BULLETIN DE LA S. M. F.

HADAMARD

Sur les dérivées des fonctions de lignes

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 40-43

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__40_1>

SUR LES DÉRIVÉES DES FONCTIONS DE LIGNES;

Par M. Hadamard.

Grâce aux travaux de M. Volterra ([1]) on sait étendre aux fonctions de lignes la notion de dérivée. U étant une fonction de la ligne fermée L, on fait correspondre à chaque point $M(x, y, z)$ de L trois *dérivées* $U'_x(L, M)$, $U'_y(L, M)$, $U'_z(L, M)$; moyennant quoi, si l'on varie infiniment peu, d'une manière quelconque, la ligne L, le déplacement du point (x, y, z) étant désigné par $(\delta x, \delta y, \delta z)$, on aura

$$\delta U = \int_L (U'_x \, \delta x + U'_y \, dy + U'_z \, \delta z) \, ds. \tag{1}$$

Bien entendu, l'équation précédente suppose l'existence des trois dérivées, ainsi que les autres hypothèses faites par M. Volterra dans les Mémoires auxquels nous faisons allusion, et cela *en chaque point*, sans aucune exception.

Il serait bien facile de former des exemples dans lesquels, les hypothèses en question n'étant pas vérifiées en tous les points, l'équation (1) est en défaut. Il suffira, par exemple, de prendre

$$U = \int F\left(x, y, z, \frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^2z}{dx^2}, \dots\right) dx,$$

l'intégrale étant prise, non suivant toute la ligne L, mais suivant l'arc AB de cette ligne (ou, s'il y a lieu, suivant les arcs) compris à l'intérieur d'un volume donné. Il est clair que, dans ce cas, la formule (1) devra être complétée par l'addition de termes de la forme

$$P_x \delta x + P_y \delta y + P_z \delta z + P_{y'} \delta y' + P_{z'} \delta z' + \dots, \tag{2}$$

x, y, z désignant les coordonnées du point A ou du point B,

([1]) *Rendiconti dell'Accad. dei Lincei*, 4e série, t. III, 1887, passim; *Acta mathematica*, t. XII, 1889, p. 233 et suivantes.

x', y', z' les valeurs correspondantes de dy, dz, ...; δx, δy, δz, $\delta y'$, $\delta z'$, ..., les variations de ces quantités. De tels cas ont également été considérés par M. Volterra [1].

Il semble d'ailleurs que, depuis les travaux de MM. Pincherle et Bourlet [2], il soit possible de remplacer utilement ces hypothèses, évidemment particulières, par d'autres plus générales. Il est, en effet, rationnel d'admettre, en tout cas, que δU est ce que M. Pincherle a appelé une *fonction distributive,* M. Bourlet une fonction *additive* et moi-même [3] une fonction *linéaire* des quantités δx, δy, δz, considérées comme fonctions de s. Or les travaux en question permettent, au moins dans le cas des opérations analytiques, de se faire une idée de la forme générale de pareilles fonctions. Cette forme est d'ailleurs, au fond, très voisine de celle qu'avait envisagée M. Volterra.

Celui-ci a, d'autre part [4], défini les dérivées secondes de U, lesquelles sont fonctions de L, du point $M(x, y, z)$ précédemment pris sur cette ligne pour définir les dérivées premières, et d'un second point analogue $M_1(x_1, y_1, z_1)$ de L. Il a montré qu'entre ces dérivées existent un certain nombre de relations correspondant au théorème de l'inversion des différentiations.

Les relations en question s'obtiennent aisément en supposant que la forme de la ligne L dépend de deux paramètres, λ et μ, et écrivant l'identité

$$\frac{\delta^2 U}{\delta\lambda\,\delta\mu} = \frac{\delta^2 U}{\delta\mu\,\delta\lambda}. \tag{3}$$

Mais ce mode de raisonnement donne, outre les relations de M. Volterra, une autre conséquence, qui est celle sur laquelle je désire appeler l'attention : c'est que la formule (1) ne s'applique pas à la dérivée U'_x; autrement dit, que celle-ci ne saurait être donnée en fonction des dérivées secondes [5] U''_{xx_1}, U''_{xy_1}, U''_{xz_1}, par

(1) *Rendic. dell'Accad. dei Lincei, loc. cit.*, note II, p. 141-146.

