

BULLETIN DE LA S. M. F.

RAOUL PERRIN

Sur quelques conséquences géométriques de l'équation différentielle des coniques

Bulletin de la S. M. F., tome 31 (1903), p. 54-64

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1903__31__54_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1903, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR QUELQUES CONSÉQUENCES GÉOMÉTRIQUES DE L'ÉQUATION
DIFFÉRENTIELLE DES CONIQUES;**

Par M. RAOUL PERRIN.

I. L'équation différentielle des coniques

(1) $9y''^2y^v - 45y''y'''y^{iv} + 40y'''^2 = 0.$

admet, comme il est aisé de le vérifier, l'intégrale première

$$(2) \quad y''^3 = k(3y''y^{iv} - 5y'''^2)^3.$$

Chaque valeur de la constante arbitraire k caractérise évidemment une famille de coniques. On voit immédiatement que la valeur $k = 0$ caractérise le système des droites du plan, la valeur $k = \infty$ celui des paraboles, puisque l'équation différentielle des paraboles est, comme on sait,

$$(3) \quad 3y''y^{iv} - 5y'''^2 = 0,$$

Mais il est intéressant de rechercher la signification générale de k au point de vue géométrique.

Pour l'obtenir, partons de l'équation générale d'une conique sous la forme

$$(4) \quad ax^2 + 2hxy + by^2 + 2fy + 2gx + c = 0.$$

d'où, posant pour abréger

$$\begin{cases} u = -(hx + f), & v = -\delta x^2 + 2(fh - bg)x + f^2 - bc, \\ \delta = ab - h^2, \end{cases}$$

on tire

$$(5) \quad y = \frac{1}{b}(u \pm \sqrt{v}).$$

Formant les dérivées successives de (5), et tenant compte des relations

$$u'' = v''' = 0, \quad v'' = -2\delta, \quad 2v v'' - v'^2 = 4b\Delta,$$

où Δ est le discriminant de la conique, $abc + \dots$, on trouve successivement

$$\begin{aligned} y'' &= \pm \Delta v^{-\frac{3}{2}}, \\ y''' &= \mp \frac{3}{2} \Delta v^{-\frac{5}{2}} v', \\ y^{iv} &= \pm \frac{3}{4} \Delta v^{-\frac{7}{2}} (5v'^2 - 2v v''), \\ 3y''y^{iv} - 5y'''^2 &= 9\delta \Delta^2 v^{-4}. \end{aligned}$$

L'équation (2) donne alors

$$k = \frac{\Delta^2}{3^6 \delta^3}.$$

Mais on sait que si α , β sont les deux demi-axes de la conique, et ω l'angle des axes des coordonnées, on a

$$\frac{\Delta^2}{\delta^3} = \frac{\alpha^2 \beta^2}{\sin^2 \omega},$$

en sorte qu'on peut écrire

$$(6) \quad k = \frac{\alpha^2 \beta^2}{729 \sin^2 \omega}.$$

L'aire de l'ellipse étant $\pi\alpha\beta$, appelons par analogie aire d'une conique quelconque, et désignons par S , cette quantité $\pi\alpha\beta$; elle sera réelle et positive s'il s'agit d'une ellipse, réelle et négative s'il s'agit d'une ellipse imaginaire; imaginaire pour une hyperbole, nulle pour un système de deux droites, infinie pour une parabole. On aura alors cette valeur de k

$$k = \frac{S^2}{729 \pi^2 \sin^2 \omega},$$

et l'équation (2) deviendra

$$(7) \quad 729 \pi^2 y''^8 \sin^2 \omega = S^2 (3 y'' y^{1v} - 5 y^{m2})^3.$$

L'équation (7), intégrale première de (1), représente donc toutes les coniques du plan qui ont même aire S . S^2 étant positif ou négatif suivant que la conique est du genre ellipse ou du genre hyperbole, on en conclut immédiatement que l'expression

$$J = 3 y'' y^{1v} - 5 y^{m2},$$

formée avec les coefficients différentiels relatifs à un même point quelconque d'une conique donnée, est positive, nulle ou négative, suivant que cette conique est une ellipse, une parabole ou une hyperbole.

