes par le changement de u_1 en α_1 dans la première, de u en α dans la seconde. Ce sont donc bien les fonctions qui figurent dans l'expression de ζ définie par l'équation (9). Nous pourrons donc maintenant exprimer comme il suit le caractère des surfaces, développées moyennes des surfaces ζ.

L'ensemble des surfaces de translation, développées moyennes des surfaces ζ, s'obtient en prenant pour courbes lieux des extrémités du segment mobile, deux familles de courbes telles que toutes celles d'une même famille rencontrent chaque courbe de l'autre tangentiellement à une famille de plans isotropes parallèles.

Nous allons étudier maintenant quelques-unes des relations qui existent entre les surfaces ξ et ζ, ou encore entre leurs développées moyennes.

Si l'on forme les dérivées de ξ et ζ au moyen des relations (8) et (9), on vérifie que, pour les points des deux surfaces définis par les relations

$$u = \alpha, \qquad u_1 = \alpha_1,$$

on a

$$\xi = \zeta, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial u} = \frac{\partial \zeta}{\partial u}, \qquad \frac{\partial \xi}{\partial u_1} = \frac{\partial \zeta}{\partial u_1}, \qquad \frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial u_1} = \frac{\partial^2 \zeta}{\partial u\, \partial u_1},$$

$$\frac{\partial^n \xi}{\partial u^n} = 2\frac{\partial^n \zeta}{\partial u^n}, \qquad \frac{\partial^n \xi}{\partial u_1^n} = 2\frac{\partial^n \zeta}{\partial u_1^n},$$

$$\frac{\partial^{(n+1)} \xi}{\partial u^n\, \partial u_1} = 2\frac{\partial^{(n+1)} \zeta}{\partial u^n\, \partial u_1}, \qquad \frac{\partial^{(n+1)} \xi}{\partial u_1^n\, \partial u} = 2\frac{\partial^{(n+1)} \zeta}{\partial u_1^n\, \partial u}.$$

Nous supposons $n \geqq 2$.

De ces relations nous déduisons la conclusion suivante :

Une expression en $\xi, \frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \xi}{\partial u_1}, \frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial u_1}$ ne change pas de valeur quand on y remplace ces quantités par les quantités correspondantes $\zeta, \frac{\partial \zeta}{\partial u}, \cdots$ et qu'on y fait $\alpha = u$, $\alpha_1 = u_1$.

Par cette substitution une expression homogène en $\frac{\partial^n \xi}{\partial u^n}$, ... *de degré p se trouve divisée par* 2^p.

Tirons quelques conséquences de ces propositions.

Les coordonnées de la surface ξ sont fonctions des seules quantités u, u_1, ξ, $\frac{\partial \xi}{\partial u}$, $\frac{\partial \xi}{\partial u_1}$, $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial u_1}$ (¹). D'ailleurs, les coordonnées de ζ se déduisent des premières par la substitution de la fonction ζ à la fonction ξ. Nous en concluons que les points correspondants des deux surfaces se confondent. D'autre part, les variables u, u_1 définissent la direction commune des normales à ces mêmes surfaces; elles sont donc tangentes au point considéré.

Ainsi donc la surface ξ *est l'enveloppe de la surface* ζ.

Considérons maintenant les développées moyennes.

Pour le même motif que tout à l'heure, les points correspondants sont confondus.

Il est facile de prouver qu'ici encore les deux surfaces sont tangentes en ces points. En effet, on vérifie que les différentielles dx, dy, dz de ces surfaces sont des fonctions linéaires des seules dérivées $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}$, ..., $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}$, ... Elles sont donc proportionnelles. Les deux surfaces ont donc leurs normales confondues aux points correspondants.

Ainsi donc la développée moyenne de ξ *est l'enveloppe de l'ensemble des surfaces de translation, développées moyennes de* ζ.

La même remarque s'applique aux lignes de courbure dont les équations sont homogènes en $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}$, $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}$.

Par conséquent, les lignes de courbure de ξ *sont les enveloppes des lignes de courbure de* ζ.

Faisons encore une application des résultats précédents.

On vérifie que l'élément linéaire d'une développée moyenne

(¹) *Voir* Darboux, *Théorie de surfaces*, t. I, p. 246.

quelconque est définie par la relation

$$(11)\qquad ds^2 = d\rho^2 + \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial u_1^2}\,du\,du_1,$$

ρ désignant toujours le segment focal de ξ et ayant sa différentielle définie par la relation

$$\begin{aligned} d\rho = {} & \frac{1}{2}\left[(1+uu_1)\frac{\partial^3 \xi}{\partial u^2\,\partial u_1} - u\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\right] du \\ & + \frac{1}{2}\left[(1+uu_1)\frac{\partial^3 \xi}{\partial u\,\partial u_1^2} - u\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}\right] du_1. \end{aligned}$$

On voit par là que ds^2 est homogène et du second degré en $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}$, ... Si donc nous désignons par dS^2 l'élément linéaire relatif à la développée moyenne de ζ, on aura la relation

$$ds^2 = 4\,dS^2$$

au point où l'enveloppe touche l'enveloppée.

Cette relation nous permet d'énoncer la proposition suivante :

Supposons qu'on ait réussi par un procédé quelconque à déterminer deux ensembles de surfaces de translation à deux paramètres, définies comme précédemment et telles que, aux points de contact avec leurs enveloppes, leur élément linéaire ait la même valeur : ces enveloppes seront applicables.

Remarquons, en terminant, que les courbes lieux des extrémités du segment mobile dont le point milieu décrit les surfaces de translation, développées moyennes de ζ, décrivent l'enveloppe de ces mêmes surfaces.

Cela résulte de ce fait que deux courbes quelconques de famille différente se rencontrent.

Réseaux (u, u_1). — Nous désignerons ainsi la catégorie de réseaux dont nous avons parlé au début et qui, tracés sur une surface quelconque, jouissent de propriétés analogues au réseau des courbes génératrices d'une surface de translation.

Pour nous rendre compte de cette analogie, remarquons que ce dernier réseau peut être considéré comme formé de deux familles de courbes telles que toutes les courbes d'une même famille rencontrent chacune des courbes de l'autre tangentiellement à une famille de droites parallèles. D'après la définition même des surfaces de translation, de pareils réseaux ne se rencontrent que sur ces surfaces. Mais nous pouvons élargir la définition donnée en substituant à la famille des droites parallèles tangentes aux courbes d'une même famille une famille de plans parallèles tangents à ces mêmes courbes. Prenons par exemple des plans isotropes. Dès lors, la définition précédente caractérisera les réseaux composés de deux familles de courbes telles que toutes les courbes d'une même famille rencontrent chaque courbe de l'autre tangentiellement à une famille de plans isotropes parallèles. Cette définition comprendra encore, comme cas particulier, le réseau des courbes génératrices d'une surface de translation, mais, dans le cas général, elle caractérisera une catégorie de réseaux susceptibles d'être tracés sur une surface quelconque.