(2) *Voir*, en particulier, *Math. Ann.*, t. XLIX, p. 325 et suiv.; *Ann. Éc. Norm. sup.*, 3e série, t. XIV.

(3) *La série de Taylor et son prolongement analytique.* Paris, Carré et Naud; 1901.

(4) *Rendic. dell'Accad. dei Lincei, loc. cit.*, p. 229.

(5) Les quantités appelées ici U'_x, U''_{xx_1}, U''_{xy_1}, U''_{xz_1}, ... sont celles qui, dans le Mémoire cité de M. Volterra, sont nommées X, X'_x, X'_y, X'_z, ...

l'intégrale

$$(4)\qquad \delta U'_x = \int (U''_{xx_1}\delta x_1 + + U''_{xy_1}\delta y_1 + U''_{xz_1}\delta z_1)\, ds_1$$

(ds_1 étant l'élément d'arc décrit par le point x_1, y_1, z_1). Cette formule (4) peut être valable pour le cas où la ligne L n'est variée que le long d'un arc ne contenant pas le point M; mais il n'en saurait être de même lorsque le point (x_1, y_1, z_1) est susceptible de coïncider avec (x, y, z).

Une première preuve de ce fait s'obtient d'ailleurs en supposant, comme l'a fait M. Volterra, que les déplacements des différents points de L aient lieu sur cette courbe elle-même : dans ce cas, l'intégrale du second membre est nulle, en vertu des relations (5) (*Rendic. Lincei, loc. cit.*, p. 229) de la Note I *Sopra le funzioni dipendenti da linee,* de M. Volterra. Le premier membre est, au contraire, différent de zéro, puisque U'_x, U'_y, U'_z dépendent de la position du point (x, y, z) sur la courbe.

Si maintenant on fait usage de la relation (3), il faudra commencer par exprimer les coordonnées d'un point de L en fonction d'un paramètre t choisi dont les valeurs ne doivent pas être affectées par la variation, et écrire

$$(1')\qquad \frac{\delta U}{\delta\lambda} = \int_L \left(U'_x\frac{\delta x}{\delta\lambda} + U'_y\frac{\delta y}{\delta\lambda} + U'_z\frac{\delta z}{\delta\lambda}\right)\frac{ds}{dt}\,dt$$

pour la variation correspondant à une variation de λ. Si l'on suppose que $\frac{\delta x}{\delta\lambda}, \frac{\delta y}{\delta\lambda}, \frac{\delta z}{\delta\lambda}$ ne sont différents de zéro que sur un certain arc de L et $\frac{\delta x}{\delta\mu}, \frac{\delta y}{\delta\mu}, \frac{\delta z}{\delta\mu}$ sur un autre arc *sans point commun avec le premier*, on trouve, en différentiant l'équation (1′) par rapport à μ et intervertissant ensuite les rôles de λ et de μ, les relations mêmes de M. Volterra. Mais si l'on suppose, en second lieu, que les variations relatives à λ et les variations relatives à μ soient différentes de zéro aux mêmes points de la courbe, on constate, après suppression des termes qui disparaissent en vertu des relations en question, que la formule (4) donnerait, pour $\frac{\delta^2 U}{\delta\lambda\,\delta\mu} - \frac{\delta^2 U}{\delta\mu\,\delta\lambda}$, une valeur différente de zéro.

Notre conclusion est donc établie; la quantité U'_x n'appartient pas à la catégorie étudiée dans la Note I *Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni* (*Rendic. Lincei*, t. III, p. 97-105), mais à la catégorie étudiée dans la Note II (p. 141-146), sur le même sujet. Si l'on se place au point de vue adopté dans cette dernière Note, on sera conduit à ajouter au second membre de la formule (4) des termes de la forme (2).

On aura évidemment des relations entre les coefficients de ces termes par la première méthode que nous avons indiquée, c'est-à-dire en remplaçant δx_1, δy_1, δz_1 par dx_1, dy_1, dz_1. On en obtient une seconde série à l'aide de l'équation (3). Il ne me paraît pas utile d'écrire ici ces différentes relations : je me contenterai d'observer que, d'après celles de la seconde série, les termes complémentaires ne peuvent être en δx, δy, δz seuls, mais doivent nécessairement contenir les variations des dérivées.