BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL-J. SUCHAR

Sur les équations différentielles linéaires réciproques du second ordre

Bulletin de la S. M. F., tome 32 (1904), p. 103-116
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1904__32__103_1>

SUR LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES RÉCIPROQUES DU SECOND ORDRE;

Par M. Paul-J. Suchar.

1. Soient

$$x_1 = \varphi(x) \tag{1}$$

une fonction de la variable x et

$$x = \psi(x_1) \tag{2}$$

la fonction inverse. Il existe des fonctions $F(x)$, $F_1(x_1)$ de la variable x et de la variable x_1, qui jouissent de la propriété suivante :

$$(3)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=\psi(x_1)} = F_1(x_1), \\ \left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x_1}\right)_{x_1=\varphi(x)} = F(x). \end{cases}$$

Les symboles $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=\psi(x_1)}$, $\left(\frac{\partial F_1}{\partial z_1}\right)_{x_1=\varphi(x)}$ sont les dérivées de $F(x)$ et $F_1(x_1)$ prises par rapport à x et x_1, et où l'on remplace ensuite x en fonction de x_1 et x_1 en fonction de x à l'aide de (1) et (2). Ces fonctions sont solutions de deux équations différentielles linéaires de second ordre.

En effet, posons

$$(4)\qquad \frac{dx_1}{dx} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = f(x);$$

la première relation de (3) nous donne, en dérivant par rapport à x_1,

$$\left(\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{x=\psi(x_1)} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1},$$

et, si l'on remplace x_1 en fonction de x d'après (1), on a

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = f(x) F.$$

On aura de même, en partant de la seconde des relations (3),

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_1^2} = \frac{1}{f[\psi(x_1)]} F_1,$$

et les fonctions $F(x)$ et $F_1(x_1)$ sont solutions de ces dernières équations.

Nous dirons que ces équations sont réciproques.

2. Il résulte de ce qui précède que, étant donnée une équation différentielle linéaire du second ordre, on peut toujours la supposer ramenée à la forme

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x) y;$$

on formera sa réciproque en faisant le changement de la variable indépendante

$$\frac{dx_1}{dx}=f(x),$$

d'où

$$x_1=\varphi(x) \qquad \text{et} \qquad x=\psi(x_1),$$

et le changement de la fonction en posant

$$y_1=\frac{dy}{dx};$$

l'équation réciproque sera alors

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2}=\frac{1}{f[\psi(x_1)]}y_1.$$

La propriété qui caractérise ces équations est la suivante :

La dérivée d'une solution d'une des équations considérée comme fonction de la variable indépendante de l'autre équation est une solution de cette dernière.

3. Considérons comme exemple l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{(3x)^{\frac{4}{3}}}y.$$

La réciproque de cette équation s'obtient en posant

$$\frac{dx_1}{dx}=\frac{1}{(3x)^{\frac{4}{3}}},$$

d'où

$$x_1=-\frac{1}{(3x)^{\frac{1}{3}}}+c \qquad \text{et} \qquad x=-\frac{1}{3(x_1-c)^3};$$

on aura donc

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2}=\frac{1}{(x_1-c)^4}y_1.$$

Remarquons qu'on peut supposer $c=0$, car cela revient à faire sur cette dernière équation un changement de la variable indépendante pour ramener le point $x_1=c$ à l'origine; il faudra alors faire aussi $c=0$ dans la relation qui lie x à x_1, et l'équation réciproque sera

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2}=\frac{1}{x_1^4}y_1.$$

Cette dernière équation est celle de Spitzer [1] et se ramène à des coefficients constants par le changement

$$y_1 = zx_1, \qquad x_1 = \frac{1}{t};$$

on aura alors

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = z.$$

Donc les solutions de l'équation précédente sont

$$x_1 e^{\frac{1}{x_1}} \quad \text{et} \quad x_1 e^{-\frac{1}{x_1}}.$$

Ces solutions étant linéairement indépendantes, on aura alors, d'après le n° 2, l'intégrale générale de l'équation donnée, à savoir :

$$y = a\left[1 - (3x)^{\frac{1}{3}}\right] e^{(3x)^{\frac{1}{3}}} + b\left[1 + (3x)^{\frac{1}{3}}\right] e^{-(3x)^{\frac{1}{3}}},$$

où a et b sont des constantes.

