BULLETIN DE LA S. M. F.

LÉON AUTONNE

Sur une manière de représenter géométriquement un système de trois variables complexes

Bulletin de la S. M. F., tome 29 (1901), p. 95-118
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1901__29__95_1>

SUR UNE MANIÈRE DE REPRÉSENTER GÉOMÉTRIQUEMENT UN SYSTÈME DE TROIS VARIABLES COMPLEXES;

Par M. Léon Autonne.

N variables complexes sont toujours assimilables aux N coordonnées d'un point X dans un espace $\mathfrak{R}$, à N dimensions complexes. Comme X dépend de 2N paramètres réels, X peut être représenté, dans un espace réel R à N dimensions, par un *couple* Ξ de deux points x et x'. Il est loisible d'employer dans R les coordonnées homogènes

$$X_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, \quad N+1$$

et la dualité.

Une variété de $\mathfrak{R}$ à m dimensions complexes, fournie par $N - m$ équations entre les X_j, est représentée dans R par une variété M_{2m} de ∞^{2m} couples Ξ.

Dans la présente Note, je cherche à préciser ces théories, dans le cas $N = 3$, où R est l'espace ordinaire à trois dimensions. J'emploie surtout les couples Ξ où le point x' est à l'infini.

Après avoir, dans le Chapitre I, introduit les couples, je construis, dans le Chapitre II, les variétés M_4 et M_2 qui représentent dans R le plan (et, par dualité, le point) et la droite de l'espace imaginaire $\mathfrak{R}$.

Dans le couple Ξ des deux points x et x', je distingue le *support,* qui est la droite xx', un point *modulaire* ζ et trois angles *arguments* ω, φ et ψ.

Le modulaire ζ et les arguments ω, φ et ψ s'introduisent d'une façon projective et géométrique (considération d'un certain système de quadriques, autopolaires par rapport au tétraèdre de référence), qui est analogue à celle du module et de l'argument, pour la variable imaginaire unique.

Après avoir, au Chapitre III, établi les propriétés du modulaire et des arguments, je construis, au Chapitre IV, le point imaginaire X, ou le couple Ξ, qui admet des arguments et un modulaire donnés.

On a à considérer des intersections de complexes et de congruences de droites, ainsi qu'une certaine surface réglée du quatrième degré.

J'interprète aussi très simplement la substitution linéaire quaternaire canonique

$$S = | X_j \quad X_j e^{i\theta_j} | \qquad j = 1, 2, 3, 4,$$

où les angles θ sont constants. S ne modifie pas le modulaire; elle peut être envisagée comme une généralisation de la *rotation autour de l'origine des coordonnées,* rotation qui représente la substitution canonique

$$| t \quad te^{i\tau} |$$

pour la variable complexe unique t dans la conception habituelle des imaginaires.

Dans un Travail ultérieur, j'espère arriver à représenter de même la S générale à coefficients complexes

$$S = \left| X_j \quad \sum_k X_k \left(a_{jk} + i b_{jk}\right) \right|,$$

$$a_{jk}, b_{jk} = \text{réels}; \qquad i = \sqrt{-1}; \qquad j, k = 1, 2, 3, 4.$$

On laisse entièrement de côté le cas $N = 2$. Le lecteur le rétablirait sans peine. Toutes les théories subsistent avec de très notables simplifications.

Il ne serait pas non plus difficile d'introduire les modulaires et les arguments dans le cas $N > 3$.

CHAPITRE I.

COORDONNÉES HOMOGÈNES COMPLEXES.

1° Soient, dans un espace réel à trois dimensions R,

$$x_j \qquad (j = 1, 2, 3, 4)$$

quatre quantités réelles, coordonnées homogènes d'un point x. La position de x dans R dépend seulement des quotients

$$x_j : x_k \qquad (k = 1, 2, 3, 4; k \neq j).$$

Pour déterminer les valeurs absolues des x_j, on prendra quatre constantes numériques réelles e_j et l'on écrira

$$x_0 = \sum_j e_j x_j = \sum e x = 1.$$

Dès lors, si x a ses coordonnées proportionnelles à quatre quantités t_j, on écrira

$$x_j = t_j t_0^{-1}, \qquad t_0 = \sum e t.$$

2° Pour le plan e, $\sum e t = 0$, la règle conduirait à attribuer à un point x' de e des coordonnées infinies. Aussi e se nomme-t-il *plan de l'infini*.

J'agirai un peu autrement. Si x', situé sur e, a ses coordonnées x'_j proportionnelles à quatre quantités connues t_j, j'écrirai, pour fixer la valeur absolue des x'_j,

$$x'_j = t_j \left(\sum_j t_j^2\right)^{-\frac{1}{2}} \qquad \text{d'où} \qquad \sum_j x'^2_j = 1.$$

Les x'_j jouent ainsi un rôle analogue à celui des cosinus directeurs dans la Géométrie métrique ordinaire.

