

# BULLETIN DE LA S. M. F.

J. A. DE SÉGUIER

## Sur certains groupes de Mathieu

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 32 (1904), p. 116-124

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1904\\_\\_32\\_\\_116\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__116_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1904, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR CERTAINS GROUPES DE MATHIEU ;**

Par M. DE SÉGUIER.

1. On trouvera dans le *Journal de M. Jordan* (1902, p. 159) la démonstration du théorème suivant :

*Les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence*

d'un groupe  $G_t$   $t + 1$  fois transitif entre les symboles  $1, \dots, n, \sigma_1, \dots, \sigma_t$ , où  $A$  est le groupe fixant  $\sigma_1, \dots, \sigma_t$ ,  $F$  le groupe fixant  $1 = \sigma_0, \sigma_1, \dots, \sigma_t$ , sont qu'il existe des substitutions d'ordre 2,  $s_h = (\sigma_0) \dots (\sigma_{h-2})(\sigma_{h-1}, \sigma_h)(\sigma_{h+1}) \dots (\sigma_t) \dots$ , telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} s_h^2 = 1, \quad s_h f s_h = f_h, \quad s_1 r s_1 = a' s_1 a', \\ s_l a s_l = a_l, \quad (s_i s_{i+1})^2 = f_{i1}, \quad (s_j s_{j+k})^2 = f_{jk} \\ (h = 1, \dots, t; i = 1, \dots, t-1; j = 1, \dots, t-2; k = 2, \dots, t-j; \\ l = 2, \dots, t; f \text{ parcourt les g\u00e9n\u00e9rateurs de } F, a \text{ ceux de } A \text{ qui sont} \\ \text{hors de } F; r \text{ un syst\u00e8me de restes } \not\equiv 1 \text{ de } A \text{ mod } F; a', a'', a_l \text{ sont} \\ \text{dans } A \text{ hors de } F; f_h, f_{i1}, f_{jk} \text{ dans } F), \end{array} \right.$$

et ces \u00e9quations jointes \u00e0 celles de  $A$  d\u00e9finissent  $G_t$ .

2. Prenons pour  $A$  le groupe  $\{(z, iz), (z, 1 - z)\}$ ,  $z$  parcourant un corps de Galois  $C_\pi = C$  d'ordre  $p^m = \pi$  ( $p$  premier,  $\pi > 2$ ) dont  $i$  est racine primitive. Posons  $(z, iz) = a$ ,  $(z, 1 - z) = b$  et cherchons \u00e0 adjoindre \u00e0  $A$  une  $s_2$  (<sup>1</sup>)  $c = (0\infty) \dots$  telle que  $A$  soit le diviseur fixant un symbole dans  $\{A, c\} = G$ . On devra avoir  $cac = a^\alpha$ ,  $\alpha^2 = 1$ . Si  $\alpha = 1$ , comme  $a = (i^0, i^1, i^2, \dots)$ , il faut que  $c = (0\infty)(i^2, i^{x+2\rho})$  avec  $i^{x+2\rho} = i^x$ ,  $2\rho = \pi - 1$ , ou  $c = (0\infty)a^{\frac{\pi-1}{2}}$ , et  $G$  contiendrait  $(0\infty)$ , ce qui ne se peut, la classe \u00e9tant  $\pi - 1$ . Soit donc  $\alpha = -1$ . Alors  $c = (0\infty)(i^x, i^{p-x})$  est de la forme  $(r z^{-1})$  et la condition  $(cb)^3 = 1$  donne  $r = 1$ . Donc  $G$  co\u00efncide avec le  $g_{\pi(\pi^2-1)} \mathcal{L} = \sum \left( \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta} \right)$ , les param\u00e8tres  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  parcourant  $C(\alpha\delta - \beta\gamma \not\equiv 0)$ ,  $z$  parcourant  $C$  et  $\infty$  (<sup>2</sup>). On voit imm\u00e9diatement par le m\u00eame proc\u00e9d\u00e9 que  $\mathcal{L}$  ne peut \u00eatre le diviseur fixant un symbole dans un  $g^{\pi+2}$ . Les \u00e9quations de  $\mathcal{L}$  s'obtiennent en adjoignant \u00e0 celles de  $\{a, b\}$   $c^2 = (cb)^3 = (ca)^2 = 1$ .

Le diviseur fixant un symbole dans un  $g_{p^2(p^2-1)}^{p+1}$  transitif \u00e9tant m\u00e9tacyclique, il r\u00e9sulte de ce qui pr\u00e9c\u00e8de que le seul  $g_{p^2(p^2-1)}^{p+1}$  transitif est  $\mathcal{L}(2, p)$ .