Tels sont les réseaux (u, u_1) dont nous nous proposons d'indiquer sommairement quelques propriétés.

Nous remarquerons d'abord que, sur une surface donnée, ils forment une catégorie caractérisée par deux fonctions arbitraires.

En effet, considérons la surface proposée comme la développée moyenne d'une surface ξ. Cette surface pourra être considérée comme définie par le système (4). Or, si l'on porte les valeurs x, y, z ainsi déterminées dans l'équation de cette même surface

$$F(x, y, z) = 0,$$

on obtiendra une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\Phi\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial u\, \partial u_1}, \frac{\partial \xi}{\partial u}, \frac{\partial \xi}{\partial u_1}, \xi; u, u_1\right) = 0,$$

dont l'intégrale générale ξ renferme deux fonctions arbitraires.

D'ailleurs, chacune des valeurs de ξ donnera un réseau (u, u_1). En effet, les deux familles de ces réseaux (on s'en rend compte aisément) sont données séparément par les systèmes (7) et (7)$'$ où l'on fait respectivement $u_1 = \text{const.}$, $u = \text{const.}$ Or, à chaque valeur de ξ correspond, en vertu des relations (5), un système de valeurs des fonctions C, D, C_1, D_1. La proposition est ainsi démontrée.

L'élément linéaire de la surface étant donné par la relation (11), on voit que, pour toutes les courbes du réseau, on aura

$$ds^2 = d\rho^2.$$

Cette relation entraîne la propriété suivante :

Les arcs des courbes de tout réseau (u, u_1) *sont, à une constante près, égaux au segment focal de la surface* ξ, *qui admet la proposée pour développée moyenne.*

Cette propriété du réseau (u, u_1) tracé sur la développée moyenne de ξ le rapproche des réseaux des deux nappes de la surface des centres correspondant au réseau des lignes de courbure de cette même surface ξ. On sait qu'au réseau de ces lignes correspond, sur chaque nappe de la développée, une famille de courbes dont les arcs, en chaque point, sont égaux à la distance de ces points à la surface ξ. C'est bien la propriété que nous venons de constater pour les courbes du réseau (u, u_1). Si nous désignons par R, R′ les rayons de courbure de ξ, les longueurs respectives des arcs de courbe considérées seront R, R′ pour les nappes de la développée, $\frac{R+R'}{2}$ pour la développée moyenne.

Indiquons encore les propriétés suivantes :

Les paramètres des courbes du réseau (u, u_1) *sont ceux des génératrices rectilignes de la sphère de rayon* 1 *sur laquelle on effectue la représentation sphérique de* ξ.

Les réseaux (u, u_1) *sont les seuls dont les coordonnées et les arcs des courbes qui les composent puissent s'exprimer rationnellement et sans signe de quadrature en fonction des quantités* u, u_1, ξ *et des dérivées de* ξ, *quelles que soient les surfaces proposées.*

Cette propriété résulte de ce fait que les coordonnées de ces courbes sont définies par les systèmes (7) ou (7)′, où D, D_1 représentent les arcs de courbes.

Pour tout autre réseau, les arcs de courbes sont définis par la relation

$$ds = \sqrt{d\rho^2 + \frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2}\,du\,du_1},$$

où l'on a

$$du\, du_1 \neq 0,$$

expression qui ne saurait être rationnelle quelle que soit la fonction ξ (¹).

On voit, par ce que nous venons de dire, quelles relations étroites établit le réseau précédemment défini entre une surface donnée quelconque et un ensemble à deux paramètres de surfaces de translation.

Pour mieux nous rendre compte de ces relations, considérons le système géométrique formé de l'ensemble des surfaces ζ *précédemment défini, des surfaces de translation leurs développées moyennes, des deux familles de développables de chacune des surfaces* ζ. *Des remarques précédentes on déduit aisément que l'enveloppe de ce système à deux paramètres constitue un système de même nature dont chaque élément est l'enveloppe de l'élément correspondant dans le premier système.*

Pour obtenir les équations du système enveloppe, il suffit de faire $\alpha = u$, $\alpha_1 = u_1$ *dans les équations du système enveloppé.*

Les deux plans isotropes de chaque courbe du réseau sont analytiquement séparables.

Les quatre plans isotropes tangents en un même point de la surface, aux deux courbes d'un réseau (u, u_1) *qui s'y rencontrent, forment quatre congruences de droites, divisées en deux couples de rayons incidents et réfléchis. Ces deux couples sont formés de congruences analytiquement séparables. Les congruences de l'un des systèmes sont normales à deux familles de surfaces dont l'une admet la surface dirimante pour développée moyenne.*

Cette dernière propriété, que nous avons exposée dans l'hypothèse des surfaces de translation (²), va faire l'objet d'un paragraphe spécial.

(¹) Nous ne considérons pas le cas où l'on a $\frac{\partial^2 \xi}{\partial u^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial u_1^2} = 0$. Cette équation définit les surfaces de Monge, dont la développée moyenne, sur laquelle est supposé tracé le réseau, se réduit à une courbe.

(²) *Bull. de la Soc. math.*, t. XXI, fasc. 4, p. 247.

Systèmes de rayons et nappes d'enveloppes analytiquement séparables. — Nous avons établi ailleurs [1] une série de formules relatives aux quatre plans isotropes, tangents à deux courbes en leurs points de rencontre. Or, les calculs effectués alors se réduisent à de simples opérations d'algèbre et de dérivation portant sur les quantités définies par les systèmes (7) et (7)′ qui déterminent les deux courbes. Nous supposions alors le système (7) indépendant de u_1 et le système (7)′ indépendant de u. Du reste, les dérivées en u_1 ne figurant pas dans le premier système, et les dérivées en u ne figurant pas dans le second, les quantités u_1 et u y jouent respectivement le rôle de simples paramètres sans influence sur la nature des précédents calculs.

Nous en concluons que toutes les formules établies alors peuvent être transcrites ici sans modification, et qu'elles s'appliquent exactement au réseau (u, u_1) défini par les systèmes (7) et (7)′. En d'autres termes, nous pouvons appliquer au cas d'une surface quelconque toute une série de formules établies pour les seules surfaces de translation. Ici seulement, les fonctions C, D, C_1, D_1 ne seront plus les fonctions d'une seule variable qui figurent dans le système (1), mais plutôt les fonctions à deux variables que définit le système (5).

