BULLETIN DE LA S. M. F.

ARISTIDE ZOUKIS

Sur quelques formules des fonctions homogènes et sur la démonstration d'un théorème qui s'y rattache

Bulletin de la S. M. F., tome 30 (1902), p. 181-194

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1902__30__181_0>

MÉMOIRES.

SUR QUELQUES FORMULES DES FONCTIONS HOMOGÈNES ET SUR LA DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME QUI S'Y RATTACHE;

Par M. Aristide Zoukis.

I.

1. Soit $F(x, w)$ une fonction homogène d'un degré quelconque m par rapport à x, w. En adoptant la notation connue $F_{p,q}(x, w)$ des dérivées, on aura la formule

$$
(\mathrm{A})\quad\left\{\begin{aligned}
&(e+h)^n \sum_{p=0}^{p=n} \frac{(a+e)^p\, w^{n-p}}{p!\,(n-p)!}\, F_{p,\,n-p}(a+e+h,\, w)\\
&\quad = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(m-n+k)\ldots(m-n+1)}{k!}\\
&\qquad \times e^k h^{n-k} \sum_{p=0}^{p=n-k} \frac{a^p\, w^{n-k-p}}{p!\,(n-k-p)!}\, F_{p,\,n-k-p}(a+e+h,\, w),
\end{aligned}\right.
$$

dans laquelle les quantités a, e, h, w sont tout à fait arbitraires, n peut prendre toute valeur positive entière et

$$\frac{(m-n+k)\ldots(m-n+1)}{k!} = 1 \qquad \text{pour} \qquad k = 0.$$

Si l'on pose, pour une valeur quelconque de a,

$$F(a+x,\, w) = \varphi(x,\, w),$$

la formule (A) prendra la forme plus simple

$$
\begin{aligned}
&(e+h)^n \sum_{p=0}^{p=n} \frac{e^p\, w^{n-p}}{p!\,(n-p)!}\, \varphi_{p,\,n-p}(e+h,\, w)\\
&\quad = \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(m-n+k)\ldots(m-n+1)}{k!\,(n-k)!}\, e^k h^{n-k} w^{n-k}\, \varphi_{0,\,n-k}(e+h,\, w),
\end{aligned}
$$

sous laquelle elle peut être démontrée de la manière suivante. On voit d'abord qu'elle est vraie pour $n = 0$. De même, pour $n = 1$, elle est aussi vraie, à cause de l'égalité

$$m\varphi(e+h, w) = (e+h)\varphi_{1,0}(e+h, w) + w\varphi_{01}(e+h, w).$$

Il ne reste donc plus à démontrer que cette formule, étant vraie pour n, l'est aussi pour $n+1$. En effet, si l'on suppose vraie la formule pour n et si on l'applique sur la fonction φ et sur la fonction $\varphi_{0,1}$ du degré $m-1$, en ajoutant les résultats multipliés, le premier par $(m-n)e$, et le second par wh, et en ayant égard à l'égalité connue

$$\begin{aligned}&(m-n)\varphi_{p,n-p}(e+h, w)\\ &\quad = (e+h)\varphi_{p+1,n-p}(e+h, w) + w\varphi_{p,n+1-p}(e+h, w),\end{aligned}$$

on aura la formule pour $n+1$.

2. Si l'on suppose entière la fonction homogène $F(x, w)$ et si l'on pose

$$F(a+e+h-x, w) = f(a+x, w) \qquad \text{et} \qquad y = \frac{1}{z},$$

on aura

$$\frac{1}{z^m} F[a+e+h+(a+e)z, w+wz] = f(a+h+ay, w+wy),$$

$$\frac{1}{z^m} F(a+e+h+az, w+wz) = f(a+e+h+ay, w+wy)$$

et en égalant les coefficients de $\frac{1}{z^m} z^k = \frac{1}{z^{m-k}}$ et de y^{m-k} $(0 \leqq k \leqq m)$

$$\begin{aligned}&\sum_{p=0}^{p=k} \frac{(a+e)^p w^{k-p}}{p!(k-p)!} F_{p,k-p}(a+e+h, w)\\ &\quad = \sum_{p=0}^{p=m-k} \frac{a^p w^{m-k-p}}{p!(m-k-p)!} f_{p,m-k-p}(a+h, w),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{p=0}^{p=k} \frac{a_p w^{k-p}}{p!(k-p)!} F_{p,k-p}(a+e+h, w)\\ &\quad = \sum_{p=0}^{p=m-k} \frac{a^p w^{m-k-p}}{p!(m-k-p)!} f_{p\, m-k-p}(a+e+h, w).\end{aligned}$$