II. Considérons maintenant une courbe plane quelconque. La courbure en un quelconque de ses points est habituellement mesurée par l'inverse du rayon R du cercle mené par ce point et par deux autres points consécutifs infiniment voisins; ce qui revient à la définir au moyen de l'aire du cercle de courbure, aire dont l'expression est

$$(8) \quad C = \frac{\pi(1 + y'^2)^3}{y''^2},$$

(en supposant les axes rectangulaires). Mais au lieu d'un cercle, rien n'empêche de considérer une conique triosculatrice, c'est-à-dire assujettie à passer par cinq points consécutifs de la courbe. Le carré de l'aire S de cette conique sera déterminé, en fonction des valeurs des coefficients différentiels de la courbe au point dont il s'agit, par la formule (7) en y faisant $\omega = \frac{\pi}{2}$; on sera donc

$$(9) \quad S^2 = \frac{729 \pi^2 y''^8}{(3 y'' y^{iv} - 5 y'''^2)^3},$$

et l'on pourra caractériser la forme de la courbe en ses points successifs par les valeurs successives de S^2 , et dire en particulier qu'un point appartient au type elliptique, hyperbolique ou parabolique, suivant que la valeur de S^2 y est positive, négative ou infinie. Par raisons de continuité, toute branche réelle de la courbe se divisera en régions de types alternativement elliptique et hyperbolique, séparées par des points de type parabolique, en nombre fini. Quant aux points d'inflexion pour lesquels $y'' = 0$, la formule (9) montre qu'ils ne peuvent *en général* servir de transition du type elliptique au type hyperbolique, mais qu'ils se rencontrent exclusivement dans les régions de type hyperbolique : car pour y'' suffisamment voisin de zéro, S^2 prend le signe négatif de $(-5 y'''^2)^3$. Il n'en pourrait être autrement que si y''' tendait vers 0 en même temps que y'' , c'est-à-dire si le point d'inflexion était en même temps point d'ondulation, auquel cas il serait de type parabolique, puisque la relation (3) y serait satisfaite; ce serait en outre un de ces points sextactiques (où l'on peut mener à la courbe une conique *quadriosculatrice*) où l'équation (1) est satisfaite, et que l'on sait être au nombre de $3m(4m-9)$ sur la courbe générale de degré m .

D'autre part, si l'on annule $\frac{d(S^2)}{dx}$, on retombe sur l'équation (1).

On peut donc se représenter comme suit la répartition, sur les branches réelles d'une courbe quelconque, des points de type elliptique, hyperbolique, parabolique, des points sextactiques et des points d'inflexion.

En partant d'un point arbitraire appartenant par exemple au type elliptique, et marchant toujours dans un même sens déterminé sur la branche réelle, on trouvera des valeurs de S^2 crois-

sant par exemple jusqu'à un certain maximum qui correspondra à un point sextactique, puis décroissant jusqu'à un certain minimum (toujours positif) correspondant à un autre point sextactique, et ainsi de suite, jusqu'à ce qu'on revienne au point de départ, ou que S^2 passe du positif au négatif en passant par l'infini, ce qui correspondra à un point de type parabolique. Alors commencera une région de type hyperbolique où les maxima et minima de S^2 correspondront encore à des points sextactiques, sauf les maxima (algébriques) dont la valeur est 0, et qui correspondront à des points d'inflexion; ensuite viendra un point parabolique ramenant dans une région de type elliptique, et ainsi de suite. De cet aperçu résultent immédiatement, lorsqu'il n'existe pas de points exceptionnels (d'ondulation, sextactiques doubles, paraboliques doubles, etc.), les conséquences suivantes :

1° Sur chaque branche réelle complète (c'est-à-dire parcourue dans le même sens jusqu'à revenir au point de départ, en traversant, s'il y a lieu, la droite de l'infini), il existe un nombre *pair* de points de type parabolique.

2° Si ce nombre est zéro, la branche appartient tout entière à un même type, et elle contient un nombre *pair* de points sextactiques (au moins 2). Toutefois, si le type est hyperbolique, la moitié *au plus* de ces points sextactiques peut être remplacée par un nombre égal de points d'inflexion.

3° Si le nombre des points paraboliques n'est pas nul, ces points délimitent un nombre *pair* de régions appartenant alternativement aux types elliptique et hyperbolique; chacune d'elles contient un nombre *impair* $2\sigma - 1$ de points sextactiques (un au moins par conséquent), dont σ *au plus*, dans les régions du type hyperbolique, peuvent être remplacés par des points d'inflexion.

4° Toute branche complète contient au moins autant de points sextactiques que de points d'inflexion, et la différence est un nombre pair; il en est de même par conséquent pour la courbe dans son ensemble. Les formules qui donnent les nombres de points des deux catégories $3m(4m - 9)$ et $3m(m - 2)$ respectivement) pour la courbe de degré m , montrent d'ailleurs que la différence, en ne considérant que les points réels, est un nombre pair pour l'ensemble de la courbe.

