

# BULLETIN DE LA S. M. F.

R. DE MONTESSUS

## Sur les fractions continues algébriques

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 30 (1902), p. 28-36

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1902\\_\\_30\\_\\_28\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__28_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1902, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUR LES FRACTIONS CONTINUES ALGÈBRIQUES;

Par M. R. DE MONTESSUS.

Je rappelle, en modifiant un peu la forme, quelques notions dues à M. Padé.

Considérons un Tableau de fractions rationnelles

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{U_0^0}{V_0^0}, & \frac{U_1^0}{V_1^0}, & \frac{U_2^0}{V_2^0}, & \frac{U_3^0}{V_3^0}, & \dots, & \frac{U_n^0}{V_n^0}, & \dots, \\ \frac{U_0^1}{V_0^1}, & \frac{U_1^1}{V_1^1}, & \frac{U_2^1}{V_2^1}, & \frac{U_3^1}{V_3^1}, & \dots, & \frac{U_n^1}{V_n^1}, & \dots, \\ \frac{U_0^2}{V_0^2}, & \frac{U_1^2}{V_1^2}, & \frac{U_2^2}{V_2^2}, & \frac{U_3^2}{V_3^2}, & \dots, & \frac{U_n^2}{V_n^2}, & \dots, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \\ \frac{U_0^p}{V_0^p}, & \frac{U_1^p}{V_1^p}, & \frac{U_2^p}{V_2^p}, & \frac{U_3^p}{V_3^p}, & \dots, & \frac{U_n^p}{V_n^p}, & \dots, \\ \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, & \dots, \end{array}$$

où  $U_p^n, V_p^n$  sont des polynomes en  $x$ , respectivement de degré  $n$  et  $p$ , choisis de manière que le développement en série de la fraction  $\frac{U_p^n}{V_p^n}$

$$(1) \quad \frac{U_p^n}{V_p^n} = s_0 + s_1 x + \dots + s_{n+p} x^{n+p} + \lambda x^{n+p+1} + \mu x^{n+p+2} + \dots$$

ait pour termes de degrés inférieurs à  $n + p + 1$  les termes d'une

série illimitée donnée  $y$ ,

$$y = s_0 + s_1 x + \dots + s_h x^h + \dots, \quad s_0 \neq 0.$$

Cela permet de supposer que le terme constant de  $U_p^n$  est  $s_0$  et que le terme constant de  $V_n^p$  est l'unité.

Une fraction  $\frac{U_p^n}{V_n^p}$  du Tableau est dite *normale*, s'il n'existe aucune autre fraction ayant pour numérateur un polynôme de degré  $n$  et pour dénominateur un polynôme de degré  $p$  dont le développement coïncide dans ses  $n + p + 1$  premiers termes avec la série  $y$ .

Nous supposons que la série  $y$  donne lieu à un Tableau de fractions normales. La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que tous les déterminants  $\Delta_{pq}$  ( $p, q = 0, 1, 2, 3, \dots$ )

$$\Delta_{pq} = \begin{vmatrix} s_{p+1} & s_p & \dots & s_{p+1-q} \\ s_{p+2} & s_{p+1} & \dots & s_{p+2-q} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{p+1+q} & s_{p+q} & \dots & s_{p+1} \end{vmatrix}$$

soient différents de zéro.

Une suite quelconque de fractions du Tableau,

$$(2) \quad \frac{U_1}{V_1}, \quad \frac{U_2}{V_2}, \quad \dots, \quad \frac{U_i}{V_i}, \quad \dots,$$

chacune étant plus avancée que les précédentes ( $\frac{U_p^n}{V_n^p}$  est plus avancée que  $\frac{U_q^m}{V_q^m}$  si  $p + n > m + q$ ), définit une fraction continue appartenant à l'une des deux catégories suivantes :

I. Si

$$\begin{cases} U_1 = a_1, & V_1 = 1, & U_2 = a_1 a_2 + a_2, & V_2 = a_2, \\ \alpha_i U_{i-2} + \alpha_i U_{i-1} = U_i, \\ \alpha_i V_{i-2} + \alpha_i V_{i-1} = V_i & (i = 3, 4, 5, \dots), \end{cases}$$

les fractions  $\frac{U_i}{V_i}$  sont les réduites successives

$$a_1, \quad a_1 + \frac{a_2}{a_2}, \quad a_1 + \frac{a_2}{a_2 + \frac{a_3}{a_3}}, \quad \dots$$

de la fraction continue

$$\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \frac{\alpha_3}{\alpha_3 + \frac{\alpha_4}{\ddots}}}$$

II. Si

$$\begin{cases} U_1 = \alpha_1, & V_1 = \alpha_1, & U_2 = \alpha_1 \alpha_2, & V_2 = \alpha_1 \alpha_2 + \alpha_2, \\ \alpha_i U_{i-2} + \alpha_i U_{i-1} = U_i, \\ \alpha_i V_{i-2} + \alpha_i V_{i-1} = V_i, \end{cases}$$

les fractions  $\frac{U_i}{V_i}$  sont les réduites successives  $\frac{\alpha_1}{\alpha_1}, \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_2}}, \dots$

de la fraction continue

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_2 + \frac{\alpha_3}{\ddots}}}$$

de sorte que l'étude d'une suite de réduites telles que (2) revient à l'étude d'une fraction continue.