3. Prenons maintenant pour  $A$  le  $g_{\frac{\pi(\pi-1)}{2}}(\pi \text{ impair})$  engendr\u00e9

(<sup>1</sup>) Je me servirai des m\u00eames notations que dans le M\u00e9moire cit\u00e9.

(<sup>2</sup>) Cf. MILLER, *Comptes rendus de l'Acad\u00e9mie des Sciences*, t. CXXXVI. 1903, p. 294.

par  $a = (i^2 z) = (i^0, i^2, \dots, i^{\pi-3}) (i, i^3, \dots, i^{\pi-2})$  et le  $g_\pi^\pi$  abélien principal B formé des substitutions  $b_\beta = (z + \beta)$ ,  $\beta$  parcourant C (je poserai  $b_1 = b$ ; si  $\pi = p$ ,  $b_\beta = b^\beta$ ). A est défini (1) par  $a^{\frac{\pi-1}{2}} = b_h^\rho = 1$ ,  $b_h b_k = b_k b_h$ ,  $a^{-1} b_h a = b_{i^2 h}$ ,  $h, k$  parcourant 1,  $i, \dots, i^{m-1}$  (si  $i^p = \sum_0^{m-1} \alpha_{\rho s} i^s$ ,  $b_{i^2} = \prod_0^{m-1} b_{i^{\alpha s}}$ ). Cherchons à adjoindre à A une  $s_2$   $c = (0\infty) \dots$  telle que, dans  $\mathcal{G} = \{A, c\}$ , A soit le groupe fixant  $\infty$ .

Par les mêmes raisonnements que dans le Mémoire cité (2) où l'on changera en indices les exposants de  $b$ , on trouve que  $c = (r z^{-1})$ ,  $r$  étant un carré ou un non-carré suivant que  $\pi \equiv 1$  ou  $\equiv 3 \pmod{4}$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{G} = \mathcal{V}(2, \pi)$ , *sauf que, si  $\pi = 7$ ,  $\mathcal{G}$  peut encore être le  $g_{168}^8$  composé; et l'on obtient ainsi les équations de  $\mathcal{V}$ .*

$\mathcal{V}(2, \pi)$  ne peut être le diviseur fixant un symbole  $\sigma$  dans un  $g^{\pi+2}$ . Soit en effet  $d$  la  $s_2$  à adjoindre à  $\mathcal{V}$  pour engendrer ce  $g^{\pi+2}$  et supposons d'abord  $\pi \equiv 1 \pmod{4}$ . On voit, comme dans la recherche précédente, que  $d = (\sigma\infty)(z, \xi'_z z^{-1})$  ( $z \not\equiv 0$ ),  $\xi'_z = r^{i^2} = i^{2\rho'}$  ou  $\xi'_z = s' = i^{2\sigma'}$  selon que  $z$  est carré ou non. On a  $c = (r z^{-1})$ ,  $dc = (\sigma 0\infty)(z, r \xi'_z z^{-1})$  ( $z \not\equiv 0$ ), et  $(dc)^3$ , qui fixe 0, doit être dans  $\{a\}$ , ce qui exige  $r' = s'$ . De plus  $d$  doit être permutable à A, donc à B, seul  $g_\pi$  de A; or  $cb_h c = \left(\frac{r' z}{h z + r'}\right)$  n'est pas de la forme  $(z + k)$ . Si  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ , on a de suite  $r' = s'$ .

*Au contraire, le  $g_{168}^8$  composé est le diviseur fixant un symbole dans un  $g_{1512}^9$  trois fois transitif; on le verra bientôt dans un théorème plus général.*

4. Tout  $g_{\frac{1}{2}p(p-1)} X$  qui a plus d'un  $g_p$  en a  $p+1$ . Si donc X est simple, il est représentable en  $g^{p+1} = \mathcal{V}(2, p)$ .

Si  $p = 2q + 1$  ( $q$  premier), X est encore représentable en  $g^{p+1}$  [donc isomorphe à  $\mathcal{V}(2, p)$  ou au  $g_{168}^8$  composé] sauf s'il a un  $g_q$

(1) Cf., loc. cit., p. 264.

