BULLETIN DE LA S. M. F.

H. LEBESGUE

Sur le problème des aires

Bulletin de la S. M. F., tome 31 (1903), p. 197-203

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1903__31__197_1>

SUR LE PROBLÈME DES AIRES;

Par M. H. Lebesgue.

Dans ma thèse *Intégrale, Longueur, Aire,* parue aux *Annali di Matematica* en 1902, j'ai étudié le problème des aires des domaines plans. L'un des énoncés que j'avais choisis pour ce problème était le suivant :

Attacher à chaque domaine plan un nombre positif, que l'on appellera son aire, *et satisfaisant aux conditions suivantes :*

Deux domaines superposables ont la même aire.

Le domaine formé par la réunion de deux domaines, sans points intérieurs communs, ayant en commun un arc de fron-

tière et un seul, a pour aire la somme des aires des domaines composants.

Avec cet énoncé, le problème des aires est déterminé quand on se borne aux polygones, comme l'ont montré MM. Gérard et Hadamard. Il l'est aussi pour les domaines quarrables, au sens de M. Jordan, c'est-à-dire pour ceux dont la frontière peut être enfermée dans un nombre fini de carrés dont la somme des aires, au sens ordinaire du mot, est aussi petite que l'on veut. Au paragraphe 14 de ma Thèse, j'ai indiqué quelques raisonnements qui montrent que le problème des aires est indéterminé pour les domaines non quarrables; mais l'exposition que j'ai donnée de ces raisonnements est inexacte et incomplète. Je vais reprendre ici la question.

Considérons deux domaines D_1, D_2 ayant un arc α de frontière en commun. Soient α, α_1 ; α, α_2 les frontières de D_1 et D_2. Soit A un point de α, non confondu avec l'une des extrémités de α. De A pour centre, on peut décrire une circonférence Γ assez petite pour qu'elle ne contienne aucun point de α_1 ni de α_2 ; et cela quels que soient les arcs α_1 et α_2, qu'ils aient ou non des points communs, pourvu que D_1 et D_2 soient deux domaines. A l'intérieur de Γ se trouvent des arcs de α, soit lm celui qui contient A. Prenons sur lm deux points a et b, différents de l et m, et de part et d'autre de A. Si l'on se reporte aux raisonnements qui servent à M. Jordan (*Traité d'Analyse*, 2e édit., t. I) à démontrer qu'une courbe fermée, sans point double, sépare le plan en deux régions, on verra qu'à l'intérieur de Γ il est possible de tracer une courbe C, tout entière dans D_1, et joignant a et b, et une courbe C′ joignant les mêmes points et extérieure à D_1.

Le domaine Δ limité par C et l'arc aAb est intérieur à D_1, le domaine Δ' limité par C′ et aAb est extérieur à D_1. Aucun point des arcs α, α_2 n'est intérieur aux domaines Δ et Δ'; donc, ou bien Δ est intérieur à D_2 et Δ' extérieur à D_2, ou bien Δ est extérieur à D_2 et Δ' intérieur à D_2. Ce sont bien les deux seules hypothèses possibles, car le domaine $\Delta + \Delta'$, contenant A et tous les points voisins de A, contient des points intérieurs à D_2 et des points extérieurs à ce domaine. Lorsque Δ est intérieur à D_2, nous dirons qu'en A, D_1 et D_2 sont du même côté de α. Lorsque Δ est extérieur à D_2, nous dirons qu'en A, D_1 et D_2 sont de côtés différents de α. Ces définitions sont légitimes, car elles ne dépendent évidemment pas du choix de Γ, a, b, C, C'.

Ceci posé, la considération de Δ et Δ' donne, non seulement la position respective de D_1 et D_2 en A, mais pour tous les points de l'arc α qui sont compris entre a et b. Ceci revient à dire que si D_1 et D_2 sont d'un même côté de α en un point, ils sont du même côté de α en tous ses points, les extrémités étant exclues de nos considérations. Lorsqu'il en est ainsi, on dit que D_1 et D_2 sont du même côté de α; dans le cas contraire on dit qu'ils sont de côtés différents. Nous avons ainsi précisé ce que l'on doit entendre par les deux côtés de α.

Soit un arc de courbe $\alpha\beta$, sans point multiple et non quarrable faisant partie de la frontière d'un domaine Δ. Soit maintenant un domaine quelconque D limité par une courbe C. C peut contenir des arcs non quarrables superposables à certains arcs de $\alpha\beta$.

Si A est un tel arc et si, lorsque l'on effectue la superposition d'une partie non quarrable quelconque A' de A avec l'un quelconque des arcs de $\alpha\beta$ qui lui sont égaux, D et Δ sont toujours du même côté de A', A sera dit un *arc de la première espèce*.

Si B est un arc non quarrable de C tel que, lorsque l'on effectue la superposition d'une partie non quarrable quelconque B' de B avec l'un quelconque des arcs de $\alpha\beta$ qui lui sont égaux, D et Δ sont toujours de côtés différents de B', B sera dit un arc de la seconde espèce.

Les autres arcs de C seront de la troisième espèce.