D'après ces égalités, la formule (A), après un changement de e en h et *vice versa* et puis de f en F, donnera la formule

$$
(\mathrm{B})\quad \left\{
\begin{aligned}
&(e+h)^n \sum_{p=0}^{p=m-n} \frac{a^p w^{m-n-p}}{p!(m-n-p)!} \mathrm{F}_{p,\,m-n-p}(a+e,\, w) \\
&= \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(m-n+k)\ldots(m-n+1)}{k!} \\
&\quad \times e^{n-k} h^k \sum_{p=0}^{p=m-n+k} \frac{a^p w^{m-n+k-p}}{p!(m-n+k-p)!} \mathrm{F}_{p,\,m-n+k-p}(a+e+h,\, w).
\end{aligned}
\right.
$$

Cette formule n'est vraie que pour des fonctions entières, ce qui devient évident si l'on suppose $e = 0$.

3. Il est aisé de voir que

$$
\sum_{p=0}^{p=k} \frac{(a+e)^p w^{k-p}}{p!(k-p)!} \mathrm{F}_{p,\,k-p}(a+e+h,\, w),
$$

$$
\sum_{p=0}^{p=k} \frac{a^p w^{k-p}}{p!(k-p)!} \mathrm{F}_{p\;k-p}(a+e,\, w),
$$

$$
\sum_{p=0}^{p=k} \frac{a^p w^{k-p}}{p!(k+p)!} \mathrm{F}_{p,\,k-p}(a+e+h,\, w)
$$

sont respectivement les coefficients de z^k dans les développements suivant les puissances de z des fonctions

$$
(a)\quad (z+1)^m \mathrm{F}\left(a+e+\frac{h}{z+1},\, w\right) = \mathrm{F}[a+e+h+(a+e)z,\, w+wz],
$$

$$
(b)\quad (z+1)^m \mathrm{F}\left(a+\frac{e}{z+1},\, w\right) = \mathrm{F}(a+e+az,\, w+wz),
$$

$$
(c)\quad (z+1)^m \mathrm{F}\left(a+\frac{e+h}{z+1},\, w\right) = \mathrm{F}(a+e+h+az,\, w+wz),
$$

qui sont les transformées de la fonction $\mathrm{F}(x,\, w)$ par les formules

$$
x = a+e+\frac{h}{z+1}, \qquad x = a+\frac{e}{z+1}, \qquad x = a+\frac{e+h}{z+1}.
$$

Cela posé, la formule (A) nous donne la proposition.

Proposition I. — *La fonction* $\mathrm{F}(x,\, w)$ *étant homogène d'un* *degré quelconque m par rapport à x, w; si on la transforme par les formules*

$$x = a + e + \frac{h}{z+1}, \qquad x = a + \frac{e+h}{z+1}$$

et l'on considère les deux fonctions transformées (a) *et* (c), *le coefficient de* x^n (*n est tout entier positif*) *dans le développement suivant les puissances de z de la fonction* (a), *multiplié par* $(e+h)^n$ *est égal à la somme des* $n+1$ *coefficients des puissances* $z^0, z^1, \ldots, z^n$, *dans le développement suivant les puissances de z de la fonction* (c); *quand ces coefficients seront respectivement multipliés par*

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n} e^n, \quad \frac{(m-1)\ldots(m-n+1)}{(n-1)!} e^{n-1}h, \quad \ldots,$$
$$\frac{m-n+1}{1!} e h^{n-1}, \quad h^n.$$

De même, la formule (B), qui n'est vraie que pour des fonctions entières, nous donne la proposition.

Proposition II. — *La fonction* $F(x, w)$ *étant un polynome entier homogène du degré m par rapport à* x, w; *si on la transforme par les formules*

$$x = a + \frac{e}{z+1}, \qquad x = a + \frac{e+h}{z+1}$$

et l'on considère les fonctions transformées (b) *et* (c); *le coefficient de* z^{m-n} $(0 \leqq n \leqq m)$, *dans le développement suivant les puissances de z de la fonction* (b), *multiplié par* $(e+h)^n$, *est égal à la somme des* $n+1$ *coefficients des puissances* z^m, $z^{m-1}, \ldots, z^{m-n}$, *dans le développement suivant les puissances de z de la fonction* (c); *quand ces coefficients seront respectivement multipliés par*

$$\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} h^n, \quad \frac{(m-1)\ldots(m-n+1)}{(n-1)!} h^{n-1}e, \quad \ldots,$$
$$\frac{m-n+1}{1!} h e^{n-2}, \quad e^n.$$