(2) Je reprendrai seulement ici un point de détail. Si  $\alpha = -1$  et si  $c$  échange les cycles de  $a$  (dont  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ ),  $c = (0\infty)(i^{2x}, i^{2q+1-2x}) = (z, r z^{-1})$  ( $r = i^{2q+1}$ ). Or  $cbc = \left(\infty, r, \frac{r}{2}, \frac{r}{3}, \dots, -r\right)$ , et  $cb_p c$  devant être de la forme  $b_x c b_x b_{-x} a^t b_x$ , où  $t$  est arbitraire, il faut, pour  $t = r$ , que l'on ait  $x = x' = r$ ,  $cbc = b_r c a^r b_r$ ; le second membre devant fixer 0,  $i^{2y}$  doit être égal à  $-r$ , ce qui exige que l'on ait  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ ; alors  $y$  se trouve déterminé.

normal  $Q$  dont chaque élément est permutable à chaque  $c_p$ . Dans ce cas d'exception,  $X|Q$  est représentable en  $g^{p+1}$  2 fois transitif de classe  $p$ , et  $p+1=2^\omega$ . Or, pour que  $2^\omega-1=p$  et  $2^{\omega-1}-1=q$  soient premiers, il faut que  $\omega$  et  $\omega-1$  le soient; donc  $q=3$ . Mais alors,  $X|Q$  ayant un  $g_8$  abélien normal,  $X$  a un  $g_{3.8}$  abélien  $Y$ . Si  $Y$  n'a qu'un  $g_8$   $A$ , il est le produit direct de  $Q$  par  $A$ , et  $X$  est le produit direct de  $Q$  par un  $g_{3.6}$  de Mathieu. Si  $Y$  a 3  $g_8$ , ils ont un  $g_4$  non cyclique commun  $\Delta$ , caractéristique dans  $Y$ , donc normal dans  $X$ , et  $\Delta Q$  est le produit direct de  $\Delta=\{b, c\}$  par  $Q=\{a\}$ .  $Y$  est défini par les équations de  $\Delta$ ,  $Q$  jointes à  $d^2=1$ ,  $db=bd$ ,  $dc=cd$ ,  $dad=a^2$ . D'ailleurs  $X|\Delta Q$ , d'ordre 14, n'a qu'un  $g_7$  auquel répond dans  $X$  un  $g_{7.12}$  contenant un seul  $g_7$   $S=\{s\}$ . Ainsi  $sa=as$ ,  $dsd=s^{-1}$ , et (en prenant au besoin  $bd$  pour  $b$ ,  $cd$  pour  $c$ )  $sb=bs$ ,  $sc=cs$ .

Pour le cas  $\pi \neq p$ , je prouverai seulement que  $\psi(2, 3^2)$  est le seul  $g_{360}$  simple, le théorème précédent fournissant une démonstration plus simple que celle donnée par M. Cole (1). Un  $g_{360}$  simple  $G$  a 10 ou 40  $g_9$ . Supposons-en 40. Comme 40 est  $\not\equiv 1 \pmod 9$ , les  $g_9$  ne sont pas premiers entre eux deux à deux. Soit  $\{a\}$  un  $g_3$  divisant deux  $g_9$ . Il en divisera  $\nu \equiv 1 \pmod 3$  et le groupe  $A$  des éléments permutables à  $\{a\}$  est d'ordre  $k\nu g$ .  $G_7$  n'étant pas représentable en moins de six symboles, n'a aucun diviseur d'indice  $< 6$ . Donc  $\nu=4$ ,  $k=1$ . Considérons  $G$  comme représenté en  $g^{10}$  relativement à  $A$ .  $a$ , n'entrant que dans 4  $g_9$  qui sont ceux de  $A$ , ne divise aucun conjugué de  $A$  et est par suite de degré 9.  $A|\{a\}$  est un  $g_{1.2}$  ayant 4  $g_3$  (il est donc tétraédral) et un  $g_4$  non cyclique. Donc  $A$  a un  $g_{1.2}^0$   $B > \{a\}$  qui est abélien ou contient 3  $g_4$  non cycliques ayant un  $e_2$  normal dans  $B$ . Cela étant,  $B$  ne peut avoir 3 systèmes d'intransitivité de degré 3; il devrait donc en avoir 1 de degré 6 et 1 de degré 3 et serait impair, ce qui ne se peut,  $G$  étant simple. Donc  $G$  a 10  $g_9$ . Considérons  $G$  comme représenté en  $g^{10}$  relativement au  $g_{3.6}$   $A$  formé des éléments permutables au  $g_9$   $B$ .  $B$ , étant premier à tous ses conjugués (le raisonnement fait dans le cas précédent le montre), est de classe 9 et, par suite, transitif.  $B$  n'est pas cyclique, car le groupe des substitutions permutables à  $B$  dans le champ

---

(1) *A. J.*, t. XV, 1893, p. 307.

de B serait d'ordre 54 non divisible par 36. Donc  $A = BC$ , C étant un  $g_4$  du groupe linéaire à 2 variables mod  $p$ , et, comme G est simple, donc pair, C est cyclique. Dès lors le  $g^{10}$  deux fois transitif où A est le  $g^9$  fixant un symbole est  $\mathfrak{O}(2, 3^2)$ .