3° Un plan u de R aura de même ses quatre coordonnées homogènes u_j liées par la relation $u_0 = \sum_j g_j u_j = \sum gu = 1$. Les g_j seront quatre constantes numériques arbitraires. Le point g, de coordonnées g_j, sera le point de l'infini. Un plan u' passant par g aura encore la valeur absolue de ses coordonnées u'_j donnée par la condition $\sum u'^2 = 1$.

4° Considérons maintenant quatre quantités complexes X_j, liées par la relation $X_0 = \sum eX = 1$, les e_j étant les mêmes qu'au 1°. Je dirai que les X_j sont les *coordonnées homogènes* d'un *point imaginaire* X, dans un *espace imaginaire* $\mathfrak{R}$, à trois dimensions imaginaires ou à six dimensions réelles.

Posons $X_j = \xi_j + i\eta_j$, $i = \sqrt{-1}$. On aura, par hypothèse,

$$1 = X_0 = \xi_0 + i\eta_0, \qquad \text{d'où} \qquad \xi_0 = 1,\ \eta_0 = 0.$$

Ainsi, les ξ_j sont les coordonnées x_j d'un point x de l'espace R; dans le même espace R, les η_j sont proportionnelles aux coordonnées x'_j d'un point x' situé dans le plan de l'infini ϱ (2°). On écrira donc $\eta_j = \sigma x'_j$ et $X_j = x_j + i\sigma x'_j$.

Les six paramètres dont dépend le point imaginaire X sont :

Les quatre quantités x_j, liées par $\sum ex = 1$ et équivalentes à trois paramètres;

Les quatre quantités x'_j liées par les deux relations

$$\sum ex' = 0, \qquad \sum x'^2 = 1$$

et équivalentes à deux paramètres;

Le paramètre σ.

La droite $\overline{xx'}$ ou D se nommera le *support* du point imaginaire X.

5° Les six coordonnées homogènes de D sont les six déterminants $(xx')_{jk} = x_j x'_k - x_k x'_j$. Le point X dépend seulement des rapports

$$\frac{X_j}{X_k} = \frac{x_j + i\sigma x'_j}{x_k + i\sigma x'_k} = \frac{x_j x_k + \sigma^2 x'_j x'_k + i\sigma(xx')_{kj}}{x_k^2 + \sigma^2 x'^2_k}.$$

On écrira souvent aussi (jk) pour la coordonnée $(xx')_{jk}$ du support.

On peut dire aussi que les six paramètres réels dont dépend X sont :

Les quatre paramètres qui définissent le support D;
Un paramètre qui définit la position de x sur D;
Le paramètre σ.

La figure de l'espace réel R définie par D, x, x', σ se nommera le *couple* Ξ, qui *représente,* dans l'espace réel R, le point X de l'espace imaginaire $\mathfrak{R}$.

6° Si un point y est sur D, on a $y_j = x_j + \lambda x'_j$ et l'on dira que λ est la *distance* du point y au point x. Si le paramètre réel λ prend la valeur complexe $i\sigma$, y est précisément X. On pourra dire que σ est le *quotient par i de la distance de* X *à* x. Cela donne la signification géométrique de σ. Je nommerai σ *diamètre* du couple Ξ. Les couples de diamètre nul représentent des points X dégénérés en points réels; il en est de même pour les couples dont le support D est indéterminé, x étant venu en x'.

7° Pareillement, un plan imaginaire U de l'espace $\mathfrak{R}$ aura pour coordonnées les quatre quantités (3°)

$$U_j = u_j + i\tau u'_j; \qquad u_0 = 1; \qquad u'_0 = \sum u'^2 - 1 = 0$$

et sera représenté par le *couple* H de l'espace réel R, figure définie par les deux plans u et u', par leur intersection (*support* du couple) et par le *diamètre* τ.

8° En général, les raisonnements géométriques dans l'espace $\mathfrak{R}$ ne fourniront pas les coordonnées X_j ou le point X, mais seulement quatre quantités $\xi_j + i\eta_j$ proportionnelles aux X_j. Comment construirons-nous le couple Ξ?

On posera $\rho X_j = \xi_j + i\eta_j$, d'où $\rho = \xi_0 + i\eta_0$,

$$X_j = \frac{\xi_j + i\eta_j}{\xi_0 + i\eta_0} = \frac{\xi_j\xi_0 + \eta_j\eta_0 + i(\eta_j\xi_0 - \xi_j\eta_0)}{\xi_0^2 + \eta_0^2},$$

$$x_j = \frac{\xi_j\eta_0 + \eta_j\eta_0}{\xi_0^2 + \eta_0^2}, \qquad \sigma x'_j = \frac{\eta_j\xi_0 - \eta_j\xi_0}{\xi_0^2 + \eta_0^2}.$$

Les points y et z, dont les coordonnées sont $\xi_j\xi_0^{-1}$ et $\eta_j\eta_0^{-1}$, sont sur le support D.

9° Prenons sur une droite quelconque D′ de l'espace R deux points quelconques y et z. Quel sera le point X dont les coordonnées sont proportionnelles à $y_j + iz_j$?

