BULLETIN DE LA S. M. F.

J. CLAIRIN

Remarque sur l'intégration de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 32 (1904), p. 149-152
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__149_0>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

REMARQUE SUR L'INTÉGRATION DE CERTAINES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU SECOND ORDRE;

Par M. J. Clairin.

Pour intégrer par la méthode de M. Darboux une équation aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes, il faut chercher si les deux systèmes de caractéristiques (C) et (Γ), que nous supposons distincts, possèdent des invariants. M. Goursat a étudié [1] les équations qui définissent ces invariants et il a obtenu des résultats importants; ceux de ces résultats qui sont relatifs aux invariants du second ordre peuvent être énoncés ainsi :

S'il existe un invariant du premier ordre pour le système (C) *de caractéristiques, il y a au plus un invariant du second ordre pour le même système;*

Si l'équation donnée est une équation de Monge-Ampère, il y a au plus un invariant du second ordre pour chaque système de caractéristiques.

Dire qu'il n'y a qu'un invariant du second ordre signifie qu'il est toujours possible d'exprimer tous les invariants de cet ordre en fonction de l'un d'entre eux et des invariants du premier ordre.

Ces deux théorèmes sont des cas particuliers de la proposition suivante :

Si le système (C) *se compose de caractéristiques du premier ordre, ce système possède au plus un invariant du second ordre.*

Soit

$$r + f(x, y, z, p, q, s, t) = 0 \tag{1}$$

une équation de l'espèce indiquée; soient en outre m et μ les

[1] *Leçons sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. II, Ch. VII. Les notations dont je me sers sont les mêmes que celles qui ont été employées par M. Goursat dans cet Ouvrage.

racines de l'équation caractéristique

$$\lambda^2 - \frac{\partial f}{\partial s}\lambda + \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

la racine m correspondant au système (C) de caractéristiques, c'est-à-dire au système composé de caractéristiques du premier ordre. L'équation (1) peut être regardée comme le résultat de l'élimination de m entre les équations

$$(2) \qquad \begin{cases} r + ms + g(x, y, z, p, q, m) = 0, \\ s + mt + k(x, y, z, p, q, m) = 0; \end{cases}$$

autrement dit l'on a

$$f(x, y, z, p, q, s, t) = ms + g(x, y, z, p, q, m),$$

m étant une fonction de x, y, z, p, q, s, t définie par la seconde équation (2).

Pour trouver tous les invariants du second ordre du système (C), il faut intégrer les équations

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \mu \frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0,$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial x} + m\frac{\partial \varphi}{\partial y} + (p + mq)\frac{\partial \varphi}{\partial z} + (ms - f)\frac{\partial \varphi}{\partial p} \\ &\quad + (s + mt)\frac{\partial \varphi}{\partial q} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + s\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0; \end{aligned}$$

en remplaçant $ms - f$ et $s + mt$ par leurs valeurs, cette dernière équation devient

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \varphi}{\partial x} + m\frac{\partial \varphi}{\partial y} + (p + mq)\frac{\partial \varphi}{\partial z} - g(x, y, z, p, q, m)\frac{\partial \varphi}{\partial p} \\ &\quad - k(x, y, z, p, q, m)\frac{\partial \varphi}{\partial q} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} + q\frac{\partial f}{\partial z} + s\frac{\partial f}{\partial p} + t\frac{\partial f}{\partial q}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0. \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe une intégrale $u(x, y, z, p, q, s, t)$ et prenons comme variables x, y, z, p, q, u, t; une fonction φ de x, y, z, p, q, s, t devient une fonction Φ des nouvelles variables; on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x},$$

et l'on peut substituer dans cette égalité y, z, p, q, t à x, tandis que l'on a

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial s}.$$

En remplaçant par leurs expressions les dérivées de φ dans les équations qui définissent les invariants et en remarquant que u satisfait à ces équations il vient

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} + m\frac{\partial \Phi}{\partial y} + (p + mq)\frac{\partial \Phi}{\partial z} - g(x, y, z, p, q, m)\frac{\partial \Phi}{\partial p} - k(x, y, z, p, q, m)\frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0;$$

t ne figure dans les coefficients que par l'intermédiaire de m; d'ailleurs, m et u étant deux fonctions indépendantes de s et t, t figure effectivement dans ces coefficients.

Toute intégrale de ce système satisfait également aux équations

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} + q\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{\partial g}{\partial m}\frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial k}{\partial m}\frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial m^2}\frac{\partial \Phi}{\partial p} + \frac{\partial^2 k}{\partial m^2}\frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0.$$

D'après cette dernière équation, si la fonction Φ existe on devra avoir entre g et k une relation de la forme

$$\alpha g + \beta k + \gamma + \delta m = 0, \tag{3}$$

α, β, γ, δ désignant des fonctions de x, y, z, p, q.

Admettons qu'il en soit ainsi, Φ est une fonction de x, y, z, p, q, u définie par les trois équations

$$\beta\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} + p\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) + \gamma\frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0,$$

$$\beta\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} + q\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right) + \delta\frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0,$$

$$\beta\frac{\partial \Phi}{\partial p} - \alpha\frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0.$$

Une intégrale de ce système d'équations est une intégrale du système suivant d'équations aux différentielles totales

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$
$$\alpha\,dp + \beta\,dq - \gamma\,dx - \delta\,dy = 0;$$

or une intégrale de ce système est une intégrale des équations

$$dz - p\,dx - q\,dy = 0,$$
$$dp + g\left(x, y, z, p, q, \frac{dy}{dx}\right)dx = 0,$$
$$dq + k\left(x, y, z, p, q, \frac{dy}{dx}\right)dx = 0,$$

qui définissent le système (C) de caractéristiques du premier ordre, comme on le vérifie immédiatement en multipliant les deux membres des deux dernières équations respectivement par α et β et en ajoutant, à condition de tenir compte de (3).

Le théorème est donc démontré : Φ ne peut être qu'une fonction de u et des invariants du premier ordre du système (C).

Nous n'avons pas restreint la généralité en supposant l'équation (1) remplacée par le système (2) : il n'y aurait, si la chose était impossible, qu'à effectuer au préalable une transformation de contact convenable pour substituer à l'équation donnée une équation équivalente à un système tel que (2).