5. Cherchons à construire un  $g_{\pi(\pi^2-1)}$  ( $\pi$  impair  $> 3$ ) G dont un groupe facteur soit  $\mathfrak{O}(2, \pi)$ . Le groupe des isomorphismes I de  $\mathfrak{O}$  est  $\{\mathfrak{O}, (iz), (z^p)\}$  en sorte que  $I | \mathfrak{O}$  est un groupe abélien engendré par deux générateurs indépendants d'ordres respectifs 2 et  $m$ .  $\mathfrak{O}$  est donc unique de son type dans I, car si I contenait un groupe  $\mathfrak{O}' \neq \mathfrak{O}$  et isomorphe à  $\mathfrak{O}$ , il contiendrait  $\mathfrak{O}\mathfrak{O}'$  et I |  $\mathfrak{O}$  n'aurait pas le type indiqué. Il résulte dès lors d'un théorème de M. Hölder (*M. A.*, t. XLVI, p. 331) que, si  $m$  est pair, I a exactement trois  $g_{\pi(\pi^2-1)}$  distincts non isomorphes qui sont  $\mathfrak{L}(2, \pi)$ ,  $\{\mathfrak{O}, (z^{p^2})\} = \mathfrak{L}'$ ,  $\{\mathfrak{O}, (iz^{p^2})\} = \mathfrak{L}''$ . Si  $m$  est impair, I n'a qu'un  $g_{\pi(\pi^2-1)}$  qui est  $\mathfrak{L}(2, \pi)$ . G n'a pas d'autre type si sa seule suite de composition est G,  $\mathfrak{O}$ , 1.

Supposons que G admette la suite G, D, 1 ( $D = \{d\}$ ,  $d^2 = 1$ ; je supposerai les exposants de  $d$  réduits à 0 ou à 1).  $h, k, \beta$  parcourant les mêmes valeurs que précédemment et  $y_\beta = y$  étant défini par  $\beta y' \equiv x$ , G aura pour équations

$$\begin{aligned} a^{\frac{\pi-1}{2}} &= d^\alpha, & b_k^h &= d^{\delta_h}, & c^2 &= d^\gamma, & d^2 &= 1, & b_k^{-1} b_h b_k &= b_k d^{\mu_{hk}}, \\ a^{-1} b_h a &= b_{\beta h} d^{\varphi_h}, & c^{-1} a c &= a^{-1} d^\delta, & c^{-1} b_\beta d^{\theta_\beta} c &= \frac{b_{-\alpha^2} c a^{\gamma_\beta} b_{-\alpha^2}}{\beta}, \\ da &= ad, & db_h &= b_h d, & dc &= cd. \end{aligned}$$

En prenant  $b_h d^{\delta_h}$  pour  $b_h$ , on peut supposer ( $b_k^{-1} b_h b_k$  et  $a^{-1} b_h a$  étant alors, comme  $b_h$ , d'ordre  $p$ ) que  $\delta_h = \mu_{hk} = \varphi_h = 0$ .

Si  $\gamma = 0$ , on a nécessairement  $\delta = 0$ . Cela est clair si  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ , car,  $a$  et  $a^{-1} d$  n'étant pas alors du même ordre, on ne peut avoir  $c^{-1} a c = a^{-1} d$ . Soit donc  $\pi \equiv 1 \pmod{4}$ : Dc, dans la représentation de G | D donnée au n° 3, sera représenté par  $(r z^{-1})$ ,  $r$  étant un carré. La transformée de  $(r z^{-1})$  par  $\omega = \left( i r \frac{\xi z + \eta}{\gamma z + \xi r} \right)$  où  $\xi^2 r - \eta^2 \equiv -i r$  est  $(r z^{-1}) (i^2 z)$  qui correspond ici à Dca de G | D. ( $\omega$  étant dans  $\mathfrak{O}(2, \pi)$ , on voit que Dc et Dca sont conjugués dans G | D. Donc c est conjugué de ca ou de cad dans G, et, dans les deux cas,  $(ca)^2 = 1$ .)