Il suffit, dans le calcul du 8°, de faire $\xi_0 = \eta_0 = 1$, $\xi_j = y_j$, $\eta_j = z_j$. Il viendra

$$(1) \qquad x_j = \frac{z_j + y_j}{2}, \qquad \sigma x'_j = \frac{z_j - y_j}{2}.$$

Ainsi X *est aussi représenté par deux points y et z de l'espace* R, ce qui équivaut encore à six paramètres.

Nous pourrons parler de *couples* $\overline{zy}$ dont aucun point n'est sur le plan de l'infini e. La droite qui joint les deux points du couple en est le support.

Les formules (1) donnent aussi

$$z_j = x_j + \sigma x'_j, \qquad y_j = x_j - \sigma x'_j.$$

Sur le support, les deux points y et z sont harmoniquement placés par rapport à x et à x', les deux points du couple Ξ. En attribuant au mot *distance* le sens expliqué au 6°, on peut dire que x est le *milieu* du segment yz et que le diamètre σ du couple Ξ est la demi-longueur du segment yz.

10° En résumé, on représente tous les points X de l'espace $\mathfrak{R}$, en réunissant deux à deux dans un même couple les divers points de l'espace R. Si les deux points d'un même couple coïncident, X dégénère en un point réel, le support devenant indéterminé.

11° La formule

$$(1) \qquad \sigma x'_j = \frac{z_j - y_j}{2}$$

du 9° permet de faire entrer le facteur σ dans x'_j. Dorénavant, *le couple yz étant connu,* j'écrirai simplement

$$X_j = x_j + i x'_j,$$

où les valeurs absolues des x''_j ne seront plus définies par la règle $\sum x'^2 = 1$ donnée au 2°, mais par la formule (1) ci-dessus.

Par contre, pour déterminer complètement les couples, il faudra donner non seulement la position de x' sur le plan de l'infini, mais encore la *valeur absolue* des x'_j.

Dans la formule (1) ci-dessus, le segment $\overline{yz}$ a

$$\left\{\begin{array}{l}\text{pour demi-longueur, le diamètre } \sigma \text{ du couple } \Xi,\\ \text{pour cosinus directeurs, les } x'_j,\\ \text{pour composantes, les différences } z_j - y_j,\end{array}\right.$$

en empruntant le langage de la Géométrie métrique et ordinaire. Écrire

$$X_j = x_j + i x'_j \qquad \text{au lieu de} \qquad X_j = x_j + i\sigma x'_j,$$

c'est représenter par x'_j non plus le cosinus directeur, mais la composante du demi-segment yz.

12° Pareillement, le plan imaginaire U aura pour coordonnées

$$U_j = u_j + i u'_j,$$

à condition de connaître non seulement la position du plan u' autour du point g de l'infini (3°), mais encore les valeurs absolues des u'_j.

CHAPITRE II.

PLAN, POINT, DROITE COMPLEXES.

13° Le point imaginaire X de l'espace $\mathfrak{R}$ dépend de trois paramètres complexes ou de six paramètres réels, qui sont ceux du couple représentatif Ξ dans l'espace réel R. L'équation

$$F(X) = F(X_1, \ldots, X_4) = 0$$

d'une *surface* S dans $\mathfrak{R}$ équivaut donc pour Ξ à deux relations. S est représentée dans R par une multiplicité de ∞^4 couples M_4.

La *courbe* T

$$F(X) = F_1(X) = 0$$

de $\mathfrak{R}$ est représentée dans R par une multiplicité M_2 de ∞^2 couples.

Enfin, les trois équations $F(X) = F_1(X) = F_2(X) = 0$ fournissent, en général, un nombre fini de couples.

Je vais construire M_1 et M_2 lorsque la figure de $\mathcal{A}$ est :

un plan U

$$F(X) = \sum_j U_j X_j = 0, \qquad U_j = \text{const.};$$

un point X

$$\Phi(U) = \sum_j X_j U_j, \qquad X_j = \text{const.};$$

une droite, intersection de deux plans U et V donnés, ou jonction des deux points X et Y donnés.

14° Soient donc un plan U, de coordonnées

$$U_j = u_j + i u'_j,$$

donné et un point variable X, de coordonnées $X_j = x_j + i x'_j$. Il faut exprimer que X est sur U, autrement dit que $\sum UX = 0$. Il vient

$$\sum UX = \sum (u + iu')(x + ix') = \sum ux - \sum u'x' + i \left\{ \sum u'x + \sum ux' \right\}$$

et

$$(1) \qquad \sum ux = \sum u'x', \qquad \sum u'x + \sum ux' = 0.$$

Il s'agit d'interpréter géométriquement ces relations.

15° Nommons Δ la droite réelle de l'espace R intersection des deux plans réels donnés u et u'. Le plan mobile $u + \mu u'$, de coordonnées $u_j + \mu u'_j$, tournant, pour μ variable, autour de Δ, découpe sur le support D de X une suite projective de points $x + \lambda x'$, de coordonnées $x_j + \lambda x'_j$.