4. Considérons comme second exemple l'équation plus générale

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^2 y}{dx^2} = [(2n-1)x]^{-\frac{4n}{2n-1}} y,$$

qui comprend, comme cas particulier, pour $n = 1$, l'équation de Spitzer.

Nous aurons

$$\text{(2)} \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{dx_1}{dx} &= [(2n-1)x]^{-\frac{4n}{2n-1}}, \\ x_1 &= -\frac{1}{2n-1}[(2n-1)x]^{-\frac{2n+1}{2n-1}}, \\ x &= \frac{1}{2n-1}[-(2n+1)x_1]^{-\frac{2n-1}{2n+1}}, \end{aligned} \right.$$

et pour l'équation réciproque

$$\text{(3)} \qquad \frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = [(2n-1)x_1]^{-\frac{4n}{2n+1}} y_1.$$

Nous avons supposé, comme dans le premier exemple, la constante d'intégration nulle.

Je me propose de montrer qu'il est possible de trouver une

[1] SPITZER, *Vorlesungen über lineare differential Gleichungen*, p. 98.

solution de ces équations lorsque n est un nombre réel, et, s'il est entier, l'intégrale générale s'exprimera par des fonctions élémentaires. Remarquons, cependant, que l'exemple considéré rentre dans le type général

$$\frac{d^2y}{dx^2} = ax^p y,$$

et qui, par un changement convenable de la variable et de la fonction, se ramène à l'équation de Bessel

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dz}{dt} + \left(1 - \frac{k^2}{t^2}\right) z = 0,$$

et l'équation proposée pourra alors s'intégrer à l'aide des fonctions de Bessel. La méthode que je suivrai me permet d'obtenir directement une solution, ou bien l'intégrale générale, sans qu'il soit nécessaire de recourir à l'équation de Bessel, ce qui me permettra d'ailleurs d'en déduire ensuite l'intégrale générale de l'équation de Bessel et reconnaître qu'elle s'exprimera à l'aide des fonctions élémentaires, si la constante k est de la forme

$$k^2 = \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2,$$

où n est un nombre entier.

5. L'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = [(2n-1)x]^{-\frac{4n}{2n-1}} y$$

se réduit pour $n = 1$ à l'équation de Spitzer

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^4} y$$

et qui a pour solutions

$$xe^{\frac{1}{x}} \quad \text{et} \quad xe^{-\frac{1}{x}};$$

la fonction

$$y = x\left(e^{\frac{1}{x}} - e^{-\frac{1}{x}}\right),$$

que l'on peut encore écrire

$$y = \int_{-1}^{+1} e^{\frac{z}{x}}\, dz,$$

est encore une solution de cette dernière équation. Il y a donc lieu de chercher si, tout au moins pour n positif, l'équation (1) n'a pas une solution de la forme

$$(4) \qquad y = \int_{-1}^{+1} u(z, n) e^{z\, v(x, n)}\, dz,$$

où $u(z, n)$ est une fonction de z et du paramètre n et qui est telle que, pour toutes les valeurs de z comprises entre -1 et $+1$, l'intégrale (4) ait un sens; quant aux limites, elle est supposée finie ou infinie, mais, dans ce dernier cas, elle sera infinie comme $\frac{1}{1-z^2}$ et d'un ordre inférieur à l'unité; enfin pour $n = 1$ elle sera égale à 1. La fonction $v(x, n)$ est supposée continue par rapport à x, ayant une dérivée et se réduisant à $\frac{1}{x}$ pour $n = 1$. Ces conditions sont suffisantes pour retrouver les fonctions $u(z, n)$ et $v(x, n)$, de manière que la fonction (4) soit une solution de (1).