Si  $\gamma = \delta = 1$ , en posant  $ca = c'$ , on obtient  $c'^2 = 1$ ,  $c'^{-1}ac' = a^{-1}d$ ,  $c'^{-1}b_\beta d^{\theta_\beta} c' = b_{\frac{-x^2}{\beta}} c' a^{x+1} b_{\frac{x^2}{\beta}}$ , et l'on a bien  $\beta i^{x+1} = ix$ , de sorte qu'en changeant  $x$  en  $ix$  on est ramené au cas impossible  $\gamma = 0$ ,  $\delta = 1$ . Donc  $\delta = 0$ . On aura

$$a^{-1}c^{-1}b_\beta d^{\theta_\beta} ca = b_{\frac{-x^2}{\beta}} c a^{x+2} b_{\frac{-x^2}{\beta}} = c^{-1} b_{\beta i^{-2}} d^{\theta_{\beta i^{-2}}} c,$$

et, puisque  $b_\beta d^{\theta_\beta}$  et  $b_{\beta i^{-2}} d^{\theta_{\beta i^{-2}}}$  sont du même ordre, il faut que  $\theta_\beta = \theta_{\beta i^{-2}}$ . Mais alors, changeant  $c$  en  $cd^{\theta_1}$ , on aura, pour  $\beta$  carré,  $c^{-1}b_\beta c = b_{\frac{-x^2}{\beta}} c a^x b_{\frac{-x^2}{\beta}}$ .

Soit d'abord  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ . On peut toujours, en prenant au besoin  $ad$  pour  $a$ , supposer  $\alpha = 0$ . La formule précédente donne alors  $c^{-1}b_{\frac{-x^2}{\beta}}c = d^x b_\beta c a^{-x} b_\beta$ . Donc on n'aura que deux types : l'un répondant à  $\gamma = 0$  est le produit direct de  $\mathfrak{U}(2, \pi)$  par  $D$ , l'autre répondant à  $\gamma = 1$  coïncide avec le groupe  $U(2, \pi)$  des substitutions linéaires homogènes à deux variables de déterminant 1. Ce groupe  $U$  n'est pas un produit direct et l'on en a ainsi les équations  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ .

Soit  $\pi \equiv 1 \pmod{4}$ . Prenons  $x$  carré;  $y$  sera pair pour  $\beta$  carré et impair pour  $\beta$  non carré. En prenant donc  $ad^{\theta_1}$  pour  $a$ , on aura, quel que soit  $\beta$ ,  $c^{-1}b_\beta c = b_{\frac{-x^2}{\beta}} c a^\beta b_{\frac{-x^2}{\beta}}$ . On peut donc supposer  $\theta_\beta = 0$ . Or, dans la représentation de  $G|D$  en  $g^{\pi+1}$  deux fois transitif du n° 3,  $Dc = (r\tau^{-1})$ , qui fixe les deux symboles  $\pm r^{\frac{1}{2}}$ , est une  $s_2^{\pi-1}$ . Comme  $\{Da\}$  est le diviseur fixant 0,  $\infty$ , toutes les  $s_2^{\pi-1}$  sont conjuguées de  $Da^{\frac{\pi-1}{4}}$ .

Donc, dans  $G$ ,  $c$  est conjuguée de  $a^{\frac{\pi-1}{4}}$  ou de  $a^{\frac{\pi-1}{4}}d$  et, ces deux éléments étant d'ordre  $2^{\alpha+1}$ , il faut que  $\gamma = \delta = \alpha$ . On a donc encore deux types : l'un, répondant à  $\gamma = \alpha = 0$ , est produit direct de  $\mathfrak{U}(2, \pi)$  par  $D$ ; l'autre, répondant à  $\gamma = \alpha = 1$ , est  $U(2, \pi)$  dont on a ainsi les équations pour  $\pi \equiv 1 \pmod{4}$ .

6. Prenons maintenant pour le groupe  $A$  du n° 1 le  $g_{\pi q}$  engendré par  $a = (i\tau)$  ( $\gamma q = \pi - 1$ ) et par le même  $g_\pi^x B$  que précédemment.  $A$  est défini par les équations de  $B$  jointes à  $a^q = 1$ ,  $a^{-1}b_h a = b_{ih}$ . Cherchons à adjoindre à  $A$  une  $s_2 c = (0\infty) \dots$

telle que, dans  $G = \{A, c\}$ ,  $A$  soit le diviseur fixant  $\infty$ . On aura  $cac = a^x, a^2 = 1$ .