On aura $\mu = \mathcal{L}(\lambda) = \dfrac{a\lambda + b}{c\lambda + d}$; les coefficients a, b, c, d sont faciles à obtenir. Il vient

$$0 = \sum (x + \lambda x')(u + \mu u') = \sum ux + \lambda \sum ux' + \mu \sum u'x + \lambda\mu \sum u'x';$$

d'où

$$\mu = \frac{-\lambda \sum ux' - \sum ux}{\lambda \sum u'x' + \sum u'x}.$$

et

$$a = -\sum ux, \quad b = -\sum ux, \quad c = \sum u'x', \quad d = \sum u'x.$$

Le déterminant $ad - bc$ de la substitution linéaire fractionnaire $\mathcal{L}$ est

$$\sum ux \sum u'x' - \sum ux' \sum u'x = \sum (xx')_{jk}(uu')_{jk},$$

$$(xx')_{jk} = x_j x'_k - x_k x'_j, \ \ldots, \quad j, k = 1, 2, 3, 4, \quad j \neq k.$$

$ad - bc$ est le moment mutuel des deux droites D et Δ. Nous admettrons que ce moment est $\neq 0$.

16° Les relations (1) du 14° s'écrivent

$$b + c = a - d = 0 \tag{2}$$

et expriment que $i = \mathcal{L}(i)$, $-i = \mathcal{L}(-i)$.

L'équation fondamentale quadratique relative à la substitution $\mathcal{L}$ a pour racines i et $-i$. Cela est conforme au 15°, puisque le plan U, c'est-à-dire $u + iu'$, découpe sur le support D précisément le point X, ou $x + ix'$.

Il viendra, sous le bénéfice des (2),

$$\mu = \mathcal{L}(\lambda) = \frac{\lambda + \frac{b}{a}}{-\frac{b}{a}\lambda + 1}.$$

Posons

$$\frac{b}{a} = \text{tang}\,\theta, \quad \lambda = \text{tang}\,\Lambda, \quad \mu = \text{tang}\,\text{M}.$$

On a

$$\text{tang}\,\text{M} = \frac{\text{tang}\,\Lambda + \text{tang}\,\theta}{1 - \text{tang}\,\Lambda\,\text{tang}\,\theta} = \text{tang}(\Lambda + \theta),$$

$$\text{M} - \Lambda = \theta.$$

La *fig.* 1, où l'on a supposé la droite Δ perpendiculaire au plan du papier et les plans, passant par Δ, vus par la tranche, donne la disposition des divers plans $u + \mu u'$ et points $x + \lambda x'$ remarquables.

Cette figure résout les problèmes relatifs à la construction d'un couple Ξ, situé sur la multiplicité M_4, qui représente le plan complexe U.

17° *Construire* Ξ *connaissant* x'. — x' est sur le plan

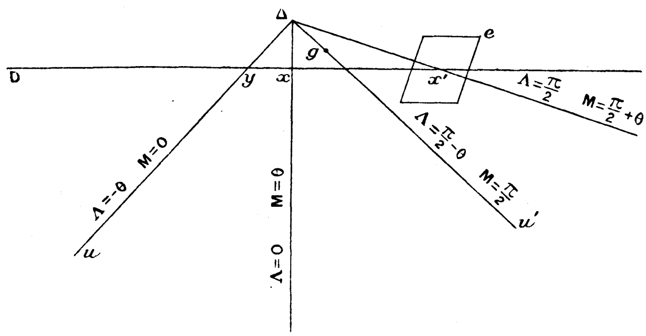
$$u + u' \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$$

et

$$\sum x'\left[u + u' \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right] = 0, \qquad \operatorname{tang}\theta = \frac{\sum u'x'}{\sum ux'}.$$

L'angle θ est connu dès qu'on possède, non pas même les coor-

Fig. 1.



données absolues de x', mais la position de x' sur le plan e de l'infini. Connaissant θ, on aura le plan $u + u' \operatorname{tang}\theta$ et x sera quelconque dans ce plan. Les ∞^2 points x' de e, combinés aux ∞^2 points du plan $u + u' \operatorname{tang}\theta$, fournissent les ∞^4 couples Ξ de M_4.

Construire Ξ *connaissant* x. — On obtient immédiatement, combinant x avec Δ, le plan $u + u' \operatorname{tang}\theta$ et l'angle θ, ainsi que le plan $u + u' \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)$. Ce dernier plan coupe e suivant une droite $\overline{x'}$ sur laquelle x' est quelconque. Les ∞^3 points x de l'espace R et les ∞ points x' de la droite $\overline{x'}$ fournissent les ∞^4 couples Ξ. x' une fois choisi sur $\overline{x'}$, on déterminera les valeurs absolues des x'_j par la relation $y_j = x_j + \lambda x'_j = x_j - x'_j \operatorname{tang}\theta$, qui exprime que le point y est sur le plan u. D'ailleurs y est donné par l'intersection de u avec le support.