Nous aurons, en dérivant (4) par rapport à x,

$$(5) \qquad \frac{dy}{dx} = \int_{-1}^{+1} u(z, n)\, z\, v'(x, n) e^{z\, v(x, n)}\, dz$$

et

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \int_{-1}^{+1} u(z, n) z^2 v'^2(x, n) e^{z\, v(x, n)}\, dz + \int_{-1}^{+1} u(z, n)\, z\, v''(x, n) e^{z\, v(x, n)}\, dz;$$

or

$$\int_{-1}^{+1} u(z, n)\, z^2 v'^2(x, n) e^{z\, v(x, n)}\, dz = -\int_{-1}^{+1} u(z, n)(1-z^2) v'^2(x, n) e^{z\, v(x, n)}\, dz + \int_{-1}^{+1} u(z, n)\, v'^2(x, n) e^{z\, v(x, n)}\, dz.$$

ou encore, en intégrant la première intégrale par parties et remarquant que la partie intégrée est nulle aux limites, on aura finalement

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \int_{-1}^{+1} \frac{d}{dz}[u(z, n)(1-z^2)] \frac{v'^2(x, n)}{v(x, n)} e^{z\, v(x, n)}\, dz + \int_{-1}^{+1} u(z, n)\, z\, v''(x, n)\, e^{z\, v(x, n)}\, dz + \int_{-1}^{+1} u(z, n)\, v'^2(x, n)\, e^{z\, v(x, n)}\, dz.$$

Si nous portons ces expressions dans (1), nous aurons une identité si la fonction $u(z, n)$ satisfait à la relation

$$(6) \qquad \frac{d}{dz}[u(z, n)(1 - z^2)] = 2kz\,u(z, n),$$

où k est un nombre qui dépend de n; et, comme l'équation (1) est indépendante de $\frac{dy}{dx}$, on trouve en ayant égard à (5) que la fonction $v(x, n)$ doit satisfaire à la relation

$$(7) \qquad 2k\frac{v'^2(x, n)}{v(x, n)} + v''(x, n) = 0;$$

enfin, on doit en outre avoir

$$(8) \qquad v'^2(x, n) = [(2n - 1)x]^{-\frac{4n}{2n-1}}.$$

La relation (6) nous donne

$$u(z, n) = (1 - z^2)^{-k-1},$$

à un facteur constant près qu'on peut supposer égal à 1 et, comme la fonction doit se réduire à 1 pour $n = 1$, la constante k sera donc égale à $-n$. La relation (7) nous donne, en remarquant que la fonction $v(x, n)$ doit se réduire à $\frac{1}{x}$ pour $n = 1$,

$$v(x, n) = |(2n - 1)x|^{-\frac{1}{2n-1}},$$

et cette dernière fonction vérifie, comme on le voit, la relation (8).

Nous aurons donc une solution de (1) pour n réel et positif de la forme

$$(9) \qquad y = \int_{-1}^{+1} (1-z^2)^{n-1} e^{z|(2n-1)x|^{-\frac{1}{2n-1}}}\, dz.$$

Il est facile de trouver une solution de la même équation pour n négatif. Remarquons que, si dans (1) nous changeons n en $-n$, on obtient une équation qui ne diffère de l'équation réciproque (3) que par le changement de x_1 en x. On aura donc une solution de l'équation (1) pour n négatif si l'on connaît une solution de (3) pour n positif. L'équation (3) étant la réciproque de (1), il résulte, d'après ce qui précède, que la dérivée d'une solution de (1) considérée comme fonction de x_1 à l'aide de (2) sera une solution de (3).

Nous aurons alors

$$y_1 = -\int_{-1}^{+1} (1-z^2)^{n-1} z[(2n+1)x_1]^{\frac{2n}{2n-1}} e^{z[-(2n+1)x]^{\frac{1}{2n+1}}} dz,$$

ou encore, en intégrant par parties et remarquant que la partie intégrée est nulle aux limites, on aura

$$y_1 = \frac{2n+1}{2n} x_1 \int_{-1}^{+1} (1-z^2)^n e^{z[-(2n+1)x_1]^{\frac{1}{2n+1}}} dz.$$

Il suffit alors de supprimer l'indice de x dans cette dernière fonction pour avoir une solution de l'équation (1) pour n négatif. Il faut remarquer cependant que n doit être pris positivement dans cette dernière fonction.