Soit d'abord  $\alpha = 1$ . Si alors  $q$  est pair,  $A$  contient une seule  $s_2 a^{\frac{q}{2}}$  fixant 0 et  $\infty$ , en sorte que  $G$  a  $\frac{1}{2}\pi(\pi + 1) s_2^{\pi-1}$  contenant  $\frac{1}{4}\pi(\pi^2 - 1)$  cycles binaires. Or soient  $c$  et  $c'$  deux substitutions ayant le cycle  $(0\infty)$ ;  $cc'$  sera dans  $\{a\}$ , soit  $c' = ca^x$ ; et inversement  $ca^x$  a le cycle  $(0\infty)$ . Chaque cycle binaire figurant ainsi dans  $q$  substitutions de  $G$ , les substitutions de  $G$  présentent  $\frac{1}{2}\pi(\pi + 1)q$  cycles binaires. Donc  $\frac{1}{2}\pi(\pi + 1)q$  est  $\geq \frac{1}{4}\pi(\pi^2 - 1)$  et  $q = \pi - 1$  ou  $\frac{1}{2}(\pi - 1)$ , ce qu'on a reconnu impossible.

Soit donc  $q$  impair. Alors,  $c$ , ne pouvant transformer en lui-même aucun cycle de  $a$  (la classe est  $\pi - 1$ ), les échange deux à deux et est de degré  $\pi + 1$ . D'ailleurs  $c$  doit être paire, sans quoi les substitutions paires de  $G$  formeraient un diviseur  $G'$  dont le p. g. c. d. avec  $A$  serait d'indice 2 dans  $A$ , tandis que  $A$  est pair et divise  $G'$ . Donc  $\frac{1}{2}(\pi + 1)$  est pair et  $\pi \equiv 3 \pmod{4}$ . Ici encore toute substitution de  $G$  ayant le cycle  $(0\infty)$  est de la forme  $ca^x$ , et parmi elles  $c$  est la seule  $s_2 [c = (ca^x)^q$  étant de degré  $\pi + 1$ , il en est de même de  $ca^x]$ . Donc,  $G$  étant deux fois transitif, toutes ses  $s_2$  sont conjuguées et au nombre de  $\pi$  [il y a  $\frac{1}{2}\pi(\pi + 1)$  cycles binaires possibles, et chaque  $s_2$  en a  $\frac{1}{2}(\pi + 1)$ ]. Donc  $c$ , par exemple, est normale dans un  $g_{(\pi+1)q} \mathcal{E}'$ . D'ailleurs,  $G$  a  $\pi^2 - 1 s_p^\pi$  du type de  $b$  fixant un seul symbole,  $\frac{1}{2}\pi(\pi + 1)(q - 1) s_q^{\pi-1}$  ( $q'$  divisant  $q$ ) conjuguées de  $a^x$  ( $a^x \neq 1$ ) fixant deux symboles,  $\frac{1}{2}\pi(\pi + 1)(q - 1) s_{2q'}^{\pi+1}$  conjuguées de  $ca^x$ . Les  $\pi + 1$  substitutions restantes qui sont les  $s_2$  doivent être contenues dans  $\mathcal{E}'$  et de même dans chaque conjugué de  $\mathcal{E}'$ . Donc les  $s_2$  sont permutable entre elles et forment avec l'unité un  $g_{\pi+1} \mathcal{E} = \{c_0, \dots, c_{n-1}\}$  ( $c_0 = c$ ) normal dans  $G$  (c'est le p. p. c. m. de  $e_{(\pi+1)}$ ). Donc  $\pi + 1$  est de la forme  $2^n$ . Le procédé de démonstration précédent est emprunté à Frobenius (*S. A. B.*, 1902, p. 364), qui s'en est servi pour le cas  $\pi = p$ .

Je dis maintenant que  $\pi = p$ . Soit en effet  $\nu$  l'exposant auquel appartient  $2 \pmod{p}$ . On aura  $n = k\nu$  et,  $2^{k\nu} - 1$  étant divisible par  $2^\nu - 1$ ,  $2^\nu - 1$  a la forme  $p^\mu$  et  $p^m = \sum_1^k \binom{k}{r} p^{r\mu}$ . Soit  $k = p^x l$ ,  $r = p^\rho s$  ( $l, s$  premiers à  $p$ ): pour  $r < p^x$ ,  $\binom{k}{r} p^{r\mu}$  est divisible par  $p^{r\mu+x-\rho}$  (voir JORDAN, *Traité*, p. 127) qui est  $> p^{\mu+x}$  si  $r$