D'après cela, les quatre équations des plans tangents au point de rencontre de deux courbes du réseau (u, u_1) seront données par le système

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} &(1-u^2)X + i(1+u^2)Y + 2uZ + 2C = 0,\\ &(1-v^2)X + i(1+v^2)Y + 2vZ + 2G = 0,\\ &(1-u_1^2)X - i(1+u_1^2)Y + 2u_1Z + 2C_1 = 0,\\ &(1-v_1^2)X - i(1+v_1^2)Y + 2v_1Z + 2G_1 = 0,\end{aligned}\right.$$

où v et G représentent des fonctions de u, u_1 définies par les relations

$$(13)\qquad \left\{\begin{aligned} &v = u + \frac{2\dfrac{\partial D}{\partial u}}{\dfrac{\partial^3 C}{\partial u^3} + \dfrac{\partial^2 D}{\partial u^2}},\\ &G = C + \frac{v-u}{2}\left[2\frac{\partial C}{\partial u} + (v-u)\left(\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{\partial D}{\partial u}\right)\right].\end{aligned}\right.$$

[1] *Ibid.*, p. 247 et suivantes.

On obtient les relations de v_1, G_1 en affectant d'indices les lettres qui figurent dans les formules précédentes.

Les deux premières équations du système (12) sont celles des deux plans isotropes tangents aux courbes de paramètre u_1, les deux dernières se rapportent aux courbes de paramètre u.

Le système (13), rapproché du système (5) qui définit les fonctions C, D, C_1, D_1, montre que les quatre équations des plans isotropes sont rationnelles en u, u_1, ξ et les dérivées de ξ.

Ainsi donc, les deux plans isotropes, tangents en un même point d'une courbe quelconque du réseau (u, u_1), *sont analytiquement séparables.*

Les quatre congruences formées des intersections de ces plans isotropes sont données par le système

$$\frac{X - x}{u + u_1} = \frac{Y - y}{i(u_1 - u)} = \frac{Z - z}{uu_1 - 1},$$

et par les trois autres systèmes qu'on déduit de celui-ci en remplaçant d'abord u par v, puis u_1 par v_1, et enfin simultanément u, u_1 par v, v_1.

Nous renvoyons, pour les calculs, à l'article précédemment indiqué.

Il nous reste à examiner lesquelles de ces congruences sont normales à des familles de surface. Or, nous aurons, dans les cas des surfaces de translation,

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{(u + u_1)\,dx + i(u_1 - u)\,dz + (uu_1 - 1)\,dz}{1 + uu_1} &= \frac{\partial\rho}{\partial u}\,du + \frac{\partial\rho}{\partial u_1}\,du_1 = d\rho,\\
\frac{(v + u_1)\,dx + i(u_1 - v)\,dy + (v_1 u - 1)\,dz}{1 + u_1 v} &= -\frac{\partial\rho}{\partial u}\,du + \frac{\partial\rho}{\partial u_1}\,du_1,\\
\frac{(u + v_1)\,dx + i(v_1 - u)\,dy + (v_1 u - 1)\,dz}{1 + uv_1} &= \frac{\partial\rho}{\partial u}\,du - \frac{\partial\rho}{\partial u_1}\,du_1,\\
\frac{(v + v_1)\,dx + i(v_1 - v)\,dy + (vv_1 - 1)\,dz}{1 + vv_1} &= -\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}\,du + \frac{\partial\rho}{\partial u_1}\,du_1\right) = -d\rho,
\end{aligned}\right.$$

ρ désigne toujours le segment focal de ξ.

Bien que ces formules soient de même forme que celles relatives aux surfaces de translation, elles ne doivent pas être interprétées de la même manière. Dans le cas des surfaces de translation, ρ est la somme de deux fonctions respectives de u et de u_1. Il suit de là que les quatre seconds membres du système précédent sont autant de différentielles exactes. D'où nous devions conclure que les quatre congruences étaient normales à autant de familles de surfaces.

Dans le cas général, il n'en est plus ainsi. Des formules précédentes, seules la première et la dernière jouissent de la propriété indiquée.

Nous avons donc ici deux systèmes de rayons incidents et réfléchis analytiquement séparables, mais dont l'un seulement se compose de congruences normales à deux familles de surfaces.

D'après ce que nous venons de voir, la détermination : des plans isotropes tangents aux courbes génératrices d'une surface de translation ; des congruences de droites intersections de ces plans, et, par suite, des systèmes de rayons incidents et réfléchis formés avec ces convergences, dépendent de calculs qui s'appliquent sans restriction au cas de surfaces quelconques. Pour les adapter au cas général, il nous a suffi de substituer dans les formules les fonctions C, D, etc., définies par le système (5) aux fonctions d'une seule variable désignées par les mêmes lettres.

C'est seulement quand nous avons voulu considérer les surfaces normales aux congruences de droites que nous avons vu se manifester une différence dans les résultats. Au lieu de quatre familles de surfaces normales aux congruences, nous n'en avons trouvé que deux.

Nous constatons une seconde différence. Dans le cas des surfaces Ξ, les deux nappes de l'enveloppe de la sphère mobile admettent la surface dirimante pour développée moyenne. Dans le cas général, une seule de ces nappes jouit de cette propriété. On en peut conclure que les surfaces Ξ donnent la solution complète du problème suivant :

Déterminer les surfaces telles que la congruence de leurs normales se réfléchisse sur la développée moyenne ponctuelle, normalement à une famille de surfaces admettant au même titre la surface dirimante.

Du reste, comme nous allons le voir, les coordonnées des deux nappes s'expriment rationnellement en fonction de u, u_1, ξ et des dérivées de ξ.

Nous pouvons donc affirmer ici encore que les deux nappes de l'enveloppe de la sphère mobile dont le centre décrit la surface dirimante sont analytiquement séparables.

Série de systèmes de rayons analytiquement séparables. — Nous allons maintenant, comme nous l'avons annoncé au début, prendre une méthode plus directe qui nous fera retrouver, en les complétant, les résultats précédents. Nous montrerons, en particulier, comment des normales à une surface quelconque on peut déduire une série illimitée de systèmes de rayons incidents et réfléchis dont les équations s'expriment toutes rationnellement en fonction des coordonnées u, u_1, ξ relatives à la surface donnée et des dérivées de ξ.

Soit donnée une surface quelconque définie par le système (4), que nous écrirons sous la forme suivante :

$$(15)\qquad \begin{cases} x - iy = u_1 s - p, \\ x + iy = us \quad - q, \\ z = \frac{1}{2}(uu_1 - 1)s - up - u_1 q + \xi). \end{cases}$$

Nous désignons par p, q, r, s, t les dérivées premières et secondes de ξ par rapport aux variables u, u_1.