4. Soit $\varphi(x_1, \ldots, x_i, w)$ une fonction homogène d'un degré quelconque m par rapport aux $i+1$ variables $x_1, \ldots, x_i, w$ et

considérons la fonction

$$F(x, w) = \varphi[f^{(1)}(x, 1), \ldots, f^{(i)}(x, 1)],$$

dans laquelle les fonctions

$$f^{(1)}(x, 1), \ldots, f^{(i)}(x, 1)$$

sont telles que la fonction $F(x, w)$ soit d'un degré déterminé $\pi.m$ par rapport à x. Transformons cette fonction successivement par les formules

$$x = a + e + \frac{h}{z+1}, \qquad x = a + \frac{e}{z+1}, \qquad x = a + \frac{e+h}{z+1},$$

et considérons les fonctions transformées

$$(a)\begin{cases} (z+1)^{\pi m} F\left(a + e + \dfrac{h}{z+1}, w\right) \\ = (z+1)^{\pi m} \varphi\left[f^{(1)}\left(a + e + \dfrac{h}{z+1}, 1\right), \ldots, f^{(i)}\left(a + e + \dfrac{h}{z+1}, 1\right), w\right], \end{cases}$$

$$(b)\begin{cases} (z+1)^{\pi m} F\left(a + \dfrac{e}{z+1}, w\right) \\ = (z+1)^{\pi m} \varphi\left[f^{(1)}\left(a + \dfrac{e}{z+1}, 1\right), \ldots, f^{(i)}\left(a + \dfrac{e}{z+1}, 1\right), w\right], \end{cases}$$

$$(c)\begin{cases} (z+1)^{\pi m} F\left(a + \dfrac{e+h}{z+1}, w\right) \\ = (z+1)^{\pi m} \varphi\left[f^{(1)}\left(a + \dfrac{e+h}{z+1}, 1\right), \ldots, f^{(i)}\left(a + \dfrac{e+h}{z+1}, 1\right), w\right]. \end{cases}$$

Dans les cas où l'on peut développer ces fonctions suivant les puissances de z, en appliquant la proposition I et la proposition II, si $F(x, w)$ est un polynome entier par rapport à x, on aura toutes les formules qui dérivent des propositions I et II.

Dans ce qui suit, nous n'examinerons que le cas où les fonctions $f^{(k)}(x, 1)(k = 1, 2, \ldots, i)$ sont des polynomes du premier degré.

5. Prenons, en effet,

$$x_k = f^{(k)}(x, 1) = g_k x + q_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, i),$$

et posons, pour abréger,

$$g_k a + q_k = u^k \qquad (k = 1, 2, \ldots, i).$$

Alors les trois fonctions transformées (a), (b), (c) du n° 4 deviendront

$$(a)\quad \begin{cases} (z+1)^m\varphi\left(u_1+g_1e+\dfrac{g_1h}{z+1},\ \ldots,\ u_i+g_ie+\dfrac{g_ih}{z+1},\ w\right) \\ \quad =\varphi[u_1+g_1(e+h)+(u_1+g_1e)z,\ \ldots,\ u_i+g_i(e+h)+(u_i+g_ie)z,\ w+wz], \end{cases}$$

$$(b)\quad \begin{cases} (z+1)^m\varphi\left(u_1+\dfrac{g_1e}{z+1},\ \ldots,\ u_i+\dfrac{g_ie}{z+1},\ w\right) \\ \quad =\varphi[u_1+g_1e+u_1z,\ \ldots,\ u_i+g_ie+u_iz,\ w+wz], \end{cases}$$

$$(c)\quad \begin{cases} (z+1)^m\varphi\left(u_1+\dfrac{g_1(e+h)}{z+1},\ \ldots,\ u_i+\dfrac{g_i(e+h)}{z+1},\ w\right) \\ \quad =\varphi[u_1+g_1(e+h)+u_1z,\ \ldots,\ u_i+g_i(e+h)+u_iz,\ w+wz]. \end{cases}$$

