BULLETIN DE LA S. M. F.

PAUL APPELL

Sur les fonctions et vecteurs de point contenant uniquement les dérivées premières des composantes de la vitesse

Bulletin de la S. M. F., tome 31 (1903), p. 68-73
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1903__31__68_1>

SUR LES FONCTIONS ET VECTEURS DE POINT CONTENANT UNIQUEMENT LES DÉRIVÉES PREMIÈRES DES COMPOSANTES DE LA VITESSE;

Par M. Paul Appell.

1. Soient, dans un fluide en mouvement, u, v, w les projections, à l'instant t, du vecteur vitesse W au point (x, y, z). Je me propose de compléter, sur quelques points particuliers, l'étude des fonctions et vecteurs de point dépendant uniquement des neuf dérivées partielles

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z},$$

d'après les idées générales indiquées dans une Note des *Comptes rendus* (26 janvier 1903) et dans un Mémoire inséré au *Journal de Mathématiques* de M. Jordan (1er fascicule 1903). J'appellerai ces fonctions et ces vecteurs *fonctions et vecteurs de point du premier ordre*.

J'ai montré que si l'on pose

$$\begin{array}{lll}
\varepsilon_1 = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \varepsilon_2 = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & \varepsilon_3 = \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\[2ex]
\gamma_1 = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}, & \gamma_2 = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}, & \gamma_3 = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}, \\[2ex]
2\xi = \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}, & 2\eta = \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}, & 2\zeta = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}.
\end{array}$$

toutes les fonctions de point du 1er ordre peuvent être exprimées à l'aide de six fonctions spéciales dont la signification cinématique est simple, à savoir

$$
(1)\qquad \left\{
\begin{aligned}
\theta &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3,\\
\delta &= \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 - 4(\varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1 + \varepsilon_1\varepsilon_2),\\
\varkappa &= 4\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3 + \gamma_1\gamma_2\gamma_3 - \varepsilon_1\gamma_1^2 - \varepsilon_2\gamma_2^2 - \varepsilon_3\gamma_3^2,\\
\Omega^2 &= \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2,\\
\varphi &= \varepsilon_1\xi^2 + \varepsilon_2\eta^2 + \varepsilon_3\zeta^2 + \gamma_1\eta\zeta + \gamma_2\zeta\xi + \gamma_3\xi\eta,\\
\psi &= E_1\xi^2 + E_2\eta^2 + E_3\zeta^2 + \Gamma_1\eta\zeta + \Gamma_2\zeta\xi + \Gamma_3\xi\eta.
\end{aligned}
\right.
$$

Dans l'expression de ψ, on a posé pour abréger

$$
\begin{array}{lll}
E_1 = 4\varepsilon_2\varepsilon_3 - \gamma_1^2, & E_2 = 4\varepsilon_3\varepsilon_1 - \gamma_2^2, & E_3 = 4\varepsilon_1\varepsilon_2 - \gamma_3^2,\\
\Gamma_1 = 2(\gamma_2\gamma_3 - 2\varepsilon_1\gamma_1), & \Gamma_2 = 2(\gamma_3\gamma_1 - 2\varepsilon_2\gamma_2), & \Gamma_3 = 2(\gamma_1\gamma_2 - 3\varepsilon_3\gamma_3),
\end{array}
$$

de sorte que ψ est la forme adjointe de φ.

On a alors les identités élémentaires bien connues dans la théorie des formes quadratiques

$$
\begin{gathered}
E_1 + E_2 + E_3 = -\delta,\\
4\varepsilon_1 E_1 + \gamma_3\Gamma_3 + \gamma_2\Gamma_2 = 4\varkappa,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
4E_2E_3 - \Gamma_1^2 = 16\varepsilon_1\varkappa, \;\dots,\\
\Gamma_2\Gamma_3 - 2E_1\Gamma_1 = 8\gamma_1\varkappa, \;\dots,\\
\Delta = \Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2 - 4(E_2E_3 + E_3E_1 + E_1E_2) = -16\theta\varkappa.
\end{gathered}
$$