La réciproque est vraie : l'étude d'une fraction continue revient à l'étude d'une suite de réduites.

Toute suite illimitée de réduites, chacune plus avancée que les précédentes,

$$\frac{U_1}{V_1}, \frac{U_2}{V_2}, \dots, \frac{U_i}{V_i}, \dots,$$

ou toute fraction continue, représente une fonction. Cette suite converge en même temps que la série

$$(s') \quad \left\{ (-1) \frac{\Lambda_{p+1}}{V_p V_{p+1}} + (-1)^2 \frac{\Lambda_{p+2}}{V_{p+1} V_{p+2}} + \dots + (-1)^q \frac{\Lambda_{p+q}}{V_{q-1} V_q} + \dots \right. \\ \left. (\Lambda_i = U_{i-1} V_i - U_i V_{i-1}), \right.$$

dont l'étude, assez compliquée, se simplifie si les numérateurs  $\Lambda_i$  sont des monomes entiers en  $x$

$$\Lambda_i = c_i x^m \quad (c_i \text{ const., } m \text{ entier et positif}).$$

Cette simplification a lieu si les réduites de la suite considérée sont toutes consécutives, c'est-à-dire si, en posant

$$\frac{U_i}{V_i} = \frac{U_p^n}{V_p^n}, \quad \frac{U_{i+1}}{V_{i+1}} = \frac{U_q^m}{V_q^m},$$

on a, soit

$$p + n + 1 = q + m,$$

soit

$$p + n + 2 = q + m.$$

En effet, si, dans ce cas, (C) est le cercle de la convergence de la *série de puissances*

$$(s^n) \quad (-1)A_{p+1} + (-1)^2 A_{p+2} + \dots + (-1)^q A_{p+q} + \dots,$$

la suite des réduites converge dans le cercle (C), *sauf aux points qui seraient des zéros pour une infinité de polynomes  $V_p$* . Nous disons *une infinité*, parce que dans l'étude de la valeur prise par la fonction définie par la suite de réduites en un point d'affixe  $\alpha$  nous convenons de supprimer les réduites de rang fini  $\frac{U_p}{V_p}$ , où  $V_p$  a le point  $\alpha$  pour zéro.

Si les polynomes  $V_p$  tendent vers un polynome limite  $V$ , la fonction représentée par la suite

$$\frac{U_0}{V_0}, \quad \frac{U_1}{V_1}, \quad \dots, \quad \frac{U_p}{V_p}, \quad \dots$$

doit être regardée comme ayant pour pôles les zéros de  $V$  se trouvant dans le cercle de convergence.

Ces considérations et ce fait bien connu qu'il est possible de déduire d'une série une fraction continue convergente parfois dans une aire où la série ne l'est pas, et réciproquement, conduisent à la question suivante : *Une suite de réduites consécutives d'un Tableau de fractions normales définit-elle une fonction identique à la fonction définie par la série qui a donné naissance au tableau et, dans l'affirmative, la fraction continue correspondant à la suite prolonge-t-elle la série en dehors de son cercle de convergence?* Je vais montrer que certains résultats, dus à M. Hadamard, permettent de résoudre cette question dans le cas d'une suite de réduites consécutives

$$\frac{U_p^0}{V_p^0}, \quad \frac{U_p^1}{V_p^1}, \quad \frac{U_p^2}{V_p^2}, \quad \dots, \quad \frac{U_p^n}{V_p^n}, \quad \dots,$$

faisant toutes partie d'une même ligne horizontale d'un Tableau de fractions normales.





Quant à  $B_{p,p}$ , le système (2) nous donne, au signe près,

$$B_{p,p}^m = \pm \frac{\begin{vmatrix} s_{m+1} & s_m & \dots & s_{m-p+2} \\ s_{m+2} & s_{m+1} & \dots & s_{m-p+3} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m+p} & s_{m+p-1} & \dots & s_{m+1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_m & s_{m-1} & \dots & s_{m-p+1} \\ s_{m+1} & s_m & \dots & s_{m-p+2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m+p-1} & s_{m+p-2} & \dots & s_m \end{vmatrix}}.$$

On a donc

$$A_p^n = \pm \frac{\begin{vmatrix} s_n & s_{n-1} & \dots & s_{n-p} \\ s_{n+1} & s_n & \dots & s_{n-p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n+1} & s_{n+p-1} & \dots & s_n \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_{n-q} & s_{n-2} & \dots & s_{n-p} \\ s_n & s_{n-1} & \dots & s_{n-p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{n+p-2} & s_{n+p-3} & \dots & s_{n-1} \end{vmatrix}}.$$

Si l'on pose  $n - p = k$ , il s'agit donc de déterminer le rayon de convergence de la série

$$\sum_{k=q}^{k=\infty} \frac{\begin{vmatrix} s_k & s_{k+1} & \dots & s_{k+p} \\ s_{k+1} & s_{k+2} & \dots & s_{k+p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k+p} & s_{k+p+1} & \dots & s_{k+2p} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s_k & s_{k+1} & \dots & s_{k+p-1} \\ s_{k+1} & s_{k+2} & \dots & s_{k+p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{k+p-1} & s_{k+p-2} & \dots & s_{k+2p-2} \end{vmatrix}} x^{2p+k},$$

où  $q$  est un nombre fini bien déterminé et invariable.