Calculons les quatre paramètres directeurs des plans isotropes tangents aux courbes de paramètres u, u_1 tracées sur la surface.

Si nous désignons par w et w_1 deux quantités absolument quelconques, nous vérifions les deux identités

$$(16)\qquad \begin{cases} (1 - w^2)\,dx + i(1 + w^2)\,dy + 2w\,dz \\ \quad = \dfrac{w - u}{2}\left[w\left(r - u_1\dfrac{\partial s}{\partial u}\right) - \dfrac{\partial s}{\partial u}\right] du + \dfrac{1 + wu_1}{2}\left(u\dfrac{\partial s}{\partial u_1} - t - w\dfrac{\partial s}{\partial u_1}\right) du_1, \\ (1 - w_1^2)\,dx - i(1 + w_1^2)\,dy + 2w_1\,dz \\ \quad = \dfrac{1 + uw_1}{2}\left(u_1\dfrac{\partial s}{\partial u} - r - w_1\dfrac{\partial s}{\partial u}\right) du + \dfrac{w_1 - u_1}{2}\left[w_1\left(t - u\dfrac{\partial s}{\partial u_1}\right) - \dfrac{\partial s}{\partial u_1}\right] du_1, \end{cases}$$

Supposons maintenant que les différentielles dx, dy, dz se rapportent aux courbes de paramètre u_1 dans la première des relations (16) et aux courbes de paramètre u dans la seconde. Supposons encore que les quantités w, w_1 désignent les paramètres directeurs respectifs des plans isotropes tangents à ces courbes.

On aura alors

$$2\left[(1-w^2)\frac{\partial x}{\partial u}+i(1+w^2)\frac{\partial y}{\partial u}+2w\frac{\partial z}{\partial u}\right]$$
$$=(w-u)\left[w\left(r-u_1\frac{\partial s}{\partial u}\right)-\frac{\partial s}{\partial u}\right]=0.$$
$$2\left[(1-w_1^2)\frac{\partial x}{\partial u_1}-i(1+w_1^2)\frac{\partial y}{\partial u_1}+2w_1\frac{\partial z}{\partial u_1}\right]$$
$$=(w_1-u_1)\left[w_1\left(t-u\frac{\partial s}{\partial u_1}\right)-\frac{\partial s}{\partial u_1}\right]=0.$$

On obtient donc les quatre systèmes

$$\left\{\begin{aligned} w&=u,\\ w_1&=u_1,\end{aligned}\right.\qquad \left\{\begin{aligned} w&=v=\frac{\dfrac{\partial s}{\partial u}}{r-u_1\dfrac{\partial s}{\partial u}},\\ w_1&=v_1=\frac{\dfrac{\partial s}{\partial u_1}}{t-u\dfrac{\partial s}{\partial u_1}},\end{aligned}\right.\qquad \left\{\begin{aligned} w&=u,\\ w_1&=v_1=\frac{\dfrac{\partial s}{\partial u_1}}{t-u\dfrac{\partial s}{\partial u_1}},\end{aligned}\right.\qquad \left\{\begin{aligned} w&=v=\frac{\dfrac{\partial s}{\partial u}}{r-u_1\dfrac{\partial s}{\partial u}},\\ w_1&=u_1,\end{aligned}\right.$$

qui définissent les directions des quatre congruences formées par les intersections des quatre plans isotropes.

Pour que ces congruences soient normales à une famille de surfaces, il faut que l'expression

$$\frac{(w+w_1)\,dx+i(w_1-w)\,dy+(ww_1-1)\,dz}{1+ww_1}$$

soit une différentielle exacte.

Or, on trouve

$$\frac{(w+w_1)\,dx+i(w_1-w)\,dv+(ww_1-1)\,dz}{1+ww_1}$$
$$=\frac{(w-u)\left(u_1\dfrac{\partial s}{\partial u}-r-w_1\dfrac{\partial s}{\partial u}\right)+(1+uw_1)\left[\left(u_1\dfrac{\partial s}{\partial u}-r\right)w+\dfrac{\partial s}{\partial u}\right]}{2(1+ww_1)}\,du$$
$$+\frac{(w_1-u_1)\left(u\dfrac{\partial s}{\partial u}-t-w\dfrac{\partial s}{\partial u_1}\right)+(1+u_1w)\left[\left(u\dfrac{\partial s}{\partial u_1}-t\right)w_1+\dfrac{\partial s}{\partial u_1}\right]}{2(1+ww_1)}\,du_1$$

Pour

$$w=u,\qquad w_1=u_1,$$

il vient

$$\frac{(u+u_1)\,dx+i(u_1-u)\,dy+(uu_1-1)\,dz}{1+uu_1}$$
$$=\frac{(1+uu_1)\dfrac{\partial s}{\partial u}-ur}{2}\,du+\frac{(1+uu_1)\dfrac{\partial s}{\partial u_1}-u_1 t}{2}\,du_1=d\rho,$$

ρ désignant toujours le segment focal de ξ, segment défini par la relation

$$(17)\qquad \rho=\tfrac{1}{2}[(uu_1+1)s-up-u_1q+\xi].$$

Prenons

$$w=v,\qquad w_1=v_1,$$

v, v_1 ayant les valeurs définies plus haut.

Il vient

$$(18)\qquad \frac{(v+v_1)dx+i(v_1-v)dy+(vv_1-1)dz}{1+vv_1}=\frac{u-v}{2v}\,\frac{\partial s}{\partial u}\,du+\frac{u_1-v_1}{2v_1}\,\frac{\partial s}{\partial u_1}=-d\rho.$$

On obtient donc encore ici une différentielle exacte. D'ailleurs, le calcul montre qu'il n'en sera pas ainsi pour les deux autres congruences. Ces résultats sont conformes à ceux que nous avons trouvés, en établissant les formules (14).

Il nous reste à déterminer les équations de la surface normale à la seconde congruence qui forme avec ξ les deux nappes de l'enveloppe de la sphère mobile.

Soient X, Y, Z les coordonnées de cette surface, x, y, z désignant toujours les coordonnées de la surface dirimante définie par le système (15) et ρ le segment focal de ξ; il viendra, en tenant compte de (18),

$$(19)\qquad \begin{cases} X=x+\dfrac{v+v_1}{1+vv_1}\rho,\\[2mm] Y=y+i\,\dfrac{v_1-v}{1+vv_1}\rho,\\[2mm] Z=z+\dfrac{vv_1-1}{1+vv_1}\rho. \end{cases}$$

Cela posé, imaginons le plan tangent à la surface cherchée défini par la relation

$$(20)\qquad (v+v_1)X+i(v_1-v)Y+(vv_1-1)Z+\xi_0=0,$$

ξ_0 désignant une fonction de v, v_1 qu'il s'agit de déterminer.

