BULLETIN DE LA S. M. F.

L. LECORNU

Sur les lignes asymptotiques de certaines surfaces

Bulletin de la S. M. F., tome 31 (1903), p. 192-197
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1903__31__192_1>

SUR LES LIGNES ASYMPTOTIQUES DE CERTAINES SURFACES;

Par M. L. Lecornu.

Le récent article de M. A. Buhl : *Sur les surfaces dont un système de lignes asymptotiques se projette suivant une famille de courbes donnée* (*Bulletin de la Société mathématique,* 1903), m'a rappelé une Note que j'ai publiée, en 1884, dans les *Mémoires* de l'Académie de Caen : *Sur les surfaces à pente uniforme et les réseaux proportionnels*. Je désire indiquer ici quelques rapprochements entre ces deux études.

J'entends par *surface à pente uniforme* une surface dont chaque ligne de plus grande pente, prise individuellement, présente une pente constante, pente qui varie d'ailleurs suivant une loi quelconque, quand on passe d'une ligne de plus grande pente à une autre. L'exemple le plus simple est fourni par la surface de vis à filet carré et à axe vertical. On voit aisément que, sur une pareille surface, les lignes de plus grande pente forment une famille de lignes asymptotiques. Elles sont divisées par les lignes de niveau en parties proportionnelles; cette propriété subsiste en projection horizontale, et l'on obtient ainsi une famille de courbes planes divisées proportionnellement par leurs trajectoires orthogonales. C'est ce que j'appelle un *réseau proportionnel.*

L'équation différentielle des surfaces à pente uniforme est, avec les notations usuelles,

$$rp^2 + 2spq + tq^2 = 0. \tag{1}$$

Cette équation est intégrée par le système

$$(2)\qquad \begin{cases} z = e^{-\gamma}(x \sin\alpha - y\cos\alpha) + u, \\ 0 = e^{-\gamma}(x\cos\alpha + y\sin\alpha) + \dfrac{\partial u}{\partial\alpha}, \\ 0 = e^{-\gamma}(x\sin\alpha - y\cos\alpha) - \dfrac{\partial u}{\partial\gamma}, \end{cases}$$

dans lequel α, γ désignent deux paramètres arbitraires, et u une intégrale quelconque de l'équation

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial u}{\partial\gamma} = 0.$$

La vérification est aisée : la première des équations (2) donne

$$(4)\qquad p = e^{-\gamma}\sin\alpha, \qquad q = -e^{-\gamma}\cos\alpha, \qquad p^2 + q^2 = e^{-2\gamma};$$

d'où

$$rp + sq = -2e^{-2\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial x}, \qquad sp + tq = -2e^{-2\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial y},$$

et, par suite,

$$rp^2 + 2spq + tq^2 = -2e^{-3\gamma}\left(\sin\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \cos\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial y}\right).$$

Or on tire des deux dernières équations (2), en tenant compte de (3),

$$\cos\alpha - (x\cos\alpha + y\sin\alpha)\frac{\partial\gamma}{\partial x} = 0,$$

$$\sin\alpha - (x\cos\alpha + y\sin\alpha)\frac{\partial\gamma}{\partial y} = 0,$$

d'où

$$(5)\qquad \sin\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial x} - \cos\alpha\frac{\partial\gamma}{\partial y} = 0,$$

ce qui entraîne l'équation (1).

Les équations (2) montrent encore que l'on a

$$z = u + \frac{\partial u}{\partial\gamma},$$

et l'on en conclut que z est, en même temps que u, une intégrale de (3). On voit sans peine qu'il en est de même de p et q.

Revenons maintenant au travail de M. Buhl. L'auteur cherche comment on peut déterminer une surface dont l'un des systèmes de lignes asymptotiques se projette suivant une famille de courbes déterminée par l'équation différentielle donnée,

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{6}$$

L'équation différentielle de la surface cherchée est

$$r + 2fs + f^2 t = 0. \tag{7}$$

Par un changement de variables elle peut se ramener à la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} - \lambda \frac{\partial z}{\partial \gamma} = 0.$$

L'objet principal de M. Buhl est de trouver dans quels cas la fonction λ se réduit à une simple constante, qu'il est toujours permis de supposer égale à l'unité. On est alors ramené à l'intégration de l'équation (3), dont j'ai fait précisément dépendre la recherche des surfaces à pente uniforme.

Nous sommes ainsi conduits à examiner la question suivante :

A quelle condition l'équation (6) *représente-t-elle une famille de courbes appartenant à un réseau proportionnel?*

Soit $\varphi(x, y) = C$ l'intégrale de l'équation (6). On a identiquement

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} + f \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \tag{8}$$

Si l'on considère les deux courbes consécutives $\varphi(x, y) = C$ et $\varphi(x, y) = C + dC$ et si l'on veut que leurs trajectoires orthogonales les divisent proportionnellement, on doit, en appelant ds et $ds + \delta ds$ les arcs élémentaires correspondants, $\frac{d\varphi}{dn}$ la dérivée de φ suivant la normale, ρ le rayon de courbure, écrire que le rapport $\frac{\delta ds}{ds}$ égal, comme l'on sait, à $\frac{\frac{d\varphi}{dn}}{\rho}$, est constant le long de la courbe $\varphi(x, y) = C$. D'ailleurs