2. Calculons d'abord, en fonction des invariants fondamentaux (1), la fonction de point

$$
K_1 = \left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right)^2.
$$

On peut, pour l'obtenir, faire le calcul directement, ou remarquer que le résultat se déduit du calcul de la fonction analogue

$$
K = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)^2;
$$

fait dans le Mémoire du *Journal de Mathématiques*, en y remplaçant $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ par $E_1, E_2, E_3, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$. On trouve ainsi

$$
K_1 = -4\delta\psi - 16\Omega^2\theta\varkappa + 16\varkappa\varphi.
$$

3. La fonction

$$L = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\frac{\partial\psi}{\partial\xi} + \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\frac{\partial\psi}{\partial\eta} + \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}$$

est également une fonction de point dont l'expression est

$$L = 4\varkappa\Omega^2.$$

4. Les fonctions calculées jusqu'ici sont paires en ξ, η, ζ : elles s'expriment rationnellement en Ω^2, φ, ψ. Si nous considérons le jacobien des trois formes Ω^2, φ, ψ

$$I = \begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \frac{\partial\varphi}{\partial\xi} & \frac{\partial\varphi}{\partial\eta} & \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} \\ \frac{\partial\psi}{\partial\xi} & \frac{\partial\psi}{\partial\eta} & \frac{\partial\psi}{\partial\zeta} \end{vmatrix},$$

il forme une fonction de point *impaire* en ξ, η, ζ. Dès lors, son carré est rationnel ; on vérifie, en effet, par la règle de multiplication des déterminants, que l'on a

$$I^2 = \begin{vmatrix} \Omega^2 & 2\varphi & 2\psi \\ 2\varphi & K & 4\Omega^2\varkappa \\ 2\psi & 4\Omega^2\varkappa & K_1 \end{vmatrix};$$

remplaçant K et K_1 par leurs valeurs connues, on a I^2 sous forme d'un polynome entier par rapport aux fonctions fondamentales (1). La fonction I se décompose en un produit de trois facteurs linéaires en ξ, η, ζ.

La signification géométrique de I est facile à trouver. La fonction I s'annule quand le tourbillon au point P est dans un des plans principaux de l'ellipsoïde des dilatations en ce point, c'est-à-dire dans un des plans principaux du cône

$$\varepsilon_1 x^2 + \varepsilon_2 y^2 + \varepsilon_3 z^2 + \gamma_1 yz + \gamma_2 zx + \gamma_3 xy = 0.$$

5. *Vecteurs de point du premier ordre.* — Si nous appelons de même *vecteur de point du premier ordre* tout vecteur indépendant du choix des axes dont les expressions sont formées uni-

quement à l'aide des dérivées

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \frac{\partial w}{\partial z},$$

il est facile de montrer que tous ces vecteurs peuvent être exprimés à l'aide de *trois vecteurs fondamentaux et des fonctions de point* (1).

On peut prendre, pour vecteurs fondamentaux, les trois suivants :

1° Le tourbillon Ω de projections

$$(\Omega) \qquad \xi, \quad \eta, \quad \zeta;$$

2° Le vecteur Φ de projections

$$(\Phi) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta};$$

3° Le vecteur Ψ de projections

$$(\Psi) \qquad \frac{\partial \psi}{\partial \xi}, \quad \frac{d\psi}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial \psi}{d\zeta}.$$

Soit alors un vecteur de point quelconque du premier ordre ayant pour projections

$$\lambda, \quad \mu, \quad \nu;$$

les trois fonctions

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \lambda\xi + \mu\eta + \nu\zeta &= \text{A}, \\ \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \nu \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} &= \text{B}, \\ \lambda \frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial \psi}{\partial \eta} + \nu \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} &= \text{C}, \end{aligned} \right.$$

étant les produits géométriques du vecteur (λ, μ, ν) par les trois vecteurs Ω, Φ, Ψ ont des significations indépendantes du choix des axes; ce sont donc des *fonctions de point du premier ordre.* Les quantités A, B, C s'expriment donc en fonction des six fonctions fondamentales (1).

En résolvant alors les équations (2) par rapport à λ, μ, ν, on obtiendra les projections du vecteur considéré en fonction des projections des trois vecteurs fondamentaux et des six fonctions fondamentales.