Choisissons arbitrairement, une fois pour toutes, un nombre positif θ, inférieur à 1, et attribuons comme aire à D le nombre

$$m + \theta m(A) + (1 - \theta) m(B),$$

où m désigne la mesure superficielle des points intérieurs à D, c'est-à-dire l'étendue intérieure, au sens de M. Jordan, de D, où $m(A)$ et $m(B)$ désignent les sommes des mesures superficielles des arcs de la première et de la deuxième espèce, c'est-à-dire les sommes des étendues extérieures, au sens de M. Jordan, de ces arcs.

Il est évident que l'aire ainsi construite satisfait bien aux conditions que nous nous sommes imposées.

Dans le Paragraphe 14 de ma Thèse, j'établissais la classification des arcs de C en laissant D et Δ immobiles, là est l'erreur que je signalais au début, car alors à deux domaines superposables pourraient correspondre des aires différentes. Cette erreur rectifiée, je dois montrer qu'on peut choisir $\alpha\beta$ de façon qu'il existe effectivement des arcs des deux premières espèces, sans quoi l'aire construite ne dépendrait pas de θ. L'existence de tels arcs n'est, avec la nouvelle classification, nullement évidente; il n'existerait que des arcs de la troisième espèce si l'arc $\alpha\beta$ avait un centre situé sur lui.

La classification des arcs en trois espèces s'applique au domaine Δ lui-même et à l'arc $\alpha\beta$; seulement aucun arc de $\alpha\beta$ n'est de la seconde espèce. La courbe que je vais construire, en modifiant légèrement la méthode qu'emploie M. Hilbert [1] pour obtenir une courbe passant par tous les points d'un carré, est telle que tout arc non quarrable de cette courbe est de la première espèce.

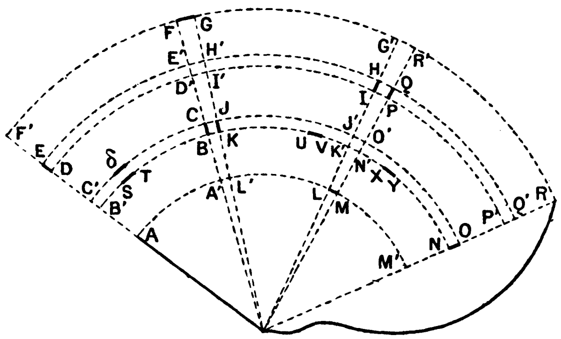
La courbe sera donnée par les formules

$$x = f(t), \qquad y = \varphi(t),$$

où f et φ sont des fonctions continues quand t varie de o à 1.

Traçons (*fig.* 1) les droites $\Omega AF'$, $\Omega M'R$ et les deux arcs de

Fig. 1.



cercle de centre Ω, AM', $F'R$. Pour $t = 0$ le point x, y est en A,

[1] *Mathematische Annalen*, Bd. 38, ou E. Picard, *Traité d'Analyse*, 2ᵉ édition, t. I.

pour $t=1$ il est en R, pour t compris entre 0 et 1 il est dans le domaine AF′RM′.

Marquons entre 0 et 1 les valeurs de t de la forme $\frac{p}{9}\pm\varepsilon$, où p est entier; traçons les rayons ΩF, ΩG, ΩG′, ΩR′ et les arcs B′N, C′O, DP′, EQ′ tels que

$$F'F = GG' = R'R, \qquad AB' = C'D = EF',$$
$$FG = G'R' = B'C' = DE = \varepsilon.$$

Pour les valeurs $\frac{1}{9}-\varepsilon$, $\frac{1}{9}+\varepsilon$, $\frac{2}{9}-\varepsilon$, ..., $\frac{8}{9}+\varepsilon$, le point x, y occupe les positions B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P, Q. Quand t varie de $\frac{p}{9}-\varepsilon$ à $\frac{p}{9}+\varepsilon$, le point x, y décrit la droite issue de Ω, ou l'arc de cercle de centre Ω qui joint les deux points correspondant aux valeurs $\frac{p}{9}-\varepsilon$, $\frac{p}{9}+\varepsilon$. Enfin, quand t varie de $\frac{p}{9}+\varepsilon$ à $\frac{p+1}{9}-\varepsilon$, le point x, y reste dans celui des domaines, tel que AA′BB′, dont deux sommets opposés sont les points correspondant à $t=\frac{p}{9}+\varepsilon$ et $t=\frac{p+1}{9}-\varepsilon$.

Nous pouvons ainsi supposer entièrement définies les fonctions f et φ dans les intervalles $\left(\frac{p}{9}-\varepsilon, \frac{p}{9}+\varepsilon\right)$; pour les définir dans les intervalles $\left(\frac{p}{9}+\varepsilon, \frac{p+1}{9}-\varepsilon\right)$, nous opérons sur chacun de ces intervalles comme sur (0, 1), et sur chacun des domaines, tels que AA′BB′, comme sur AF′RM′, en remplaçant ε par une quantité plus petite ε_1, assez petite pour que les opérations soient possibles. Après cette opération, il restera 9^2 intervalles dans lesquels f et φ ne sont pas définies; on répétera sur eux les mêmes opérations en remplaçant ε par ε_2. Si les ε sont choisis assez décroissants, on ne sera jamais arrêté dans ces opérations et l'on définira f et φ pour un ensemble de valeurs de t partout dense dans (0, 1); ce qui suffit pour les déterminer entièrement puisque f et φ sont continues.