6. Remarquons que le coefficient de l'équation (1) se présente sous forme illusoire si $n = \frac{1}{2}$, tandis que l'équation (3) se présente sous la forme

$$\frac{d^2 y}{dx_1^2} = \frac{1}{2x_1} y_1;$$

on trouvera alors la vraie valeur de (1) en cherchant la réciproque de cette dernière équation. On trouve ainsi

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = 2e^{2x} y,$$

et il suffit alors, pour avoir une solution de cette dernière équation, de remplacer dans la solution trouvée pour (1)

$$\lim |(2n-1)x|^{\frac{1}{2n-1}} = \sqrt{2}e^x,$$

et faire $n = \frac{1}{2}$; on trouve ainsi

$$y = \int_{-1}^{+1} (1-z^2)^{-\frac{1}{2}} e^{\sqrt{2} z e^x} dz$$

pour solution de cette dernière équation.

7. Il nous reste à trouver l'intégrale générale de (1) et (3) pour toutes les valeurs entières de n.

Nous nous bornerons à déterminer l'intégrale générale de (1), car l'intégrale générale de (3) sera aussi connue dès que la première le sera, puisque cette dernière équation est la réciproque de la première.

Si, dans la fonction (9), nous supposons n entier et en intégrant par parties, on trouve les deux fonctions linéairement indépendantes, à savoir :

$$(10)\quad \left\{ \begin{aligned} y = (2n-1)x \Bigg[& a_0 + \frac{a_1}{|(2n-1)x|^{\frac{1}{2n-1}}} \\ & + \frac{a_2}{|(2n-1)x|^{\frac{2}{2n-1}}} + \ldots + \frac{a_{n-1}}{|(2n-1)x|^{\frac{n-1}{2n-1}}} \Bigg] e^{|(2n-1)x|^{-\frac{1}{2n-1}}} \end{aligned} \right.$$

et

$$(11)\quad \left\{ \begin{aligned} y = (2n-1)x \Bigg[& b_0 + \frac{b_1}{|(2n-1)x|^{\frac{1}{2n-1}}} \\ & + \frac{b_2}{|(2n-1)x|^{\frac{2}{2n-1}}} + \ldots + \frac{b_{n-1}}{|(2n-1)x|^{\frac{n-1}{2n-1}}} \Bigg] e^{-|(2n-1)|x^{-\frac{1}{2n-1}}}, \end{aligned} \right.$$

où les coefficients a et b satisfont aux relations

$$(12)\quad \left\{ \begin{aligned} a_{k-1} &= (-1)^{k-1} \frac{2^{k-1}k}{(k!)^2} a_0 \\ b_{k-1} &= \frac{2^{k-1}k}{(k!)^2} b_0 \end{aligned} \right. \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

et qui sont des solutions de (1).

Si, dans l'équation (1), nous faisons le changement de la variable et de la fonction, en posant

$$y = zx^{\frac{1}{2}}, \qquad t = ax^{\frac{1}{2k}}, \qquad a = 2k\sqrt{b}, \qquad b = -(-2k)^{\frac{1-2k}{k}}$$
$$2k = -(2n-1),$$

cette équation se transforme en l'équation de Bessel

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dz}{dt} + \left(1 - \frac{k^2}{t^2}\right) z = 0.$$

Si nous supposons n un entier pair, on aura, d'après (10), pour solutions de cette équation de Bessel,

$$z_1 = \frac{(2n-1)^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{2n-1}{2}}} \left\{ \cos\left(t + \frac{2n-1}{4}\pi\right) \left[a_0 - a_2 t^2 + \ldots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} a_{n-2} t^n\right] \right.$$

$$\left. - \sin\left(t + \frac{2n-1}{4}\pi\right) \left[a_1 t - a^3 t^3 + \ldots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} a_{n-1} t^{n-1}\right] \right\},$$

$$z_2 = \frac{(2n-1)^{\frac{1}{2}}}{t^{\frac{2n-1}{2}}} \left\{ \cos\left(t + \frac{2n-1}{4}\pi\right) \left[a_1 t - a_3 t^3 + \ldots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} a_{n-1} t^{n-1}\right] \right.$$

$$\left. + \sin\left(t + \frac{2n-1}{4}\pi\right) \left[a_0 - a_2 t^2 + \ldots + (-1)^{\frac{n-2}{2}} a_{n-2} t^{n-2}\right] \right\},$$

où les constantes a sont données par (12).