Portant dans l'équation (20) les valeurs des quantités X, Y, Z, définies par le système (19), et tenant compte des valeurs des quantités x, y, z, ρ, on obtient le système

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} \xi_0 &= -(1+v_1 u)(1+v u_1)s + v(1+v_1 u)p + v_1(1+v u_1)q - v v_1 \xi, \\ v &= \frac{\dfrac{\partial s}{\partial u}}{r - u_1 \dfrac{\partial s}{\partial u}}, \\ v_1 &= \frac{\dfrac{\partial s}{\partial u_1}}{t - u \dfrac{\partial s}{\partial u_1}}, \end{aligned}\right.$$

qui détermine les coordonnées de la seconde nappe en fonction de u, u_1, ξ et des dérivées de ξ. D'ailleurs, ces expressions sont toutes trois rationnelles par rapport à u, u_1, ξ et ses dérivées.

Nous pouvons donc énoncer la proposition suivante :

Une surface quelconque étant donnée, le système formé des rayons normaux à cette surface et des rayons réfléchis par la développée moyenne sont analytiquement séparables. Il en est de même des surfaces normales à ces congruences qui forment les deux nappes de l'enveloppe de la sphère mobile dont le centre décrit la surface dirimante.

Nous avons pris pour point de départ la surface ξ et nous en avons déduit la surface ξ_0 normale aux rayons réfléchis sur la développée moyenne de la première. Cette surface ξ_0 est d'ailleurs l'enveloppe d'un plan défini par l'équation

$$(v + v_1)x + i(v_1 - v)y + (v v_1 - 1)z + \xi_0 = 0.$$

Si nous opérons sur cette équation comme nous avons fait sur celle qui définit ξ, nous en déduirons la développée moyenne de ξ_0, puis la congruence des rayons réfléchis une seconde fois, sur la nouvelle développée et ainsi de suite indéfiniment. D'ailleurs, les éléments de ces congruences de rayons réfléchis, ainsi que de leurs surfaces dirimantes et des surfaces qui leur sont normales seront toutes définies par des expressions rationnelles des coordonnées u, u_1, ξ de la surface primitive et des dérivées de ξ.

Nous allons établir les formules qui permettent de déduire les uns des autres ces divers systèmes de rayons. Nous allons modifier légèrement les notations précédentes. Nous désignerons par u, v les variables relatives à la première surface ξ, par u_1, v_1, u_2, v_2, ..., u_n, v_n celles relatives aux surfaces successives ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n que nous déduirons de la première ξ.

Nous aurons donc, pour coordonnées de la surface ξ_1 normale aux rayons réfléchis sur la développée moyenne de ξ,

$$(22)\quad\left\{\begin{aligned} \xi_1 &= -(1+v_1 u)(1+v u_1)s + u_1(1+u v_1)p + v_1(1+v u_1)q - u_1 v_1 \xi,\\ u_1 &= \frac{\dfrac{\partial s}{\partial u}}{r - v\dfrac{\partial s}{\partial u}},\\ v_1 &= \frac{\dfrac{\partial s}{\partial v}}{t - u\dfrac{\partial s}{\partial v}}. \end{aligned}\right.$$

D'où

$$du_1 = r\left(\frac{u_1}{\dfrac{\partial s}{\partial u}}\right)^2\left(r\frac{\partial^2 \log r}{\partial u\,\partial v}du + \frac{\partial^2 s}{\partial u\,\partial v}dv\right),$$

$$dv_1 = t\left(\frac{v_1}{\dfrac{\partial s}{\partial v}}\right)^2\left(\frac{\partial^2 s}{\partial u\,\partial v}du + t\frac{\partial^2 \log t}{\partial u\,\partial v}\right).$$

Si l'on considère u_1, v_1 comme des fonctions de u, v déterminées par les relations précédentes, la première des équations du système (22) définit la surface qui, associée à ξ, donne les deux nappes de l'enveloppe de la sphère mobile dont le centre décrit la développée moyenne de la proposée. Si, au contraire, nous considérons u, v comme des paramètres indépendants de u_1, v_1, nous avons l'équation de la sphère mobile elle-même.

Calculons les dérivées premières et secondes de ξ_1. Mais, auparavant, remarquons que, en vertu du système (22),

$$(1+v_1 u)\left(r - v\frac{\partial s}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial v_1} = (1+v u_1)\left(t - u\frac{\partial s}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial u_1} = \frac{rt\dfrac{\partial^2 s}{\partial u\,\partial v}}{\dfrac{\partial(u_1 v_1)}{\partial(uv}}.$$

Cette relation établie, nous trouvons

$$p_1 = (1 + uv_1)(p - vs) + v_1(vq - \xi),$$
$$q_1 = (1 + vu_1)(q - us) + u_1(up - \xi).$$
$$r_1 = (1 + v_1 u)\left(r - v\frac{\partial s}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial u_1} = \frac{1 + v_1 u}{u_1}\frac{\partial s}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial u_1},$$
$$t_1 = (1 + u_1 v)\left(t - u\frac{\partial s}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial v_1} = \frac{1 + vu_1}{v_1}\frac{\partial s}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial v_1},$$
$$s_1 = -uvs + up + vq - \xi + \frac{rt\dfrac{\partial^2 s}{\partial u\,\partial v}}{\dfrac{\partial(u_1 v_1)}{\partial(uv)}}.$$

Désignons par x_1, y_1, z_1 les coordonnées de la développée moyenne de ξ_1, par ρ_1 le segment focal de cette même surface.

Posons encore

$$\lambda = \frac{rt\dfrac{\partial^2 s}{\partial u\,\partial v}}{\dfrac{\partial(u_1 v_1)}{\partial(uv)}}.$$

Il viendra

$$(23)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 - iy_1 &= v_1 s_1 - p_1 = vs - p + v\lambda,\\ x_1 + iy_1 &= u_1 s_1 - q_1 = us - q + u\lambda,\\ z_1 &= \frac{1}{2}\left[(u_1 v_1 - 1)s_1 - u_1 p_1 - v_1 q_1 + \xi_1\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[(uv - 1)s - up - vq + \xi\right] + \frac{uv - 1}{2}\lambda,\\ \rho_1 &= \frac{1}{2}\left[(u_1 v_1 + 1)s_1 - u_1 p_1 - v_1 q_1 + \xi_1\right]\\ &= -\frac{1}{2}\left[(uv + 1)s - up - vq + \xi\right] + \frac{uv + 1}{2}\lambda. \end{aligned}\right.$$

La développée moyenne de ξ_1, nouvelle surface dirimante des rayons une première fois réfléchis par la développée moyenne de ξ, étant ainsi déterminée, il nous reste à déterminer les paramètres directeurs u_2, v_2 des rayons réfléchis une seconde fois. Dans ce but, nous considérerons les plans isotropes tangents aux courbes de paramètres u_1, v_1 tracées sur la développée moyenne de ξ_1. Nous aurons les relations

$$(1 - u_2^2)\,dx_1 + i(1 + u_2^2)\,dy_1 + 2u_2\,dz_1 = 0,$$
$$(1 - v_2^2)\,dx_1 - i(1 + v_2^2)\,dy_1 + 2v_2\,dz_1 = 0.$$

Nous trouverions quatre systèmes de valeurs, comme précédemment, et nous serions amenés à poursuivre les calculs de la manière indiquée plus haut.