Construire Ξ *connaissant le support* D. — D perce le plan e de l'infini en x'. On obtiendra θ, x comme au premier problème sans avoir besoin de connaître les valeurs absolues des x'_j. Ces dernières s'obtiendront, grâce au point y, comme au second problème. Les ∞^4 droites de l'espace R sont les supports des ∞^4 couples Ξ de M_4.

18° On construira par des procédés analogues (dualité) les ∞^4 couples H qui représentent les ∞^2 plans complexes U qui passent par un point X donné.

19° Passons maintenant à la multiplicité M_2 de R, lieu des ∞^2 couples Ξ, qui représentent les ∞ points X de la droite intersection des deux plans U, ou $u + iu'$, et V, ou $v + iv'$.

Nommons Δ_1 et Δ_2 les deux droites intersections de u avec u' ou de v avec v'; on pose $u(t) = \sum u_j t_j$, etc.,

$$t_j = \text{coordonnée courante.}$$

Les points $x + \lambda x'$ du support D déterminent, avec Δ_1 et Δ_2 respectivement, les faisceaux projectifs des plans mobiles $u + \mu u'$ et $v + \nu v'$. Si l'on pose

$$\lambda = \operatorname{tang} \Lambda, \qquad \mu = \operatorname{tang} M, \qquad \nu = \operatorname{tang} N,$$

on aura (16°)

$$M - \Lambda = \theta, \qquad N - \Lambda = \varphi, \qquad M - N = \theta - \varphi,$$

où les angles θ et φ ne dépendent plus de Λ. Or on a

$$\operatorname{tang} M = \mu = -\frac{u(t)}{u'(t)}, \qquad \operatorname{tang} N = \nu = -\frac{v(t)}{v'(t)},$$

t étant le point courant sur le support. Ensuite

$$K = \operatorname{tang}(\theta - \varphi) = \operatorname{tang}(M - N) = \frac{\operatorname{tang} M - \operatorname{tang} N}{1 + \operatorname{tang} M \operatorname{tang} N} = \frac{P(t)}{Q(t)}$$

$$= \frac{-\dfrac{u(t)}{u'(t)} + \dfrac{v(t)}{v'(t)}}{1 + \dfrac{u(t)}{u'(t)} \cdot \dfrac{v(t)}{v'(t)}} = \frac{v(t)u'(t) - u(t)v'(t)}{u(t)v(t) + u'(t)v'(t)}.$$

Un point quelconque t du support D est sur la quadrique s,

$P(t) - KQ(t) = 0$, mobile avec K du faisceau S. D est une génératrice de s.

20° s passe par quatre droites fixes : Δ_1, Δ_2, et, *algébriquement parlant,*

$$u' - iu = v' - iv = 0, \qquad u' + iu = v' + iv = 0.$$

Cette condition détermine le faisceau S, car elle définit une quadrique s, précisément au paramètre $K = \operatorname{tang}(\theta - \varphi)$ près. Les ∞ génératrices de chacune des ∞ quadriques s constituent une congruence $\mathfrak{C}$. En vertu de ce qui précède : *sont situés sur la congruence* $\mathfrak{C}$, *les* ∞^2 *supports* D *des couples* Ξ *de la multiplicité* M_2.

21° Nommons sur s :

premier système de génératrices, celui auquel appartiennent Δ_1 et Δ_2;

second système, celui des génératrices qui rencontrent Δ_1 et Δ_2.

Les supports D *appartiendront au premier système.*

Cela permet de construire les supports D : prenons un point quelconque z de R; par z passe une quadrique s_z, de S, qui se trouve ainsi connue; D est la génératrice du premier système, issue de z sur s_z.

22° Les considérations précédentes permettent de construire les ∞^2 couples Ξ de M_2.

Les supports s'obtiennent comme il vient d'être expliqué.

Un support D, pris comme il convient, sur la congruence $\mathfrak{C}$, perce le plan e de l'infini en un point x', dont se trouve connue la position sur e, mais non les coordonnées absolues.

La construction de x s'achèvera, au moyen de la droite Δ_1 ou Δ_2, comme au premier problème du 17°. D perce le plan u par exemple en un point z, qui se trouve ainsi connu. Eu égard à z, on déterminera comme au deuxième problème du 17° les valeurs absolues des x'_j. Ξ sera ainsi complètement construit.

23° Exprimons, comme au 14°, que le point X, ou $x + ix'$, est situé sur chacun des deux plans U, ou $u + iu'$, et V, ou $v + iv'$.

On aura

$$o = \sum u x - \sum u' x' = \sum u' x + \sum u x',$$
$$o = \sum v x - \sum v' x' = \sum v' x + \sum v x'.$$

Éliminons les x'_j entre ces quatre relations et une cinquième

$$\sum e x' = o,$$

qui exprime que x' est sur le plan de l'infini.

On aura

$$\begin{vmatrix} u'_1 & u'_2 & u'_3 & u'_4 & -\sum u x \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 & \sum u' x \\ v'_1 & v'_2 & v'_3 & v'_4 & -\sum v x \\ v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & \sum v' x \\ e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & o \end{vmatrix} o.$$

Quand x' parcourt e, x est situé sur un plan P dont l'équation vient d'être écrite.