Puisque maintenant les coefficients de $z^k (k=0, 1, 2, \ldots)$, dans les développements de ces fonctions sont respectivement

$$\sum_{p_1+\ldots+p_i+p_{i+1}=k}\frac{(u_1+g_1e)^{p_1}\ldots(u_i+g_ie)^{p_i}w^{p_{i+1}}}{p_1!\ldots p_i!\,p_{i+1}!}$$
$$\times\varphi_{p_1,\ldots,p_i,p_{i+1}}[u_1+g_1(e+h),\ \ldots,\ u_i+g_i(e+h),\ w],$$

$$\sum_{p_1+\ldots+p_i+p_{i+1}=k}\frac{u_1^{p_1}\ldots u_i^{p_i}w^{p_{i+1}}}{p_1!\ldots p_i!\,p_{i+1}!}\varphi_{p_1,\ldots,p_i,p_{i+1}}(u_1+g_1e,\ \ldots,\ u_i+g_ie,\ w),$$

$$\sum_{p_1+\ldots+p_i+p_{i+1}=k}\frac{u_1^{p_1}\ldots u_i^{p_i}w^{p_{i+1}}}{p_1!\ldots p_i!\,p_{i+1}!}\varphi_{p_1,\ldots,p_i,p_{i+1}}[u_1+g_1(e+h),\ \ldots,\ u_i+g_i(e+h),\ w],$$

les deux propositions I et II (n° 3) nous donnent les formules

$$(\mathrm{A}')\quad \begin{cases} (e+h)^n\displaystyle\sum_{p_1+\ldots+p_i+p_{i+1}=n}\frac{(u_1+g_1e)^{p_1}\ldots(u_i+g_ie)^{p_i}w^{p_{i+1}}}{p_1!\ldots p_i!\,p_{i+1}!} \\ \qquad\times\varphi_{p_1,\ldots,p_i,p_{i+1}}[u_1+g_1(e+h),\ \ldots,\ u_i+g_i(e+h),\ w] \\ \quad =\displaystyle\sum_{k=0}^{k=n}\frac{(m-n+k)\ldots(m-n+1)}{k!} \\ \qquad\times e^kh^{n-k}\displaystyle\sum_{p_1+\ldots+p_i+p_{i+1}=n-k}\frac{u_1^{p_1}\ldots u_i^{p_i}w^{p_{i+1}}}{p_1!\ldots p_i!\,p_{i+1}!} \\ \qquad\times\varphi_{p_1,\ldots,p_i,p_{i+1}}[u_1+g_1(e+h),\ \ldots,\ u_i+g_i(e+h),\ w]. \end{cases}$$

et

$$
(\mathrm{B}')\left\{\begin{aligned}
&(e+h)^n \sum_{p_1+\ldots+p_i+p_{i+1}=m-n} \frac{u_1^{p_1}\ldots u_i^{p_i} w^{p_{i+1}}}{p_1!\ldots p_i!\,p_{i+1}!}\,\varphi_{p_1,\ldots,p_i,p_{i+1}}(u_1+g_1e,\ldots,u_i+g_ie,w)\\
&=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{(m-n+k)\ldots(m-n+1)}{k!}\,e^{n-k}h^k \sum_{p_1+\ldots+p_i+p_{i+1}=m-n+k}\frac{u_1^{p_1}\ldots u_i^{p_i} w^{p_{i+1}}}{p_1!\ldots p_i!\,p_{i+1}!}\\
&\times \varphi_{p_1,\ldots,p_i,p_{i+1}}[u_1+g_1(e+h),\ldots,u_i+g_i(e+h),w].
\end{aligned}\right.
$$

De ces deux formules, la seconde n'est vraie que si la fonction $\varphi(x_1, \ldots, x_i, w)$ est un polynome entier.

6. Des deux formules (A′), (B′) on peut déduire plusieurs autres formules en donnant des valeurs particulières aux différentes quantités qui y entrent. Parmi ces formules, nous citons les suivantes.

Si l'on pose $h = 0$ dans les formules (A′), on obtient la formule connue d'Euler

$$
\sum_{p_1+\ldots+p_i+p_{i+1}=n}\frac{(u_1+g_1e)^{p_1}\ldots(u_i+g_ie)^{p_i}w^{p_{i+1}}}{p_1!\ldots p_i!\,p_{i+1}!}\,\varphi_{p_1,\ldots,p_i,p_{i+1}}[u_1+g_1e,\ldots,u_i+g_ie,w]
$$
$$
=\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}\,\varphi[u_1+g_1e,\ldots,u_i+g_ie,w].
$$