8. Nous avons vu, au n° 1, qu'on peut toujours transformer une équation linéaire et homogène de second ordre en une autre qui lui est réciproque et nous avons trouvé qu'à l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x) y$$

correspond la réciproque

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{f[\psi(x_1)]} y_1.$$

Il peut se faire que la fonction $f(x)$ soit telle que, en faisant sur elle la substitution $x = \psi(x_1)$, on ait

$$f[\psi(x_1)] = \frac{1}{f(x_1)};$$

alors l'équation réciproque prend la forme

$$\frac{d^2 y_1}{dx_1^2} = f(x_1) y_1;$$

elle ne diffère de l'équation donnée que par le changement de x en x_1 et de y en y_1, et la transformation donnée transforme l'équation en elle-même; en d'autres termes, l'équation proposée est en même temps sa réciproque.

On reconnaît une certaine analogie avec le travail de M. Appell : *Sur des équations différentielles linéaires transformables en elles-mêmes par un changement de fonction et de variable* (*Acta mathematica,* t. XV).

La différence qui existe est que le changement de la fonction est supposé linéaire par M. Appell, tandis que ce changement, d'après notre n° 2, n'est pas linéaire. Il nous reste encore à montrer qu'il existe des fonctions $f(x)$ ayant la propriété indiquée dans ce même numéro. En effet, d'après le n° 1, où nous avons posé

$$x_1 = \varphi(x) \qquad \text{et} \qquad x = \psi(x_1)$$

pour la fonction inverse et

$$f(x) = \frac{\partial\varphi(x)}{\partial x},$$

il résulte

$$\frac{\partial\psi(x_1)}{\partial x_1} = \frac{1}{f[\psi(x_1)]},$$

et, comme $f[\psi(x_1)]$ doit être égale à $f(x_1)$, on aura alors

$$\frac{\partial\psi(x_1)}{\partial x_1} = f(x_1);$$

donc les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x_1)$ ne doivent différer que par le changement de x en x_1. Donc la fonction $f(x)$ cherchée est la dérivée d'une fonction qui a pour inverse la même fonction.

Considérons alors l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x)y$$

et supposons $f(x)$ remplissant cette dernière condition, cette équation sera alors transformable en elle-même par le changement de la variable et de la fonction indiquée au n° 2; elle aura alors pour solution la dérivée d'une solution de la même équation, sur laquelle on fera la substitution $x = \varphi(x)$. Un exemple nous est donné par l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y,$$

où $\varphi(x) = x$ et, par conséquent, $f(x) = 1$; cette équation étant en même temps sa réciproque, il s'ensuit qu'elle aura pour solution la dérivée d'une solution, ce que l'on sait d'ailleurs.

Il en est de même de l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}y,$$

où

$$\varphi(x) = -\frac{1}{x} \qquad \text{et} \qquad f(x) = \frac{1}{x^2};$$

or

$$y = x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

est une solution de cette équation; on vérifie, en effet, que la dérivée de cette solution prise par rapport à x, où l'on remplacera ensuite x par $-\frac{1}{x}$, est aussi une solution de la même équation.