Nous pouvons donc résumer les résultats précédents dans la proposition suivante :

Une surface quelconque étant définie au moyen des coordonnées u, v, ξ d'O. Bonnet, on pourra exprimer, au moyen de fonctions rationnelles de u, v, ξ et des dérivées de ξ, la congruence des normales réfléchies sur la développée moyenne; la surface ξ_1 normale aux rayons réfléchis et formant avec ξ les deux nappes de l'enveloppe d'une sphère dont le centre décrit la surface dirimante; la congruence des rayons réfléchis sur la développée moyenne de ξ_1; la surface ξ_2 normale à ces rayons, et ainsi de suite indéfiniment.

Surfaces particulières. — Dans le cas général, la suite des congruences réfléchies sur les développées moyennes successives est illimitée. Nous nous proposons de déterminer les surfaces spéciales pour lesquelles il n'en est pas ainsi.

Reprenons les formules du système (23). Si nous les considérons comme définissant la développée moyenne et le segment focal de la surface ξ_{n+1}, nous aurons le système

$$x_{n+1} - iy_{n+1} = x_n - iy_n + \lambda_n v_n = x - iy + \lambda v + \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n,$$

$$x_{n+1} + iy_{n+1} = x_n + iy_n + \lambda_n u_n = x + iy + \lambda u + \lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_n u_n.$$

$$z_{n+1} = \quad z_n + \lambda_n \frac{u_n v_n - 1}{2} = + z + \lambda \frac{uv - 1}{2} + \ldots + \lambda_n \frac{u_n v_n - 1}{2},$$

$$\rho_{n+1} = - \rho_n + \lambda_n \frac{u_n v_n + 1}{2} = \pm \rho + \lambda \frac{uv + 1}{2} + \ldots + \lambda_n \frac{u_n v_n + 1}{2},$$

$$\lambda_n = \frac{r_n t_n \dfrac{\partial^2 s_n}{\partial u_n \, \partial v_n}}{\dfrac{\partial(u_{n+1}, v_{n+1})}{\partial(u_n, v_n)}}.$$

Or, dans l'hypothèse actuelle, on devra avoir

$$x_{n+1} = x, \qquad y_{n+1} = y, \qquad z_{n+1} = z,$$

relations qui ne seront vérifiées qu'à la condition d'avoir

$$\lambda_n = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{\partial^2 s_n}{\partial u_n\, \partial v_n} = 0.$$

Nous retrouvons les surfaces Ξ qui admettent pour développée moyenne les surfaces de translation.

Ainsi donc :

La suite des congruences de rayons réfléchis déduite de la congruence des normales à une surface donnée rencontrant la développée moyenne aura une limite toutes les fois qu'on sera amené à trouver une surface de translation par l'une des surfaces dirimantes.

Nous plaçant à un point de vue un peu différent, nous pouvons encore formuler cette proposition :

Les surfaces de translation, à l'exclusion de toutes les autres, jouent le rôle de surfaces dirimantes à l'égard d'un système de rayons incidents et réfléchis respectivement normaux à deux familles de surfaces, qui admettent celles-ci pour développées moyennes.

Cherchons une seconde catégorie de surfaces : celles dont les deux familles de développables se conservent après réflexion sur la développée moyenne.

On a pour équation des rayons de courbure de la surface proposée

$$r\, du^2 - t\, dv^2 = 0. \tag{24}$$

Après réflexion, les rayons seront normaux à la surface ξ_1 dont l'équation des lignes de courbure pourra s'écrire

$$r_1\, du_1^2 - t_1\, dv_1^2 = 0.$$

Or cette équation, transformée au moyen des formules du système (22), devient

$$r \frac{\partial^2 \log r}{\partial u\, \partial v}\, du^2 - t \frac{\partial^2 \log t}{\partial u\, \partial v}\, dv^2 = 0.$$

Rapprochant cette équation de l'équation (24), on voit qu'il faut avoir

$$\frac{\partial^2 \log\left(\frac{r}{t}\right)}{\partial u\, \partial v} = 0.$$

Si l'on désigne par U, V deux fonctions arbitraires, l'une de u, l'autre de v, l'équation précédente pourra s'écrire

$$Vr = Ut, \tag{25}$$

équation du second degré qui se ramène à l'équation à invariants égaux de Laplace.

L'équation (25) *définit donc les surfaces dont les deux familles de développables se conservent après réflexion sur la développée moyenne.*

APPLICATION.

Nous allons prendre pour point de départ la surface définie par l'équation

$$\xi = 2FF_1,$$

où F, F_1 désignent deux fonctions respectives de u et de u_1, et en déduire, d'après la méthode exposée, les divers éléments géométriques qui constituent le système d'enveloppes et d'enveloppées précédemment défini.

Équations du système. — Formons d'abord les fonctions $C(u, u_1)$, $D(u, u_1)$, ... définies par les systèmes (5) et (13).

Il vient

$$\left\{\begin{aligned} & C(u, u_1) = [u(u_1 F'_1 - F_1) + F'_1]\, F, \\ & D(u, u_1) = -(uF' - F)(u_1 F'_1 - F_1) - F'F'_1. \\ & v = \frac{F'_1}{F_1 - u_1 F'_1}, \\ & G = C + \frac{v - u}{2}\left[2\frac{\partial C}{\partial u} + (v - u)\left(\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{\partial D}{\partial u}\right)\right] = 0. \end{aligned}\right. \tag{26}$$

Les autres formules se déduisent des précédentes en affectant d'un indice les lettres qui y figurent.

Désignons par A, A', A_1, A'_1 ce que deviennent les fonctions F,

F', F_1, F'_1 quand on y fait

$$u = \alpha, \qquad u_1 = \alpha_1.$$

Il vient

$$(27) \quad \left\{ \begin{aligned} & C(u, \alpha_1) = [u(\alpha_1 A'_1 - A_1) + A'_1]F, \\ & D(u, \alpha_1) = -(uF' - F)(\alpha_1 A'_1 - A_1) - A'_1 F', \\ & \quad v = \frac{A'_1}{A_1 - \alpha_1 A'_1} = \text{const.}, \\ & \quad G = 0. \end{aligned} \right.$$

On trouvera les autres relations par le procédé indiqué tout à l'heure.