En posant aussi $u_k = g_k a$ $(k = 1, 2, \ldots, i)$ et en remplaçant w par $w(a+e+h)$ dans la formule (A′), on aura la formule

$$
(1)\left\{\begin{aligned}
&(e+h)^n \sum_{p_1+\ldots+p_i+p_{i+1}=n}(a+e)^{n-p_{i+1}}(a+e+h)^{p_{i+1}}\frac{g_1^{p_1}\ldots g_i^{p_i}w^{p_{i+1}}}{p_1!\ldots p_i!\,p_{i+1}!}\,\varphi_{p_1,\ldots,p_i,p_{i+1}}(g_1,\ldots,g_i,w)\\
&=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{(m-n+k)\ldots(m-n+1)}{k!}\,e^k h^{n-k}.\\
&\times\sum_{p_1+\ldots+p_i+p_{i+1}=n-k}a^{n-k-p_{i+1}}(a+e+h)^{k+p_{i+1}}\frac{g_1^{p}\ldots g_i^{p_i}w^{p_{i+1}}}{p_1!\ldots p_i!\,p_{i+1}!}\,\varphi_{p_1,\ldots,p_i,p_{i+1}}(g_1,\ldots,g_i,w).
\end{aligned}\right.
$$

En supposant $a = 0$ dans cette formule, on aura la formule

$$
(2)\left\{\begin{aligned}
&\sum_{p_1+\ldots+p_i+p_{i+1}=n}(e+h)^{p_{i+1}}e^{n-p_{i+1}}\frac{g_1^{p_1}\ldots g_i^{p_i}w^{p_{i+1}}}{p_1!\ldots p_i!\,p_{i+1}!}\,\varphi_{p_1,\ldots,p_i,p_{i+1}}(g_1,\ldots,g_i,w)\\
&=\sum_{k=0}^{k=n}\frac{(m-n+k)\ldots(m-n+1)}{k!\,(n-k)!}\,e^k h^{n-k} w^{n-k}\varphi_{0,\ldots,0,n-k}(g_1,\ldots,g_i,w).
\end{aligned}\right.
$$

En supposant de même $a + e = 0$ dans la formule (1), on aura la formule

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{(e+h)^n w^n}{n!}\varphi_{0,\ldots,0,n}(g_1,\ldots,g_i,w) = \sum_{k=0}^{k=n}\frac{(m-n+k)\ldots(m-n+1)}{k!} \\ &\times \sum_{p_1+\ldots+p_i+p_{i+1}=n-k} (-1)^{n-k-p_{i+1}} e^{n-p_{i+1}} h^{p_{i+1}} \frac{g_1^{p_1}\ldots g_i^{p_i} w^{p_{i+1}}}{p_1!\ldots p_i! p_{i+1}} \varphi_{p_1,\ldots,p_i,p_{i+1}}(g_1,\ldots,g_i,w). \end{aligned}\right.$$

La formule (2), si l'on suppose $e + h = 0$, nous donne la formule

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{p_1+\ldots+p_i=n} \frac{g_1^{p_1}\ldots g_i^{p_i}}{p_1!\ldots p_i!}\varphi_{p_1,\ldots,p_i,0}(g_1,\ldots,g_i,w) \\ &\quad = \sum_{k=0}^{k=n}(-1)^{n-k}\frac{(m-n+k)\ldots(m-n+1)}{k!} w^{n-k}\varphi_{0,\ldots,0,n-k}(g_1,\ldots,g_i,w). \end{aligned}\right.$$

La même formule (2), si l'on égale les coefficients de

$$e^k h^{n-k} (0 \leqq k \leqq n)$$

dans les deux membres, nous donne la formule

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} &\sum_{p_1+\ldots+p_i+p_{i+1}=n} C_{p_{i+1}}^{n-k} \frac{g_1^{p_1}\ldots g_i^{p_i} w^{p_{i+1}}}{p_1!\ldots p_i! p_{i+1}!}\varphi_{p_1,\ldots,p_i,p_{i+1}}(g_1,\ldots,g_i,w) \\ &\quad = \frac{(m-n+k)\ldots(m-n+1)}{k!(n-k)!} w^{n-k}\varphi_{0,\ldots,0,n-k}(g_1,\ldots,g_i,w). \end{aligned}\right.$$

dans laquelle $C_{p_{i+1}}^{n-k} = \frac{p_{i+1}(p_{i+1}-1)\ldots(p_{i+1}-n+k+1)}{(n-k)!}$ doit être considéré égal à zéro si $p_{i+1} < n-k$.

Nous ajoutons encore la formule

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{w^n}{n!}\varphi_{0,\ldots,0,n}(g_1,\ldots,g_i,w) = \sum_{k=0}^{k=n}(-1)^{n-k}\frac{(m-n+k)\ldots(m-n+1)}{k!} \\ &\times \sum_{p_1+\ldots+p_i=n-k} \frac{g_1^{p_1}\ldots g_i^{p_i}}{p_1!\ldots p_i!}\varphi_{p_1,\ldots,p_i,0}(g_1,\ldots,g_i,w), \end{aligned}\right.$$

qui s'obtient si l'on suppose $h = 0$ dans la formule (3).