P ne dépend que des cinq plans u, u', v, v', e.

CHAPITRE III.

MODULAIRE ET ARGUMENTS.

24° Sur le support D, lieu des points $x + \lambda x'$, pour λ variable, l'équation obtenue en annulant un polynome $f(\lambda)$, de degré q, fournit q points réels ou imaginaires. Si, pour $q = 2$, on prend $f(\lambda) = \lambda^2 + 1$, on a les deux points $x + ix'$ et $x - ix'$, c'est-à-dire X et son conjugué $X^{(1)}$. Si, dans l'équation $\mathcal{A}$,

$$A_1 \lambda^2 + 2 A_2 \lambda + A_3 = o,$$

on a $A_1 + A_3 = o$, c'est que (en vertu de théories classiques sur les formes quadratiques binaires) *les deux points fournis par $\mathcal{A}$ sont harmoniquement placés par rapport à* X *et* $X^{(1)}$.

Je dirai, pour abréger, que les deux points fournis par $\mathcal{A}$ sont *symétriques* et qu'une quadrique qui passe par ces deux points coupe *symétriquement* le support D.

25° Considérons le système $\mathfrak{M}$ des ∞^3 quadriques M

$$o = \sum \mu t^2; \qquad \mu_j = \text{paramètre}; \qquad t_j = \text{coordonnée courante}.$$

$\mathfrak{M}$ sera, par rapport au tétraèdre de référence $\mathfrak{T}$, *autopolaire;* autrement dit, chaque quadrique M aura pour pôle et plan polaire correspondants un sommet et la face opposée de $\mathfrak{T}$. Cette propriété suffit pour définir le système $\mathfrak{M}$.

Je désignerai par M_a une quadrique M qui passe par le point a de l'espace. Il y aura ∞^2 quadriques M_a, et ∞ quadriques M_{ab} qui passent aussi par le point b.

Les ∞ quadriques M_{ab} passent par une même biquadratique gauche G_{ab}, dont les équations seront

$$o = \sum \mu t^2 = \sum \mu' t^2 = \sum \mu a^2 = \sum \mu b^2 = \sum \mu' a^2 = \sum \mu' b^2,$$

ou, plus simplement,

$$t_j^2 = a_j^2 + \rho b_j^2, \qquad \rho = \text{paramètre variable}.$$

Enfin, il y aura une seule quadrique M_{abc}, sauf situation particulière des trois points a, b et c.

Il y aura ∞^4 (autant que de droites dans l'espace) biquadratiques G, puisque, pour $t_j^2 = y_j$, chacune des quadriques M, dont il y a ∞^3 en tout, devient un plan.

Enfin, une quadrique M sera complètement déterminée par la condition d'admettre pour génératrice une droite donnée $\mathfrak{D}$ de l'espace.

Si $\mathfrak{D}$ est la droite des deux points p et q, l'équation en σ

$$\sum \mu (p + \sigma q)^2 = o$$

doit être une identité et les μ sont déterminés par les relations

$$\sum \mu p^2 = \sum \mu q^2 = \sum \mu pq = o.$$

26° Soit maintenant une droite D, support d'un couple Ξ et lieu, pour λ variable, du point $x + \lambda x$. Une quadrique M coupe D en deux points donnés par l'équation $\mathcal{A}$

$$o = \sum \mu(x + \lambda x')^2 = \sum \mu x^2 + 2\lambda \sum \mu x x' + \lambda^2 \sum \mu x'^2.$$

Pour que M coupe D *symétriquement* au sens du 24°, il faut et il suffit que

$$o = \sum \mu x^2 + \sum \mu x'^2 = \sum \mu (x^2 + x'^2).$$

Si l'on désigne par z_j la racine carrée positive de $x_j^2 + x_j'^2$, on voit que :

Toutes les quadriques M, *qui coupent* D *symétriquement, passent par un point* ζ, dont les coordonnées ζ_j sont proportionnelles aux z_j.

Les z_j seront les *modules* du couple Ξ et ζ en sera le (point) *modulaire*.

Les modules et le modulaire qui viennent d'être introduits sont relatifs au tétraèdre de référence. Mais les définitions sont purement géométriques et l'on peut parler des *modules* et du *modulaire* d'un couple Ξ, *par rapport à un tétraèdre quelconque.*

27° Parmi les diverses quadriques M qui coupent symétriquement le support D du couple Ξ, figure celle pour laquelle D est génératrice. Pour celle-là, l'équation $\mathcal{A}$ du 26° est une identité; on a

$$o = \sum \mu x^2 = \sum \mu x'^2 = \sum \mu x x'$$

et la condition de symétrie

$$\sum \mu (x^2 + x'^2) = o$$

est satisfaite.

Ainsi, *la quadrique* M, *dont* D *est génératrice, passe par le modulaire* ζ.

Supposons, au contraire, le modulaire ζ donné. D sera une génératrice d'une certaine quadrique M_ζ (25°). Il y a ∞^2 quadriques M_ζ et, sur chacune, ∞ génératrices. Ces ∞^3 génératrices formeront un complexe $\mathfrak{G}$, qui sera connu dès que ζ le sera.