est  $> 1$ ; pour  $r \geq p^x$ ,  $p^{r\mu}$  est  $> p^{\mu+x}$  si  $x > 0$ . Donc  $\sum_1^k \binom{k}{r} p^{r\mu}$  et, par suite,  $p^m$  est congru à  $p^{\mu+x} l \pmod{p^{\mu+x+1}}$ . Donc  $k = 1$ ,  $\nu = n$ ,  $\mu = m$ . De plus,  $m$  est impair, sans quoi  $p^m + 1$  serait  $\equiv 2 \pmod{8}$ . Enfin  $m = 1$ , sans quoi  $p + 1$ , divisant  $p^m + 1$ , serait de la forme  $2^{n'} (n' < n)$  et 2 appartiendrait à l'exposant  $n'$ . Donc  $\pi = p = 2^n - 1$ . Donc  $n$  est premier et  $q$  divise  $2^{n-1} - 1$ .

Ces conditions sont suffisantes. En effet,  $\mathcal{C}$  étant normal dans  $\mathcal{G} = \mathbf{A}\mathcal{C}$ ,  $\mathbf{A}$  divise le groupe linéaire  $\mathbf{L}(n, 2)$  à  $n$  variables mod 2 qui est d'ordre  $\mathbf{K}p^q$  ( $\mathbf{K}$  premier à  $p$ ); donc,  $\mathbf{B} = \{b\}$  étant un  $\mathfrak{g}_p$  quelconque de  $\mathbf{L}$  et  $a$  une  $s_q$  d'ordre impair permutable à  $\mathbf{B}$  <sup>(1)</sup>, on peut prendre  $\{a, b\}$  pour  $\mathbf{A}$ , et, une fois  $\mathbf{A}$  choisi,  $\mathcal{G}$  n'a qu'une détermination qui est  $\mathbf{A}\mathcal{C}$ . Les équations de  $\mathcal{G}$  s'obtiennent en adjoignant à celles de  $\{\mathcal{C}, b\} = \{b, c\}$  sous la forme donnée (avec d'autres notations) au n° 3 ou sous la forme donnée dans le Mémoire déjà cité <sup>(2)</sup> [ $j$  étant une racine primitive du corps galoisien  $\mathbf{C}_{2^n}$  d'ordre  $2^n$  et  $t$  parcourant  $\mathbf{C}_{2^n}$ , on peut écrire  $b = (jt) = (j^z, j^{z+1})$ ,  $a = (j^z, j^{i^z})$ ,  $c = (1-t)$ ] les équations  $a^q = 1$ ,  $a^{-1}ba = b^{i^z}$ ,  $ac = ca$  (d'où  $a^{-1}c_x a = c_{x i^z}$  en posant  $c_x = b^{-x} c b^x$ ).

On va voir que  $q = 1$  ou  $n$ , en sorte que, si l'on fait abstraction du cas  $q = 1$ ,  $\mathcal{G}$  est complètement déterminé pour tous les nombres premiers de la forme  $2^n - 1$ . Comme  $q = n$  divise  $2^{n-1} - 1$ , on retrouve ce résultat que, si  $q = \frac{1}{2}(p-1)$ , on a  $p = 7$ .

Représentons désormais  $\mathcal{G}$  par les symboles de  $\mathbf{C}_{2^n}$ ,  $\mathbf{A} = \{a, b\}$  fixant  $0$ ,  $\{a\}$  fixant  $0, 1$  et cherchons à adjoindre à  $\mathcal{G}$  une  $s_2$ ,  $d = (t, \varphi t) = (1)(0\infty) \dots$ , telle que, dans  $\{\mathcal{G}, d\} = \mathfrak{H}$ ,  $\mathcal{G}$  soit le diviseur fixant  $\infty$ . Il faudra que  $dbd = b^{-1}$ ,  $da = ad$  ( $dad$  doit transformer  $dbd$  en  $db^{i^z}d$ ) et que  $(cd)^3$  soit dans  $\{a\}$ . La première condition donne  $\varphi t = j\varphi(jt) (t \neq 0)$ , d'où, en multipliant les équations répondant à  $t = 1, j, \dots, j^z = \zeta$ ,  $\varphi\zeta \equiv h\zeta^{-1} \pmod{2}$  ( $h \equiv i^{-1}\varphi 1$ ). La troisième, en écrivant que  $(cd)^3$  fixe  $0$  et  $1$ , donne

<sup>(1)</sup>  $\mathbf{L}$  a toujours hors de  $\mathbf{B}$  des éléments  $\neq 1$  permutables à  $\mathbf{B}$ , et il y en a d'ordre impair, sans quoi  $\frac{1}{2}(p-1)$  étant impair,  $\mathbf{L}$  serait impair et aurait un diviseur normal d'indice 2, tandis que ses facteurs de composition sont  $p$  et  $(U, 1)$ .