Les formules (4) et (6), dans le cas $i = 1$, donnent les formules

$$g^n \varphi_{n,0}(g, w) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{n-k}(m-n+k)\ldots(m-n+1)\,C_n^k\, w^{n-k} \varphi_{0,n-k}(g, w),$$

$$w^n \varphi_{0,n}(g, w) = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^{n-k}(m-n+k)\ldots(m-n+1)\,C_n^k\, g^{n-k} \varphi_{n-k,0}(g, w),$$

qui ne diffèrent entre eux que par le changement des deux variables g, w et qui peuvent être utiles pour le calcul des dérivées, par rapport à l'une des variables, d'une fonetion homogène de deux variables, dont les dérivées par rapport à l'autre variable se calculent aisément.

L'examen du système complet des formules qui se déduisent des deux propositions I et II (n° 3), sort des limites de ce travail. Nous laissons au lecteur cet examen qui, probablement, conduira à des formules utiles.

II.

7. Lemme. — *Si d'une suite des $m+1$ quantités réelles*

$$(1) \qquad a_0,\ \ldots,\ a_k,\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n,\ \ldots,\ a_m$$

on forme la suite de $m+2$ quantités

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_0,\ \ldots,\ a_k,\ e_k a_k + h_{k+1} a_{k+1},\ e_{k+1} a_{k+1} + h_{k+2} a_{k+2},\ \ldots, \\ \qquad\qquad e_{n-1} a_{n-1} + h_n a_n,\ a_n,\ \ldots,\ a_m \end{array} \right.$$

(où e_k, e_{k+1}, ..., e_{n-1}, h_{k+1}, h_{k+2}, ..., h_n sont des quantités arbitraires réelles et positives) le nombre des variations que présente la suite des $m+2$, quantités (2) est moindre d'un nombre pair ou nul du nombre des variations que présente la suite des $m+1$ quantités primitives (1).

La démonstration de ce lemme est une conséquence immédiate des considérations suivantes :

a. Les variations des quantités a_0, ..., a_k et a_n, ..., a_m, ne sont pas altérées.

b. Les couples des variations qui existent dans les portions de la suite des quantités

$$(3) \qquad a_k,\ a_{k+1},\ a_{k+2},\ \ldots,\ a_{n-1},\ a_n,$$

où entre deux quantités du même signe existe une quantité de signe différent, peuvent être conservés, dans la suite des quantités

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} a_k,\quad e_k a_k + h_{k+1} a_{k+1},\quad e_{k+1} a_{k+1} + h_{k+2} a_{k+2},\quad \ldots,\\ \qquad\qquad e_{n-1} a_{n-1} + h_n a_n, \end{array}\right.$$

mais peuvent aussi disparaître.

c. Les variations qui existent dans la suite de quantités (3), sous des conditions différentes de celles du cas précédent, se conservent dans la suite des quantités (4).

8. Corollaire. — *La multiplication d'un polynome entier par* $(x+a)(a>0)$ *diminue le nombre des variations de ces coefficients d'un nombre pair ou nul.*

9. En se basant sur le lemme précédent et sur les deux propositions I et II (n° 3) on peut démontrer le théorème suivant que M. Cyp. Stéphanos a proposé. (Voir *Interm.*, t. VIII, avril 1900, p. 117).

Théorème. — *Si l'on transforme un polynome entier* $F(x, 1)$ *du degré m successivement par les formules*

$$x = a + e + \frac{h}{z+1},\qquad x = a + \frac{e}{z+1},\qquad x = a + \frac{e+h}{z+1}$$

(*a est un nombre réel quelconque et e, h des nombres réels du même signe*) *et que l'on représente par*

$$V_{a+e}^{a+e+h},\quad V_{a}^{a+e},\quad V_{a}^{a+e+h}$$

les nombres des variations que présentent les coefficients des polynomes transformés

$$(a)\qquad (z+1)^m F\left(a+e+\frac{h}{z+1}, 1\right),$$

$$(b)\qquad (z+1)^m F\left(a+\frac{e}{z+1}, 1\right),$$

$$(c)\qquad (z+1)^m F\left(a+\frac{e+h}{z+1}, 1\right),$$

développés suivant les puissances de z; entre ces nombres existe *la relation*

$$V_a^{a+e} V_{a+e}^{a+e+h} + 2k = V_a^{a+e+h},$$

k étant un nombre entier positif ou nul.