D'une manière plus générale, considérons la fonction

$$\varphi(x) = (1 - x^m)^{\frac{1}{m}},$$

où m est un nombre quelconque; supposons-nous donnée en outre une des déterminations de cette fonction, on aura alors pour $f(x)$

$$f(x) = -x^{m-1}(1 - x^m)^{\frac{1-m}{m}},$$

et pour l'équation qui est transformable en elle-même

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -x^{m-1}(1 - x^m)^{\frac{1-m}{m}} y.$$

La dérivée d'une solution de cette équation, où l'on remplacera x par $(1 - x^m)^{\frac{1}{m}}$, sera une autre solution de la même équation. On peut aussi généraliser la dernière expression de $\varphi(x)$ en remplaçant x par une certaine fonction $u(x)$, dont l'inverse est $v(x)$. On prendra alors pour $\varphi(x)$ l'expression

$$\varphi(x) = v\left\{1 - [u(x)]^m\right\}^{\frac{1}{m}},$$

et la dérivée de cette fonction par rapport à x sera la fonction $f(x)$. On pourra alors former l'équation différentielle qui est en même temps sa réciproque.

Il résulte de ce qui précède qu'il existe des fonctions $F(x)$, telles que, en prenant la dérivée et en faisant sur x la substitution $x = \varphi(x)$, on aura

$$F'[\varphi(x)] = F(x),$$

et, si $\varphi(x)$ a pour inverse la même fonction, $F(x)$ sera solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre ayant pour réciproque la même équation. On trouve ainsi comme exemples simples les fonctions

$$F(x) = \sin x + \cos x,$$

$$F(x) = x^{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} + (-1)^{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) x^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}},$$

où $\varphi(x) = -x$ pour la première fonction et $\varphi(x) = -\frac{1}{x}$ pour la seconde.

9. Nous allons terminer par une dernière remarque en étendant les mêmes considérations aux équations différentielles simultanées linéaires et du second ordre.

Nous nous bornerons à deux équations que nous supposerons de la forme

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 y}{dx^2} = f(x)(\alpha y + \beta z), \\ \dfrac{d^2 z}{dx^2} = f(x)(\gamma y + \delta z). \end{cases}$$

où α, β, γ, δ sont des constantes dont le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix}$$

est supposé différent de zéro. Si nous répétons le même raisonnement qu'au n° 1 en posant

$$\frac{dx_1}{dx} = f(x), \qquad x_1 = \varphi(x), \qquad \text{d'où} \qquad x = \psi(x_1),$$

$$y_1 = \frac{dy}{dx}, \qquad z_1 = \frac{dz}{dx},$$

on transformera le système donné en un autre qui lui est réciproque et de la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} \dfrac{d^2 y_1}{dx_1^2} = \dfrac{1}{f[\psi(x_1)]}(\alpha y_1 + \beta z_1), \\ \dfrac{d^2 z_1}{dx_1^2} = \dfrac{1}{f[\psi(x_1)]}(\gamma y_1 + \delta z_1). \end{cases}$$

On vérifie de la même manière que, si $y = u(x)$, $z = v(x)$

sont des solutions de (1), les dérivées $u'(x)$, $v'(x)$ considérées comme fonctions de x_1 sont solutions de (2); et réciproquement, si $y_1 = u_1(x_1)$, $z_1 = v_1(x_1)$ sont solutions de (2), les dérivées $u'_1(x_1)$, $v'_1(x_1)$ considérées comme fonctions de x sont solutions de (1).

Considérons comme exemple le système

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^4}(\alpha y + \beta z),$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{1}{x^4}(\gamma y + \delta z);$$

le système réciproque est

$$\frac{d^2y_1}{dx_1^2} = \frac{1}{(3x_1)^{\frac{4}{3}}}(\alpha y_1 + \beta z_1),$$

$$\frac{d^2z_1}{dx_1^2} = \frac{1}{(3x_1)^{\frac{4}{4}}}(\gamma y_1 + \delta z_1).$$

Si l'on sait intégrer un de ces systèmes, on saura intégrer l'autre aussi.

Remarquons que, si dans le premier système on fait le changement des fonctions et de la variable en posant

$$y = ux, \qquad z = vx, \qquad x = \frac{1}{t},$$

on obtiendra le système à coefficients constants

$$\frac{d^2u}{dt^2} = \alpha u + \beta v,$$

$$\frac{d^2v}{dt^2} = \gamma u + \delta v.$$