III. L'équation différentielle (3) des paraboles admet l'intégrale première évidente :

$$(10) \quad y''^3 - k' y''' = 0.$$

A chaque valeur de k' correspond une famille de paraboles. Pour la caractériser géométriquement, il suffit de reprendre le calcul du Paragraphe I en y supposant $\delta = 0$; on trouve ainsi

$$k' = \frac{g\sqrt{b} - f\sqrt{a}}{27b\sqrt{b}}.$$

Mais on sait que si p est le paramètre principal de la parabole, ω l'angle des axes de coordonnées, θ l'angle que fait l'axe de la parabole avec l'axe des x , on a

$$p = \frac{2(f\sqrt{a} - g\sqrt{b}) \sin^2 \omega}{(a + b - 2\sqrt{ab} \cos \omega)^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\sin \theta}{\sin(\omega - \theta)} = -\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

On en conclut, tous calculs faits :

$$k' = -\frac{p \sin \omega}{54 \sin^3(\omega - \theta)},$$

et l'équation (10) devient

$$(11) \quad 54 y''^3 \sin^3(\omega - \theta) + p \sin \omega y''' = 0.$$

Telle est l'équation différentielle des paraboles pour lesquelles la longueur $P = \frac{p \sin \omega}{\sin^3(\omega - \theta)}$ (expression qui se réduit à $\frac{P}{\cos^3 \theta}$, si les axes sont rectangulaires) a une valeur déterminée.

Si, en un point d'une courbe quelconque, on considère la parabole biosculatrice, la valeur de P afférente à cette parabole sera donnée par la formule

$$(12) \quad P = -\frac{54 y''^5}{y'''^3}$$

en y mettant pour y'' et y''' les valeurs des coefficients différentiels au point considéré, tirées de l'équation de la courbe. En marchant le long d'une branche réelle on trouvera ainsi des valeurs variables de P pouvant changer de signe en passant soit par zéro (points d'inflexion) soit par l'infini (points où la parabole

biosculatrice a son axe parallèle à l'axe des y , et que l'on pourrait appeler sommets paraboliques); et aussi pouvant passer par des maxima et des minima, où la condition (3) étant satisfaite, le point sera un de ces points de type parabolique définis ci-dessus au Paragraphe II, où la conique triosculatrice est une parabole. Comme le nombre des changements de signe de P est nécessairement *pair* pour une branche complète de la courbe (abstraction faite de l'existence de points exceptionnels), et qu'entre deux sommets paraboliques il existe au moins soit un point d'inflexion, soit un point de type parabolique, on peut affirmer que sur une branche complète il existe au moins autant de points d'inflexion et de type parabolique ensemble, que de sommets paraboliques, la différence étant un nombre pair; et que le nombre des points d'inflexion et des sommets paraboliques ensemble est pair. On en conclurait de nouveau, comme il a été établi ci-dessus, que le nombre total des points de type parabolique est pair.

IV. On peut transformer en une relation entre éléments purement géométriques la relation que fournit entre les valeurs des divers coefficients différentiels successifs correspondant à un même point quelconque d'une des courbes appartenant à une famille donnée, l'équation différentielle générale de cette famille. Il suffit de remarquer que le deuxième coefficient différentiel y'' , est lié d'une manière simple au rayon de courbure; le troisième y''' , au rayon de courbure de la développée au point correspondant, et ainsi de suite.

Désignons donc par φ l'angle que fait avec l'axe des x la tangente à une courbe C en l'un quelconque M de ses points; par R et M_1 , son rayon et son centre de courbure en M ; par ρ_1 et M_2 le rayon et le centre de courbure de la première développée C_1 , de C au point M_1 ; par ρ_2 et M_3 le rayon et le centre de courbure de la développée C_2 de C_1 (ou deuxième développée de C) au point M_2 ; et ainsi de suite, en convenant de représenter par R , ρ_1 , ρ_2 , ... non pas les longueurs absolues de ces rayons de courbure, mais leurs longueurs affectées du signe convenable pour que R , ρ_1 , ρ_2 , ... soient les dérivées successives de l'arc s de la courbe C par rapport à φ . Il est aisé de voir que le sens positif

de l'accroissement de s étant choisi à volonté sur la courbe C , et celui de l'accroissement de φ étant choisi comme on le fait d'ordinaire en trigonométrie, chacune des longueurs absolues des rayons de courbure devra être considérée comme affectée du signe + ou du signe —, suivant qu'un observateur parcourant la courbe correspondante dans le sens *positif* voit le centre de courbure à sa gauche ou à sa droite, le sens positif sur chaque développée étant d'ailleurs le même que sur le rayon de courbure de la développée précédente, qui lui est tangent. En d'autres termes, puisque les tangentes aux points correspondants de deux développées consécutives C_n et C_{n+1} sont à angle droit, on peut dire que le sens positif sur C_{n+1} traverse de la droite vers la gauche le sens positif sur C_n ; d'où il résulte encore que sur C_n et C_{n+2} , qui ont leurs tangentes parallèles en leurs points correspondants, les sens positifs sont opposés l'un à l'autre.