Pour démontrer ce théorème, on écrit, dans une suite, les coefficients du développement suivant les puissances croissantes de z du polynome (c) et puis on les divise par les coefficients des mêmes puissances de z dans le développement de $(z+1)^m$, ce qui n'altère pas le nombre V_a^{a+e+h} des variations qu'ils présentent.

Sur la suite de ces $m+1$ quotients des coefficients, on applique successivement m fois le lemme précédent (n° 7) de la manière suivante. Dans toutes ces applications on prend

$$e_k = e_{k+1} = \ldots = e_{n-1} = \frac{e}{e+h} > 0, \qquad h_{k+1} = h_{k+2} = \ldots = h_n = \frac{h}{e+h} > 0.$$

Dans la première application, on applique le lemme sur tous les $m+1$ termes de la suite. Dans chacune des $m-1$ applications suivantes on applique le lemme seulement sur les termes consécutifs de la suite qui n'entrent pas dans la suite qui précède ; c'est-à-dire on applique le lemme sur les $m+2-p$ termes moyens de chacune des suites successives, p étant le nombre qui signifie le rang de l'application du lemme.

Toutes ces m applications du lemme étant effectuées, nous formerons une suite ayant $2m+1$ termes. Puisque, maintenant, m étant entier,

$$\frac{(m-n+k)\ldots(m-n+1)}{k!} = C_m^n \frac{C_n^{n-k}}{C_m^{n-k}},$$

il est facile de voir que ces $2m+1$ termes, d'après les propositions I et II (n° 3), seront les coefficients du polynome (a) ordonné suivant les puissances croissantes de z, divisés par les coefficients de mêmes puissances de z dans le développement de $(z+1)^m$, et puis les coefficients du polynome (b) pareillement ordonné et également divisés par les coefficients des mêmes puissances de z dans le développement de $(z+1)^m$. La totalité de ces coefficients sera $2m+1$ et pas $2m+2$, puisque le dernier coefficient (de z^m) du premier polynome (a) et le premier coefficient (terme constant) du second polynome (b) sont tous les deux égaux au $F(a+e)$ et réunis en un seul, ce qui n'altère pas la somme $V_a^{a+e} + V_{a+e}^{a+e+h}$ des variations des coefficients de ces deux polynomes (a) et (b).

Si maintenant nous nous rappelons que chaque application du lemme (7) sur une suite des quantités diminue les variations de ces quantités d'un nombre pair ou nul, nous serons sûrs de la vérité de l'égalité

$$V_a^{a+e} + V_{a+e}^{a+e+h} + 2k = V_a^{a+e+h} \qquad (k \geqq 0),$$

que nous voulions démontrer.

10. L'utilité du théorème précédent consiste en ce que le nombre V_a^{a+e} des variations du polynome (6) (nº 9), ordonné suivant les puissances de z, comme Jacobi l'a d'abord remarqué, est une limite supérieure (plus grand d'un nombre pair ou nul) du nombre des racines réelles du polynome $F(x)$ qui sont contenues entre les nombres réels a et $a+e$ (puisque la formule de la transformation étant $x = a + \frac{e}{z+1}$ pour $x=a$, $x=a+e$, on a $z=\infty$, $z=0$).

Cela considéré, on voit que, quand il s'agit d'appliquer la règle de Jacobi pour trouver une limite supérieure du nombre des racines réelles d'un polynome $F(x)$ qui sont contenues entre deux nombres réels a et b ($b > a$), il est préférable de partager la portion $b-a$ en deux ou plusieurs parties et d'appliquer la règle de Jacobi à chacune de ces parties. Cela fait, il est probable de trouver une limite plus petite du nombre des racines réelles du polynome $F(x)$ qui sont contenues entre a et b.

11. La démonstration du théorème (9) étant générale, si l'on suppose $a=0$ et $h=A$ ($\lim A = \infty$) le polynome (c) (nº 9) deviendra

$$(z+1)^m F\left(\frac{e+A}{z+1}, w\right) \qquad (w=1),$$

et les parties principales des coefficients de ce polynome, ordonné suivant les puissances croissantes de z, seront les coefficients de

$F(x, 1)$, inversement ordonné, multipliés respectivement par $A^m, A^{m-1}, \ldots, A, 1$.