Ces dernières formules montrent que, dans le cas particulier qui nous occupe, les paramètres directeurs relatifs aux rayons réfléchis se réduisent à des constantes.

D'où nous concluons que la congruence des rayons réfléchis se compose de droites parallèles, et la seconde nappe de l'enveloppe de la sphère, dont le centre décrit la surface dirimante, a un plan perpendiculaire à ces droites.

Pour obtenir les coordonnées de la surface dirimante, il nous suffirait de porter les expressions trouvées pour les fonctions $C(u, \alpha_1)$, ... et leurs dérivées dans les équations des systèmes (7) et (7)'. Toutefois, nous obtiendrons des formules plus simples en effectuant un changement de variables.

Nous poserons donc

$$F = \frac{1}{\varphi_1 - v_1\varphi'_1}, \qquad F_1 = \frac{1}{\varphi - v\varphi'},$$
$$u = \frac{\varphi'_1}{\varphi_1 - v_1\varphi'_1}, \qquad u = \frac{\varphi'}{\varphi - v\varphi'},$$

φ, φ_1 désignant deux fonctions quelconques : celle-là de v, celle-ci de v_1, nouvelles variables substituées aux variables u, u_1 ; φ', φ'_1 désignant les dérivées de ces fonctions.

Des deux relations précédentes on déduit le système

$$F = \frac{1}{\varphi_1 - v_1\varphi'_1}, \qquad \varphi_1 = \frac{1}{F - uF'},$$
$$u = \frac{\varphi'_1}{\varphi_1 - v_1\varphi'_1}, \qquad v_1 = \frac{F'}{F - uF'},$$
$$F' = \frac{v_1}{\varphi_1}, \qquad \varphi'_1 = \frac{u}{F},$$
$$uF' - F = -\frac{1}{\varphi_1}, \qquad v_1\varphi'_1 - \varphi_1 = -\frac{1}{F},$$

Les autres formules se déduisent des précédentes par la permutation des indices.

Cela posé, désignons par β, β_1 ce que deviennent les variables v, v_1 pour $u = \alpha$, $u_1 = \alpha_1$. Le système précédent nous permettra de calculer $C(u, \alpha_1)$, ... en fonction des nouvelles variables et, par suite, de calculer les coordonnées des surfaces de translation à deux paramètres, développées moyennes des surfaces Ξ, ainsi que l'équation de ces surfaces.

Désignons par x, y, z les coordonnées des surfaces de translation, par ρ le segment des surfaces Ξ.

Il vient

$$(28)\quad \begin{cases} x - iy = -\dfrac{\beta_1}{\varphi_1(\beta_1)\varphi(v)} - \dfrac{v}{\varphi(\beta)\varphi_1(v_1)}, \\ x + iy = -\dfrac{v}{\varphi_1(\beta_1)\varphi(v)} - \dfrac{\beta}{\varphi(\beta)\varphi_1(v_1)}, \\ z \quad = \dfrac{1 - \beta_1 v}{2\varphi_1(\beta_1)\varphi(v)} + \dfrac{1 - \beta v_1}{2\varphi(\beta)\varphi_1}, \\ \rho \quad = -\dfrac{1 + \beta_1 v}{2\varphi_1(\beta_1)\varphi(v)} - \dfrac{1 + \beta v_1}{2\varphi(\beta)\varphi_1(v_1)}. \end{cases}$$

Cherchons maintenant l'enveloppe de ces dernières surfaces. Nous avons dit qu'on obtient les coordonnées de cette enveloppe et le segment focal correspondant, en faisant $\alpha = u$, $\alpha_1 = u_1$ (ce qui revient ici à faire $\beta = v$, $\beta_1 = v_1$) dans les formules correspondantes de l'enveloppée. Faisant donc $\beta = v$, $\beta_1 = v_1$ dans le système précédent, il viendra

$$(29)\quad \begin{cases} x = -\dfrac{v + v_1}{\varphi(v)\varphi_1(v_1)}, \\ y = -i\dfrac{v_1 - v}{\varphi(v)\varphi_1(v_1)}, \\ z = -\dfrac{vv_1 - 1}{\varphi(v)\varphi_1(v_1)}, \\ \rho = \dfrac{vv_1 + 1}{\varphi(v)\varphi_1(v_1)}. \end{cases}$$

Les développées moyennes enveloppes et enveloppées étant ainsi déterminées, cherchons les surfaces enveloppes et enveloppées qui admettent ces développées moyennes.

Pour obtenir les surfaces enveloppées qui sont ici des surfaces Ξ, il suffit de porter les expressions $C(u, \alpha_1)$, ... définies par le système (27) dans l'équation (9).

Il vient

$$\xi = [A_1 + (u_1 - \alpha_1)A'_1]F + [A + (u - \alpha)A']F_1.$$

Nous reconnaissons les surfaces Ξ définies par l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^4 \zeta}{\partial u^2 \, \partial u_1^2} = 0.$$

Pour obtenir l'enveloppe de ces surfaces, nous devons faire $\alpha = u$, $\alpha_1 = u_1$ dans l'équation de ζ. Nous trouvons immédiatement

$$\zeta = 2FF_1,$$

qui est notre équation du point de départ.

Les lignes de courbure de ζ sont données par l'équation

$$[A_1 + (u_1 - \alpha_1)A'_1]F'' du^2 = [A + (u - \alpha)A']F''_1 \, du_1^2.$$

Pour obtenir les lignes de courbure de ξ enveloppes des lignes de courbure de ζ, nous devons faire encore ici $\alpha = u$, $\alpha_1 = u_1$ et nous trouvons

$$F_1 F'' du^2 = FF''_1 \, du_1^2.$$

Nous venons de voir comment, la surface $\xi = 2FF_1$ étant donnée, on en déduit les divers éléments des systèmes géométriques que nous avons étudiés. Il nous reste à étudier séparément les surfaces qui en font partie.

Surfaces de translation. — Désignons comme précédemment par x, y, z les coordonnées de ces surfaces, coordonnées définies par le système (28); par ρ le segment focal correspondant; par X, Y, Z; X_1, Y_1, Z_1 les coordonnées respectives des courbes, lieux des extrémités du segment dont le point milieu décrit la surface.

Du système (28) on tire les relations

$$\begin{aligned}(1 - \beta_1^2)X - i(1 + \beta_1^2)Y + 2\beta_1 Z &= 0,\\ (1 - \beta^2)X + i(1 + \beta^2)Y + 2\beta Z &= 0.\end{aligned}$$

Nous déduisons de ces équations que les courbes, lieux des extrémités du segment mobile, sont deux courbes quelconques, tracées dans deux plans isotropes.