Il importe d'étudier ce complexe $\mathfrak{G}$ d'un peu plus près.

28° Reprenons les biquadratiques G_{ab}, dont il y a ∞^4, du 25°. Il y aura ∞^2 biquadratiques G_ζ passant par ζ et chacune comportera ∞^2 cordes. Je dis que *ces diverses cordes sont précisément les droites du complexe* $\mathfrak{G}$.

Prenons sur $\mathfrak{G}$ une droite D, génératrice d'une certaine quadrique M_D, laquelle passe par ζ. Une autre quadrique M_ζ est percée par D en deux points a et b, qui sont sur la courbe $G_{\zeta ab}$, intersection de M_D avec M_ζ. D est donc une corde d'une certaine courbe G_ζ, au moins.

Réciproquement, considérons une courbe $G_{\zeta ab}$ et une corde D′ ou ab de ladite biquadratique. Le système $\mathfrak{M}$ des quadriques M contient un faisceau de ∞ quadriques, toutes passant par $G_{\zeta ab}$. Soit M la quadrique mobile du faisceau. Achevons de fixer M en la faisant passer par un troisième point c de D′. M, qui passe déjà par ζ, passera par a, b et c, c'est-à-dire admettra D′ pour génératrice. La corde D′ est sur le complexe $\mathfrak{G}$.

Prenons un point quelconque y de l'espace. Les deux points y et ζ définissent une courbe G. Un plan quelconque Y passant par y coupe G en quatre points y, y', y'', y'''; il y a dans le plan sécant trois cordes

$$yy', yy'', yy'''$$

issues de y. Ainsi, *les cordes de* G *issues de* y *sont les arêtes d'un cône du troisième degré*. Donc, *le complexe* $\mathfrak{G}$ *est du degré trois au moins*. On construira plus loin (30°) l'équation de $\mathfrak{G}$ et l'on verra que le complexe est effectivement du degré trois.

29° Sur le support D, lieu des points $x + \lambda x'$, cherchons le point qui est sur la face $t_j = 0$ du tétraèdre $\mathfrak{T}$ de référence. On aura

$$0 = x_j + \lambda x'_j, \qquad \lambda = -\cot \alpha_j = \frac{-x_j}{x'_j},$$

ce qui donne l'angle α_j; il vient

$$\frac{x'_j}{\sin \alpha_j} = \frac{x_j}{\cos \alpha_j};$$

mais $z_j^2 = x_j^2 + x_j'^2$ (26°), donc

$$x_j = z_j \cos\alpha_j, \qquad x'_j = z_j \sin\alpha_j.$$

Les angles α sont, bien entendu, tels que

$$1 = \sum ex = \sum ez\cos\alpha, \qquad 0 = \sum cx' = \sum ez\sin\alpha.$$

La coordonnée-points homogène

$$(jk) = \begin{vmatrix} x_j & x_k \\ x'_j & x'_k \end{vmatrix} \qquad (j, k = 1, 2, 3, 4; j \neq k)$$

du support $\overline{xx'}$ ou D, est ainsi

$$(jk) = z_j z_k \begin{vmatrix} \cos\alpha_j & \cos\alpha_k \\ \sin\alpha_j & \sin\alpha_k \end{vmatrix} = z_j z_k \sin(\alpha_k - \alpha_j).$$

On peut aussi dire que les (jk) sont proportionnelles aux $\zeta_j\zeta_k \sin(\alpha_k - \alpha_j)$, les ζ_j étant les coordonnées du modulaire ζ (26°).

Les six différences $\alpha_k - \alpha_j$ sont exprimables au moyen de trois angles seulement ω, ψ et φ, qui seront les trois *arguments* du couple Ξ. Les angles α_j ne figurent que par leurs différences et ne sont déterminés, pour D donnée, qu'à une constante additive commune près.

Les trois arguments ω, φ et ψ peuvent être choisis de diverses façons. J'écrirai

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 2\omega,$$

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha_1 - \alpha_2 = 2\varphi, & \alpha_3 - \alpha_4 = 2\psi, \\ \text{d'où} & \\ \alpha_2 - \alpha_3 = \omega - \varphi - \psi, & \alpha_1 - \alpha_4 = \omega + \varphi + \psi, \\ \alpha_3 - \alpha_1 = -\omega - \varphi + \psi, & \alpha_2 - \alpha_4 = \omega - \varphi + \psi. \end{array}\right.$$

30° On est maintenant à même d'obtenir l'équation du complexe $\mathfrak{G}$ en coordonnées courantes (jk).