De même, le polynome (a) (n° 9) deviendra

$$(z+1)^m F\left(e + \frac{A}{z+1}, w\right) \qquad (w = 1),$$

et les parties principales des coefficients de ce polynome, ordonné suivant les puissances croissantes de z, seront

$$A^m \frac{F_{m,0}(e, 1)}{m!}, \qquad A^{m-1} \frac{F_{m-1,0}(e,1)}{(m-1)!}, \qquad \ldots, \qquad A \frac{F_{1,0}(e,1)}{1!}, \qquad F(e,1).$$

Enfin, le polynome (b) (n° 9) deviendra

$$\begin{aligned}(z+1)^m F\left(\frac{e}{z+1}, 1\right) \\ = F(e,1) + \frac{F_{0,1}(e,1)}{1!} z + \ldots + \frac{F_{0,m-1}(e,1)}{(m-1)!} z^{m-1} + \frac{F_{0,m}(e,1)}{m!} z^m.\end{aligned}$$

Puisque, maintenant,

$$V_0^e + V_e^A + 2k = V_0^A \qquad (k \geqq 0),$$

il s'ensuit que le nombre des variations des coefficients d'un polynome $F(x, w)$, $(w = 1)$, surpasse d'un nombre pair ou nul la somme des variations que présentent, pour une valeur quelconque positive e de x, la suite des dérivées de $F(x, w)$ par rapport à x et celle des dérivées par rapport à la variable de l'homogénéité w.

C'est pour ce cas $(a = 0)$, $h = \infty)$, que j'avais d'abord démontré le théorème (9). J'avais considéré que des coefficients d'un polynome

$$\begin{aligned}F(x, w) \\ = C_m^0 A_0 x^m + C_m^1 A_1 x^{m-1} w + \ldots + C_m^{m-1} A_{m-1} x w^{m-1} + C_m^n A_m w^m (w = 1),\end{aligned}$$

divisés respectivement par C_m^0, C'_m, $\ldots$, C_m^{m-1}, C_m^m, on peut former la suite des dérivées

$$\frac{F_{m,0}(e,1)}{m!}, \quad \frac{F_{m-1,0}(e,1)}{(m-1)!}, \quad \ldots, \quad \frac{F_{1,0}(e,1)}{1!},$$
$$F(e,1), \quad \frac{F_{01}(e,1)}{1!}, \quad \ldots, \quad \frac{F_{0,m-1}(e,1)}{(m-1)!}, \quad \frac{F_{0,m}(e,1)}{m!},$$

en appliquant m fois successivement le lemme (n° 7), comme dans la démonstration du théorème (n° 9), mais en prenant dans toutes ces applications

$$e_k = e_{k+1} = \ldots = e_{n-1} = e, \qquad h_{k+1} = h_{k+2} = \ldots = h_n = 1$$

et pas

$$e_k = e_{k+1} = \ldots = e_{n-1} = \frac{e}{e+h}, \qquad h_{k+1} = h_{k+2} = \ldots = h_n = \frac{h}{e+h},$$

comme dans le cas général [1].

12. Si l'on représente par R_a^{a+e} le nombre des racines réelles d'un polynome $F(x, 1)$, comprises entre les nombres réels a et $a+e$ ($e > 0$), d'après le théorème (n° 9) on aura

$$V_a^\infty - V_{a+e}^\infty = V_a^{a+e} + 2k = R_a^{a+e} + 2k' + 2k \qquad (k \geqq 0,\ k' \geqq 0).$$

On déduit de ces deux égalités que :

1° Du théorème du (n° 9) se déduit le théorème de Budan-Fourier;

2° Le résultat V_a^{a+e}, auquel conduit la règle de Jacobi, est plus approché, en général, de R_a^{a+e} que le résultat $V_a^\infty - V_{a+e}^\infty$, obtenu par le théorème de Budan-Fourier.

On trouve ces deux remarques dans la question envoyée à l'*Intermédiaire des Mathématiciens*, par M. Cyp. Stéphanos.

---

[1] C'est sous les conditions suivantes que j'avais fait cette démonstration particulière (cas $a = 0$, $h = \infty$), qui équivaut à une démonstration générale du théorème (n° 9), mais ne donne pas l'occasion de considérer les formules (A) et (B) de la première partie de ce travail.

M. Cyp. Stéphanos, quelque temps après l'envoi de la question à l'*Intermédiaire,* m'avait dit qu'il avait démontré son théorème et il m'avait proposé de le démontrer aussi. Alors j'avais fait la démonstration antérieure pour le cas ($a = 0$, $h = \infty$) qui se trouva, comme M. Cyp. Stéphanos m'avait dit, être la même que la sienne. C'est pour cela que je ne l'avais pas publiée.