La signification géométrique des quantités $R, \rho_1, \rho_2 \dots$ étant ainsi bien définie, il suffit de remplacer dans l'équation différentielle donnée d'ordre p , représentant une famille de courbes admettant p paramètres arbitraires, les coefficients différentiels y'', y''', \dots par leurs expressions en R, ρ_1, \dots qui sont les suivantes, pour les 4 premiers d'entre eux :

$$(13) \quad \begin{cases} y'' = w^{\frac{3}{2}} R^{-1}, \\ y''' = w^2 R^{-3} (3Ry' - \rho_1), \\ y^{IV} = w^{\frac{5}{2}} R^{-5} [3R^2(1 + 5y'^2) - R(\rho_2 + 10\rho_1 y') + 3\rho_1^2], \\ y^V = w^3 R^{-7} [15R^3 y'(3 + 7y'^2) - R^2(\rho_3 + 15\rho_2 y') \\ \quad + (19 + 105y'^2 \rho_1) + 55R\rho_1^2 y' - 15\rho_1^3]. \end{cases}$$

(Dans ces formules $w = 1 + y'^2$).

Le résultat de la substitution sera une équation entre $y', R, \rho_1, \dots, \rho_{p-2}$. Il peut arriver que y' disparaisse de lui-même; sinon, on formera la dérivée par rapport à φ , en utilisant les formules

$$(14) \quad \frac{dx}{d\varphi} = R w^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{dy}{d\varphi} = R y' w^{-\frac{1}{2}}, \quad \frac{dy'}{d\varphi} = w, \quad \frac{dw}{d\varphi} = 2y' w,$$

et en éliminant y' , on aura une équation entre les seules longueurs $R, \rho_1, \dots, \rho_{p-1}$. On pourra aussi éliminer x et y par le

même procédé, s'ils entraient dans l'équation dont on est parti; et l'on obtiendra, dans tous les cas, une relation entre R , ρ_1 , ..., indépendante de la position et de l'orientation de la courbe dans le plan.

Appliquons ce procédé à l'équation différentielle (3) des paraboles. En y substituant pour y'' , y''' , y^{iv} leurs expressions tirées de (13), elle devient :

$$(15) \quad R^{-6} \omega^4 (9R^2 - 3R\rho_2 + 4\rho_1^2) = 0,$$

et se décompose ainsi en 3 équations, savoir :

$$\frac{1}{R} = 0,$$

qui représente toutes les droites réelles du plan;

$$\omega \equiv 1 + y'^2 = 0,$$

qui représente toutes les droites isotropes; et enfin

$$(16) \quad 9R^2 - 3R\rho_2 + 4\rho_1^2 = 0,$$

qui est l'équation cherchée, représentant toutes les paraboles.

Les équations telles que (16) peuvent être considérées soit comme des équations intrinsèques généralisées, soit comme des équations différentielles où la variable est φ , la fonction R et ses dérivées successives ρ_1 , ρ_2 , ..., ou, si on le préfère, la fonction est l'arc s de la courbe, et ses dérivées successives sont R , ρ_1 , Elles se prêtent de la manière la plus simple au calcul des équations du même genre pour les courbes parallèles, les développées et les développantes de tous les ordres. Ainsi pour les courbes parallèles, tracées à une distance donnée l , il suffit de remplacer dans l'équation R par $R \pm l$. Pour les développantes d'ordre p , il suffit d'augmenter de p tous les indices des lettres ρ (R étant regardé comme équivalent à ρ_0). Pour la $p^{\text{ième}}$ développée, il suffit de différentier p fois l'équation par rapport à φ , d'éliminer R , ρ_1 , ..., ρ_{p-1} entre les $p+1$ équations ainsi obtenues, et de diminuer de p tous les indices des lettres ρ .