Nous avons montré [1] que ces surfaces étaient toutes définies en coordonnées cartésiennes par l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Les coordonnées des surfaces de translation définies par (28) vérifient les relations

$$(1 - \beta_1^2)x - i(1 + \beta_1^2)y + 2\beta_1 z + \frac{(1 + \beta\beta_1)(v_1 - \beta_1)}{\varphi(\beta)\varphi_1(v_1)} = 0,$$
$$(1 - \beta^2)x + i(1 + \beta^2)y + 2\beta z + \frac{(1 + \beta\beta_1)(v - \beta)}{\varphi_1(\beta_1)\varphi(v)} = 0.$$

Si nous remarquons que v, v_1 sont des fonctions respectives de u_1 et de u, nous nous rendons compte aisément que les équations précédentes définissent deux familles de plans isotropes coupant les surfaces de translation, suivant le réseau (u, u_1) des courbes génératrices.

Nous en concluons que le réseau (u, u_1), formé par les courbes génératrices des surfaces de translation considérées, se compose de courbes planes, intersections de la surface par deux familles de plans isotropes parallèles.

Si nous considérons maintenant le système de rayons incidents et réfléchis qui admettent ces surfaces de translation pour surfaces dirimantes, nous voyons que l'une des congruences est formée de rayons parallèles.

Pour s'en assurer, il suffit de se rappeler que les quantités v, v_1 [2] sont ici des constantes.

Considérons le système des deux rayons incidents et réfléchis qui se rencontrent en un point de la surface dirimante. Ces rayons, nous l'avons vu, sont les intersections de plans isotropes tangents en un même point, à deux courbes du réseau (u, u_1). Or l'un de ces rayons sera déterminé par l'intersection des deux plans isotropes qui contiennent les deux courbes passant par le point d'incidence. L'autre rayon sera formé par l'intersection de deux

[1] Thèse de doctorat.

[2] Nous parlons ici des quantités v, v_1 définies par le système (27) et non de celles que nous avons désignées ailleurs par les mêmes lettres.

autres plans isotropes tangents aux deux courbes sans les contenir.

On déduit de là un mode de construction des rayons non parallèles :

Soit donnée une surface de translation définie par le système (28) *et, sur cette surface, un point arbitraire. Pour obtenir la direction des rayons incidents et réfléchis passant par ce point, on pourra procéder comme il suit. On déterminera les plans des deux courbes génératrices passant par ce point. L'intersection de ces plans donnera le rayon incident. En déterminant les deux autres plans isotropes tangents aux mêmes courbes, on obtiendra le rayon réfléchi qui sera formé par leur intersection.*

Nous venons d'étudier la nature d'une surface de translation définie par le système (28). Il nous reste à caractériser la variation de ces surfaces quand varient les paramètres α, α_1. Il suffit de répéter ici ce que nous avons dit du cas général en remarquant que les deux familles de plans isotropes dont nous parlions alors se composent actuellement de plans parallèles contenant les courbes correspondantes. Nous pouvons donc formuler la proposition suivante :

Soient données deux courbes variables assujetties à se rencontrer constamment, tandis que les plans isotropes qui les contiennent se déplacent parallèlement à eux-mêmes, le point de rencontre de ces courbes décrira l'enveloppe des surfaces de translation, lieux du milieu du segment qui les relie.

Ces surfaces de translation seront celles que définit le système (28).

Enveloppes des surfaces de translation. — Nous avons vu que les coordonnées de ces surfaces sont définies par le système (29), qu'on obtient en faisant $u = \alpha$, $u_1 = \alpha_1$ dans le système (28).

On tire du système (29)

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{30}$$

Nous voyons par cette équation que le segment focal de la surface ξ, dont la surface de coordonnées x, y, z est la développée moyenne, est égal au rayon vecteur de celle-ci.

D'où nous tirons cette conclusion :

Si l'on assujettit le centre d'une sphère passant par un point fixe à décrire la surface de translation définie par le système (29), *l'enveloppe de cette sphère admettra la surface lieu de son centre pour développée moyenne.*

La relation (30) caractérise l'ensemble des surfaces, pour lesquelles le système (29) est vérifié.

En effet, ξ désignant une surface quelconque, ρ son segment focal, x, y, z les coordonnées de la développée moyenne, on a l'identité

$$\xi \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \, \partial u_1} - \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial u_1} = \rho^2 - x^2 - y^2 - z^2.$$

La relation (30) est donc équivalente à l'équation

$$\xi \frac{\partial^2 \xi}{\partial u \, \partial u_1} - \frac{\partial \xi}{\partial u} \frac{\partial \xi}{\partial u_1} = 0,$$

dont la fonction

$$\xi = 2 F F_1$$

donne la solution générale.

Du système (29) on déduit les relations

$$\begin{aligned} (1 - v^2)x + i(1 + v^2)y + 2vz &= 0, \\ (1 - v_1^2)x + i(1 + v_1^2)y + 2v_1 z &= 0. \end{aligned}$$

Si l'on se rappelle que v, v_1 sont deux fonctions respectives de u_1 et de u, on en conclut que les deux familles de plans isotropes définies par le système précédent découpent la surface définie par le système (29) suivant un réseau (u, u_1).

Ainsi donc le réseau (u, u_1) *relatif à la surface considérée est formé de l'ensemble des courbes planes tracées dans les deux familles de plans isotropes passant par un point fixe.*

Considérons maintenant le système des rayons incidents et réfléchis relatifs à la surface proposée.

Ces congruences de rayons étant respectivement normales aux deux nappes de la sphère passant par un point fixe, l'une de ces congruences passera par ce point.

Ainsi donc la congruence des normales à la surface $\xi = 2FF_1$ *se réfléchit suivant des directions convergentes.*

D'après ce que nous venons de dire, on voit comment, d'un système à deux paramètres de rayons réfléchis dans des directions parallèles, on déduit immédiatement un système de rayons réfléchis dans des directions convergentes. Les divers éléments géométriques du premier système ont pour enveloppes respectives les éléments correspondants du second, et l'on obtiendra les équations de ceux ci en égalant les paramètres arbitraires aux variables dans les équations de ceux-là.

Pour

$$\frac{1}{\varphi} = \frac{1}{\varphi_1} = 0,$$

on trouve

$$x = y = z = \rho.$$

Si l'on remarque que le centre de convergence des rayons n'est autre que l'origine, on sera amené à conclure que les normales de la surface ξ convergent après réflexion sur la développée moyenne en un point commun à ξ et à la surface dirimante.