6. *Dérivées totales par rapport au temps de fonctions et vecteurs de point du premier ordre.* — Nous avons montré antérieurement (*loc. cit.*) que les dérivées totales par rapport à t de *fonctions et de vecteurs de point du premier ordre* s'expriment par des fonctions ou vecteurs de point dépendant de la vitesse et de l'accélération, accompagnés de fonctions et vecteurs du premier ordre.

Je compléterai les formules données à cet égard dans le *Journal de mathématiques* en donnant l'expression de $\frac{d\psi}{dt}$.

Si nous appelons u', v', w' les projections du vecteur accélération J de la particule fluide placée en P (x, y, z), ces quantités sont des fonctions de t, x, y, z.

Nous poserons, pour simplifier,

$$\varepsilon'_1 = \frac{\partial u'}{\partial x}, \qquad \varepsilon'_2 = \frac{\partial v'}{\partial y}, \qquad \varepsilon'_3 = \frac{\partial w'}{\partial z},$$

$$\gamma'_1 = \frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z}, \qquad \gamma'_2 = \frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x}, \qquad \gamma'_3 = \frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y},$$

$$2\xi' = \frac{\partial w'}{\partial y} - \frac{\partial v'}{\partial z}, \qquad 2\eta' = \frac{\partial u'}{\partial z} - \frac{\partial w'}{\partial x}, \qquad 2\zeta' = \frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{\partial u'}{\partial y}.$$

Nous aurons alors, d'après les expressions de

$$\frac{d\xi}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{dE_1}{dt}, \quad \ldots, \quad \frac{d\Gamma_1}{dt}, \quad \ldots,$$

données dans les *Comptes rendus* du 26 janvier 1903 et dans le *Journal de Mathématiques,* les formules suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dt} = \frac{\partial\psi}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{d\eta}{dt} + \frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\frac{d\zeta}{dt} \\ + \xi^2\frac{dE_1}{dt} + \eta^2\frac{dE_2}{dt} + \zeta^2\frac{dE_3}{dt} \\ + \eta\zeta\frac{d\Gamma_1}{dt} + \zeta\xi\frac{d\Gamma_2}{dt} + \xi\eta\frac{d\Gamma_3}{dt}.\end{aligned}$$

La première partie

$$\frac{d\psi}{\partial\xi}\frac{d\xi}{dt}+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\frac{d\eta}{dt}+\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\frac{d\zeta}{dt}$$

est égale à

$$\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\xi'+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\eta'+\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\zeta'-2\theta\psi+2\varkappa\Omega^2;$$

la seconde partie, composée des six derniers termes, est égale à

$$\begin{aligned}&\Sigma\left[(4\varepsilon_2\varepsilon'_3+4\varepsilon_3\varepsilon'_2-2\gamma_1\gamma'_1)\xi^2+2(\gamma_2\gamma'_3+\gamma_3\gamma'_2-2\varepsilon_1\gamma'_1-2\gamma_1\varepsilon'_1)\eta\zeta\right]\\&\quad-\theta\psi+\varkappa\Omega^2-4\varphi\Omega^2+4\theta\Omega^4.\end{aligned}$$

On a donc enfin

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dt}=&\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\xi'+\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\eta'+\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\zeta'\\&+\Sigma\left[(4\varepsilon_2\varepsilon'_3+4\varepsilon_3\varepsilon'_2-2\gamma_1\gamma'_1)\xi^2+2(\gamma_2\gamma'_3+\gamma_3\gamma'_2-2\varepsilon\gamma'_1-2\gamma_1\varepsilon'_1)\eta\zeta\right]\\&-3\theta\psi+3\varkappa\Omega^2-4\varphi\Omega^2+4\theta\Omega^4.\end{aligned}$$

Dans cette formule, la première et la deuxième ligne du second membre forment chacune un invariant simultané des deux vecteurs vitesse et accélération.

Je me bornerai à cette formule, en laissant de côté le calcul des dérivées géométriques des vecteurs fondamentaux Φ et Ψ

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right),\quad\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right),\quad\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right),\\\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right),\quad\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\eta}\right),\quad\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\right),\end{gathered}$$

qui se fait aisément à l'aide des formules précédentes.