Dans la question du polynome  $P(x)$ , M. Hadamard a trouvé, lui aussi, ces rapports de déterminants. Écrivant avec lui

$$D_{m,p} = \begin{vmatrix} s_m & s_{m+1} & \dots & s_{m+p} \\ s_{m+1} & s_{m+2} & \dots & s_{m+p+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{m+p} & s_{m+p+1} & \dots & s_{m+2p} \end{vmatrix},$$



nous avons à chercher le rayon de convergence de la série

$$\sum_{k=q}^{k=\infty} \frac{D_{k,p}}{D_{k,p-1}} x^{2p+k}.$$

On sait que ce rayon a pour expression

$$\lim_{k=\infty} \sqrt[k]{\frac{|D_{k,p}|}{|D_{k,p-1}|}} = \lim_{k=\infty} \frac{\sqrt[k]{|D_{k,p}|}}{\sqrt[k]{|D_{k,p-1}|}}.$$

Mais, si les inégalités (3) sont vérifiées, on sait aussi que  $\sqrt[D]{|D_{k,p}|}$  a pour limite  $\frac{1}{|\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p+1}|}$ . Le rayon de convergence de la série  $s''$  est donc bien  $|\alpha_{p+1}|$ .

3. Si, pour une valeur déterminée  $x_0$  de la variable  $x$ , les suites  $\frac{U_p^k}{V_p^k}, \frac{U_q^k}{V_q^k}$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) tendent l'une et l'autre vers des limites déterminées, ces limites sont IDENTIQUES.

Il suffit de démontrer que si  $\frac{U_p^k}{V_p^k}$ , d'une part, et  $\frac{U_{p+1}^k}{V_{p+1}^k}$ , de l'autre, tendent vers des limites finies et déterminées, la différence de ces réduites tend vers zéro.

Remarquons, pour cela, que  $|x_0| < |\alpha_{p+1}|$ , car les réduites  $\frac{U_p^k}{V_p^k}$ , convergentes seulement dans le cercle de rayon  $|\alpha_{p+1}|$ , sont supposées convergentes au point d'affixe  $x_0$ , et que la différence

$$\frac{U_p^k}{V_p^k} - \frac{U_{p+1}^k}{V_{p+1}^k}$$

peut s'écrire, comme le montre un calcul simple,

$$\frac{1}{V_p^p V_{p+1}^{p+1}} \times \frac{D_{h,p}}{D_{h,p-1}} x^{k+p+1} \quad (k - p + 1 = h).$$

Il suffit donc de montrer que

$$\frac{D_{h,p}}{D_{h,p-1}} x^{k+p+1} \quad (x = x_0)$$

tend vers zéro quand  $k$ , c'est-à-dire  $h$ , croît indéfiniment. Il en est

bien ainsi, car la série

$$\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{D_{h,p}}{D_{h,p-1}} x^{k+p+1},$$

de rayon de convergence  $|x_{p+1}|$ , est convergente au point  $x_0$ , puisque, nous l'avons fait observer,

$$|x_0| < |x_{p+1}|.$$

4. Il ressort de ces considérations qu'étant donnée une série de Taylor représentant une fonction  $f(x)$  dont les  $p$  pôles les plus rapprochés de l'origine sont intérieurs à un cercle (C) lui-même intérieur aux pôles suivants, chaque pôle multiple étant compté pour autant de pôles simples qu'il existe d'unités dans son degré de multiplicité, la fraction continue déduite de la ligne horizontale de rang  $p$  du Tableau de M. Padé, ce Tableau étant composé de réduites normales, représente la fonction  $f(x)$  dans un cercle de rayon  $|x_{p+1}|$ , où  $x_{p+1}$  est l'affixe du pôle le plus rapproché de l'origine parmi tous ceux qui sont extérieurs au cercle (C).

Si tous les pôles ont des modules différents, les fractions continues correspondant aux lignes horizontales représentent toute la fonction; s'il existe simplement des discontinuités dans l'ensemble linéaire des modules des pôles, les fractions continues correspondant à des lignes horizontales convenablement choisies représentent encore la fonction.

Si tous les pôles sont simples, la représentation a lieu dans des cercles d'autant plus grands que la ligne horizontale choisie est plus éloignée dans le Tableau. S'il y a des pôles multiples, il y a stationnement, en ce sens que plusieurs lignes horizontales consécutives représentant la fonction ont le même rayon de convergence. S'il y a enfin un point singulier essentiel, le stationnement se prolonge indéfiniment, aucune des fractions continues considérées ne représente la fonction en dehors du cercle sur la circonférence duquel se trouve le point singulier essentiel le plus rapproché de l'origine.