La courbe AR ainsi définie est celle qui va jouer le rôle de $\alpha\beta$; cette courbe est en effet non quarrable, si les ε tendent assez vite vers zéro. L'étendue extérieure de la courbe est la limite vers laquelle tendent les nombres décroissants A, A_1, A_2, ... qui représentent respectivement l'aire, au sens ordinaire du mot, de AF′RM′; la somme des aires des 9 domaines tels que AA′BB′; la somme des aires des 9^2 domaines correspondant à ε_2; etc. Or on a

$$\begin{aligned} A - A_1 &< 2\ \ (AF' + F'R)\varepsilon, \\ A_1 - A_2 &< 2.3\ (AF' + F'R)\varepsilon_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ A_p - A_{p+1} &< 2.3^p(AF' + F'R)\varepsilon_p. \end{aligned}$$

On peut choisir les ε de façon que la série

$$2(AF' + F'R)\sum \varepsilon_p 3^p$$

ait une somme aussi petite qu'on le veut, c'est-à-dire de façon que la limite des A_i ne soit pas nulle et la courbe AR n'est pas quarrable.

Le domaine Δ est limité par la courbe AR, la droite ΩA et une courbe ΩR telle que le secteur ΩAM′ soit intérieur à Δ. Alors on distinguera les deux côtés de AR en disant que Δ est du côté intérieur de AR.

Considérons un arc γ non quarrable de la courbe obtenue; cet arc ne se réduisant pas à une droite contient des arcs de cercle. Supposons par exemple qu'il contienne l'arc ST, relatif à ε_2, que l'on obtient pour t variant de $\frac{1}{3}\left(\frac{p}{9} - \varepsilon\right) - \varepsilon_1$ à $\frac{1}{3}\left(\frac{p}{9} - \varepsilon\right) + \varepsilon_1$. AR ne contient que deux arcs égaux à ST, les arcs UV, XY, correspondant aux intervalles

$$\left[2\frac{p}{3} - \varepsilon - \frac{1}{3}\left(\frac{p}{9} - \varepsilon\right) - \varepsilon_1,\ 2\frac{p}{3} - \varepsilon - \frac{1}{3}\left(\frac{p}{9} - \varepsilon\right) + \varepsilon_1\right],$$
$$\left[\frac{2p}{3} + \varepsilon + \frac{1}{3}\left(\frac{p}{9} - \varepsilon\right) - \varepsilon_1,\ \frac{2p}{3} + \varepsilon + \frac{1}{3}\left(\frac{p}{9} - \varepsilon\right) + \varepsilon_1\right].$$

De là résulte que γ est superposable au plus de cinq manières différentes avec des arcs de AR; dans les cinq déplacements correspondants ST prendra les positions TS, UV, VU, XY, YX.

Les cinq déplacements dont il s'agit sont donc, soit des rotations autour de Ω, soit des symétries par rapport à des droites issues de Ω, lesquelles droites sont des bissectrices d'angles tels que FΩG, SΩT. Or il est évident que dans ces opérations le côté intérieur de γ vient coïncider avec le côté intérieur de AR. Cela suffit pour qu'on puisse affirmer que tout arc non quarrable de AR est de la première espèce.

Ce résultat est plus évident encore si l'on modifie quelque peu la construction de AR. La courbe AR étant construite ainsi qu'il vient d'être dit, remplaçons chaque arc de cercle δ faisant partie de cette courbe et tournant sa concavité vers l'extérieur par l'arc δ' symétrique de δ par rapport à la droite joignant les extrémités de δ. La nouvelle courbe AR ainsi construite sera sans point double; elle aura même étendue extérieure que la précédente, donc sera non quarrable. Si pour cette courbe on définit comme précédemment le côté intérieur, tout arc non quarrable de AR sera de la première espèce, car tous les arcs de cercle faisant partie de AR ont leur concavité vers l'intérieur.

Qu'il s'agisse de l'une ou de l'autre des deux courbes AR, on peut remarquer que tout arc non quarrable de AR est de la première espèce quand on effectue la classification des arcs en trois espèces en tenant compte, non seulement des superpositions d'arcs de C et de $\alpha\beta$, c'est-à-dire de AR, qui s'obtiennent par des déplacements de C, mais aussi des superpositions que l'on obtient en effectuant sur C une transformation par figure semblable quelconque. Avec cette nouvelle manière de classer les arcs, et avec les courbes AR construites, le nombre que nous avons appelé *aire* dépend effectivement de θ; il satisfait bien aux deux conditions du problème des aires et de plus est tel que, si deux domaines sont semblables, le rapport de similitude étant K, leurs aires sont dans le rapport K^2. Cette dernière condition n'était pas réalisée avec la première classification des arcs.