En opérant ainsi sur l'équation (16), on trouve pour les courbes qui sont des premières développées de paraboles, l'équa-

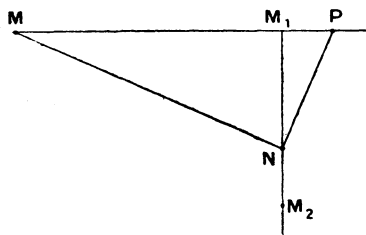
tion générale

$$(17) \quad 144R^3 - 48R^2\rho_2 + R(4\rho_2^2 + 55\rho_1^2) - 5\rho_1^2\rho_2 = 0.$$

Pour obtenir l'équation différentielle ordinaire de ces courbes, il suffirait de remplacer dans (17) R, ρ_1, ρ_2 par leurs expressions en fonction de y', y'', y''', y^{iv} , savoir

$$(18) \quad \begin{cases} R = \omega^{\frac{2}{3}} y''^{-1}, \\ \rho_1 = R(3y' - \omega y''^{-2} y'''), \\ \rho_2 = R[3(1 + 4y'^2) - 8\omega y' y''^{-2} y''' + \omega^2 y''^{-4} (3y''^{-2} y'' y^{iv})]. \end{cases}$$

L'équation (16) fournit une construction simple du rayon de



courbure de la deuxième développée d'une parabole, connaissant les rayons de courbure MM_1 de la parabole et M_1, M_2 de sa première développée : il suffit de prendre $\overline{M_1N} = \frac{2}{3} \overline{M_1M_2}$, de joindre MN , d'élever NP perpendiculaire à MN jusqu'à sa rencontre avec MM_1 prolongée ; MP est le tiers du rayon demandé.

Pour obtenir l'équation générale des coniques, analogue à (16), on pourrait de même remplacer dans (1) y'', y''', y^{iv}, y^v par leurs expressions (13). Mais le calcul est beaucoup plus simple en partant de l'intégrale de (1) prise sous la forme (7) (avec $\omega = \frac{\pi}{2}$). On arrive immédiatement, en tenant compte de (15), à l'équation

$$(19) \quad 729\pi^2 R^{10} = S^2(9R^2 - 3R\rho_2 + 4\rho_1^2)^3,$$

qui donne déjà une relation entre l'aire S d'une conique, et les rayons de courbure de cette conique et de ses deux premières développées en 3 points correspondants quelconques. Cette relation peut se mettre sous une forme plus remarquable, en

désignant par C, C_1, C_2 , les aires des 3 cercles de courbure en un point quelconque M de la conique, et aux points correspondants M_1 et M_2 de ses deux premières développées; elle devient alors en effet

$$(20) \quad \frac{S}{C} = \left(1 + \frac{4}{9} \frac{C_1}{C} - \frac{1}{3} \sqrt{\frac{C_2}{C}} \right)^{-\frac{3}{2}}$$

formule qui donne l'aire S de la conique en fonction des aires de ces 3 cercles de courbure.

Pour passer à l'équation générale des coniques, il suffit d'éliminer $\frac{S^2}{729\pi^2}$ entre l'équation (19) et sa dérivée, savoir

$$7290\pi^2 R^3 \rho_1 = 3S^2(9R^2 + 4\rho_1^2 - 3R\rho_2)^2(18R\rho_1 - 3R\rho_3 + 5\rho_1\rho_2),$$

ce qui donne

$$(21) \quad 9R^2(\rho_3 + 4\rho_1) - 45R\rho_1\rho_2 + 40\rho_1^3 = 0.$$

C'est l'équation demandée; elle fournit l'expression du rayon de courbure ρ_3 de la troisième développée d'une conique, quand on se donne ceux de la conique et de ses deux premières développées en des points correspondants. Elle présente, d'ailleurs, une analogie frappante avec l'équation (1) : les coefficients numériques sont les mêmes, et l'on passe de (1) à (21) en remplaçant y'', y''', y^{iv}, y^v , respectivement par $R, \rho_1, \rho_2, \rho_3 + 4\rho_1$.

Je me propose d'étudier spécialement, dans un travail ultérieur, les propriétés de ces équations différentielles intrinsèques, telles que (16), (17), (21), et de former celles qui représentent diverses familles de courbes. Pour le moment, je me bornerai à signaler la curieuse propriété que voici :

Appelons *poids* d'un terme, dans une expression telle que le premier membre de (21), la somme des produits de l'indice de chaque lettre ρ par son exposant. Pour que l'équation *finie* des courbes d'une même famille puisse s'obtenir en égalant à zéro une fonction de x et de y *symétrique* par rapport à ces deux lettres, abstraction faite des valeurs données à certaines constantes, il faut et il suffit que l'équation correspondante en R, ρ_1, \dots, ρ_p , où ces constantes ont toutes disparu, ne comprenne que des termes dont les poids soient tous *de même parité*.