<sup>(2)</sup> *Journal de Mathématiques*, 1902, p. 263.

$h \equiv 1$  et devient  $(cd)^3 = 1$ . La deuxième donne  $\varphi(j^{i^2}) = \varphi(j^2)^i$ , d'où  $h^{i^2-1} \equiv 1$  qui est une identité si  $q = 1$  et qui redonne  $h \equiv 1$  (puisque  $h^{2^n-1} \equiv h^p \equiv 1$ ) si  $q > 1$ . Les substitutions  $b, c, d$  sont les générateurs de  $\mathcal{L}(2, 2^n) = \mathfrak{O}(2, 2^n)$  dont elles vérifient les équations, et, comme les équations de  $\mathcal{K}$  s'obtiennent en adjoignant à celles de  $\{b, c, d\}$   $a^q = 1, a^{-1}ba = b^i, ca = ac, da = ad$ ,  $\mathcal{K}$  contient normalement  $\mathcal{L}$ . Or  $\mathcal{K}$  divise le groupe  $J$  des isomorphismes de  $\mathcal{L}$  qui est d'ordre  $2^n(2^{2^n} - 1)n$  et  $n$  est premier. Donc  $q = 1$  ou  $n$  et  $\mathcal{K} = \mathcal{L}$  ou  $J$ .

Soit maintenant  $\alpha = -1$ . On a certainement une solution pour  $\mathcal{G}$  en prenant  $c = (r\zeta^{-1})$ , car on obtient alors, comme au n° 3 (voir le Mémoire cité),  $cb_\beta c = b_r c a r b_r$  ( $i^2 r \beta^2 = -r$ ), et ces équations jointes à celles de  $A$  définissent  $\mathcal{G}$ .  $\mathcal{G}$  est toujours d'indice  $\gamma$  dans  $\mathcal{L}(2, \pi)$ . Si donc  $\gamma$  est impair,  $\gamma = 1$ , sans quoi le p. g. c. d. de  $\mathcal{G}$ ,  $\mathfrak{O}(2, \pi)$  serait d'indice  $\gamma$  dans  $\mathfrak{O}$ , et  $\gamma$ , qui divise  $\pi - 1$ , devrait être égal à  $\pi + 1$  ou à  $\pi$  (ou à 6 si  $\pi = 9$ ; mais 6 ne divise pas 8). Si  $\gamma$  est pair (donc  $\pi$  impair),  $\mathcal{G}$  est d'indice  $\frac{\gamma}{2}$  dans  $\mathfrak{O}(2, \pi)$  et l'on voit de même que  $\gamma = 2$ .

Les résultats précédents complètent et étendent au cas où  $m$  est  $> 1$  les résultats partiels obtenus par M. Frobenius (*loc. cit.*) pour  $m = 1$ . On en déduit aisément aussi une nouvelle démonstration du théorème suivant, établi par le même géomètre à l'aide de la théorie des caractères :

*Un  $g_{pq(1+q)}^p$   $G$  ayant exactement  $1 + p$   $g_p$  est nécessairement un des groupes  $\mathcal{L}(2, 5), \mathfrak{O}(2, 5), \mathfrak{O}(2, 7), \mathfrak{O}(2, 11)$ .*

En effet, le p. p. c. m.  $M$  d'ordre  $pq'(1+p)$  des  $g_p$  de  $G$  est simple (1). Il est donc représentable en  $g^{p+1}$  et coïncide avec  $\mathfrak{O}(2, p)$ . Donc  $q' = \frac{1}{2}(p-1)$  ou  $p-1$  et de même  $q$ . Si donc  $G$  est  $\neq \mathfrak{O}$  et n'est pas le produit direct de  $\mathfrak{O}$  par un  $g_2$ , il coïncide avec  $\mathcal{L}(2, p)$ . Mais  $\mathfrak{O}(2, p)$  n'est représentable en  $g^p$  que pour  $p = 5, 7, 11$  et  $\mathcal{L}(2, p)$  ne l'est que pour  $p = 5$ , ce qui démontre le théorème.

---

(1) MILLER, *P. L. M. S.*, t. XXXI, 1899, p. 148.