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{d\varphi}{dy}\sqrt{1+f^2} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x} + f\frac{\partial f}{\partial y}}{(1+f^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Si donc on pose

$$\text{(9)} \qquad F = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial x} + f\dfrac{\partial f}{\partial y}}{1+f^2},$$

on a

$$\frac{\dfrac{d\varphi}{dn}}{\rho} = F\frac{d\varphi}{dy},$$

et cette expression doit demeurer invariable quand φ est constant, c'est-à-dire quand $dy = f\,dx$. On trouve ainsi

$$F\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + f\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial x} + f\frac{\partial F}{\partial y}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

L'équation (8) donne d'ailleurs

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + f\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

La condition précédente peut donc s'écrire

$$\text{(10)} \qquad \frac{\partial F}{\partial x} + f\frac{\partial F}{\partial y} - F\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Calculons, au moyen de (9), les dérivées partielles de F et portons dans (10). Toutes réductions faites, nous obtenons

$$\text{(11)} \qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2f\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + f^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ &\quad - \frac{2f}{1+f^2}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + 2f\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} + f^2\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right] = 0,\end{aligned}\right.$$

ou bien

$$\text{(12)} \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + 2f\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y} + f^2\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2} = 0,$$

en posant $\theta = \operatorname{arc\,tang} f$.

Telle est la condition cherchée. Quand elle est vérifiée par la fonction f, le réseau proportionnel est donné par les deux dernières équations (2), d'où l'on tire

$$\text{(13)} \qquad \left\{\begin{aligned} x &= e^{\gamma}\left(\frac{\partial u}{\partial\gamma}\sin\alpha - \frac{\partial u}{\partial\alpha}\cos\alpha\right), \\ y &= e^{\gamma}\left(\frac{\partial u}{\partial\gamma}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial\alpha}\sin\alpha\right).\end{aligned}\right.$$

A chaque valeur constante de γ correspond l'une des courbes du système. La surface à pente uniforme s'obtient en adjoignant la première équation (2).

Il reste à dire comment on peut choisir la fonction u de façon à identifier la famille de courbes (13) avec une famille donnée de courbes vérifiant l'équation (12). Il suffit évidemment que les deux familles aient une courbe commune.

L'intégrale générale de (3) peut s'écrire

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{F}(\alpha + 2t\sqrt{\gamma})\,dt,$$

d'où

$$\frac{\partial u}{\partial \alpha} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{F}'(\alpha + 2t\sqrt{\gamma})\,dt,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial u}{\partial \gamma} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{F}''(\alpha + 2t\sqrt{\gamma})\,dt.$$

Pour la valeur particulière $\gamma = 0$, ces formules deviennent

$$u = \sqrt{\pi}\,\mathrm{F}(\alpha), \qquad \frac{\partial u}{\partial \alpha} = \sqrt{\pi}\,\mathrm{F}'(\alpha), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial u}{\partial \gamma} = \sqrt{\pi}\,\mathrm{F}''(\alpha),$$

et les équations (13) se réduisent alors à

$$x = \sqrt{\pi}[\sin\alpha\,\mathrm{F}''(\alpha) - \cos\alpha\,\mathrm{F}'(\alpha)],$$
$$y = \sqrt{\pi}[\cos\alpha\,\mathrm{F}''(\alpha) + \sin\alpha\,\mathrm{F}'(\alpha)].$$

En écrivant que ces valeurs vérifient l'équation $\Psi(x, y)$ d'une courbe donnée, on est évidemment conduit à une équation différentielle de premier ordre en $\mathrm{F}'(\alpha)$. La fonction F s'obtient ensuite par quadrature.

La ligne asymptotique projetée suivant la courbe pour laquelle γ est nul présente une pente de 45°; car, en vertu des équations (4), l'hypothèse $\gamma = 0$ entraîne $p^2 + q^2 = 1$. Si l'on veut s'affranchir de cette restriction, il suffit de changer γ en $\gamma + c$, c étant une constante arbitraire, et de remplacer en même temps u par ue^{-c}. Cette double modification, sans altérer les équations (13), a pour effet de multiplier z par la constante e^{-c} et, par conséquent, de multiplier par ce même facteur les pentes des lignes asymptotiques.

En résumé, le problème étudié par M. Buhl peut être résolu chaque fois que la fonction $\theta = \operatorname{arc\,tang} f$ est une solution de l'équation (12). Ce cas s'ajoute à ceux qu'il a indiqués et qui reviennent à mettre f sous la forme $\frac{B}{A}$, puis à chercher si, en appelant S une solution quelconque de (12), l'une des quantités $S\frac{A}{B}$, $S\frac{B}{A}$ est une solution, ou bien encore à vérifier s'il existe un facteur R tel que RA et RB soient simultanément des solutions.

Comme exemple particulier, j'ai cité jadis celui de certaines courbes homothétiques divisées proportionnellement par leurs trajectoires orthogonales. De pareilles courbes existent, et elles possèdent cette propriété caractéristique, que pour chacune d'elles le rayon de courbure est dans un rapport constant avec la projection, sur la normale, du rayon vecteur issu du centre d'homothétie. Lorsque ce rapport est égal à l'unité, le système est constitué par des développantes de cercles concentriques, ayant leurs points de rebroussement sur un même diamètre. La fonction u a alors pour valeur $\alpha^2 + 2\gamma$. La surface correspondante est définie par les équations très simples

$$\begin{aligned} x &= 2e^{\gamma}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha), \\ y &= 2e^{\gamma}(\cos\alpha + \alpha\sin\alpha), \\ z &= \alpha^2 + 3\gamma. \end{aligned}$$