Cherchons les coefficients μ_j de la quadrique M qui passe par le modulaire ζ et admet $\overline{xx'}$ ou D pour génératrice. On a, pour M, en coordonnées courantes t_j, $\Sigma\mu t^2 = 0$, et l'équation en λ

$$0 = \sum \mu(x + \lambda x')^2 = \sum \mu x^2 + 2\lambda \sum \mu xx' + \lambda^2 \sum \mu x'^2$$

est une identité; d'où, sous le bénéfice de $x_j = z_j \cos\alpha_j$, $x'_j = z_j \sin\alpha_j$,

$$o = \sum \mu z^2 \cos^2\alpha = \sum \mu z^2 \cos\alpha \sin\alpha = \sum \mu z^2 \sin^2\alpha.$$

Les μ_j sont proportionnels aux déterminants de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} z_1^2 \cos^2\alpha_1 & z_2^2 \cos^2\alpha_2 & \dots \\ z_1^2 \cos\alpha_1 \sin\alpha_1 & z_2^2 \cos\alpha_2 \sin\alpha_2 & \dots \\ z_1^2 \sin^2\alpha_1 & z_2^2 \sin^2\alpha_2 & \dots \end{matrix} \right\|,$$

ou, ce qui revient au même, proportionnels aux quatre déterminants de la matrice

$$\left\| \begin{matrix} z_1^2 & z_2^2 & \dots \\ z_1^2 \cos 2\alpha_1 & z_2^2 \cos 2\alpha_2 & \dots \\ z_1^2 \sin 2\alpha_1 & z_2^2 \sin 2\alpha_2 & \dots \end{matrix} \right\|.$$

Si ρ est un facteur de proportionnalité, on a, par un calcul facile,

$$\begin{aligned} \rho\mu_1 z_1^2 &= \sin 2(\alpha_2 - \alpha_3) + \sin 2(\alpha_3 - \alpha_4) + \sin 2(\alpha_4 - \alpha_2), \\ -\rho\mu_2 z_2^2 &= \sin 2(\alpha_3 - \alpha_4) + \sin 2(\alpha_4 - \alpha_1) + \sin 2(\alpha_1 - \alpha_3), \\ \rho\mu_3 z_3^2 &= \sin 2(\alpha_4 - \alpha_1) + \sin 2(\alpha_1 - \alpha_2) + \sin 2(\alpha_2 - \alpha_4), \\ -\rho\mu_4 z_4^2 &= \sin 2(\alpha_1 - \alpha_2) + \sin 2(\alpha_2 - \alpha_3) + \sin 2(\alpha_3 - \alpha_1). \end{aligned}$$

Une formule bien connue de Trigonométrie élémentaire permet de transformer les seconds membres. Modifiant ρ, on aura

$$\left\{ \begin{aligned} \rho\mu_1 z_1^2 &= [23][34][42] \\ \rho\mu_2 z_2^2 &= -[34][41][13] \\ \rho\mu_3 z_3^2 &= [41][12][24] \\ \rho\mu_4 z_4^2 &= -[12][23][31] \end{aligned} \right\} \quad [jk] = \sin(\alpha_j - \alpha_k).$$

Mais on a vu (29°) que les coordonnées (jk) de droites sont proportionnelles à $z_j z_k \sin(\alpha_k - \alpha_j)$, c'est-à-dire à $z_j z_k [jk]$. Il viendra finalement, modifiant encore ρ,

$$\begin{aligned} \rho\mu_1 &= (23)(34)(42), \\ \rho\mu_2 &= -(34)(41)(13), \\ \rho\mu_3 &= (41)(12)(24), \\ \rho\mu_4 &= -(12)(23)(31). \end{aligned}$$

Tels sont les coefficients μ de la quadrique M qui admet pour génératrice la droite D, qui a les (jk) pour coordonnées-points. Exprimons que M passe par le modulaire ζ, il viendra finalement l'équation du complexe $\mathfrak{G}$ afférent à ζ, savoir

$$\Phi = \zeta_1^2(23)(34)(42) - \zeta_2^2(34)(41)(13) + \ldots = 0.$$

31° Φ est, par rapport aux coordonnées-points courantes (jk), un polynome *cubique*. Soient y un point quelconque de l'espace, Y un plan quelconque passant par y. Il y aura trois droites du complexe $\mathfrak{G}$, issues de y, dans Y. Rapprochant ce résultat du 28°, *in fine*, on a la proposition suivante : *Les droites du complexe* $\mathfrak{G}$, *issues de* y, *sont les cordes menées de* y *aux différents points de la biquadratique gauche* $G_{\zeta y}$.

32° Les explications précédentes permettent de construire immédiatement les modules z_j et le modulaire ζ d'un couple Ξ donné.

Passons aux problèmes inverses, relatifs à la construction des couples Ξ_ζ de modulaire ζ donné. Il y a ∞^3 couples Ξ_ζ.

Problème I. — *Construire* Ξ_ζ *connaissant* x.

Le plan e de l'infini coupe la biquadratique $G_{\zeta x}$ en quatre points dont chacun peut servir de x'. La valeur absolue des x'_j résulte des relations $x_j^2 + x_j'^2 = z_j^2 = \tau^2\zeta_j^2$ d'où l'on tire le facteur inconnu de proportionnalité τ et les x'_j.

Problème II. — *Construire* Ξ_ζ *connaissant la position du point* x' *dans le plan de l'infini.*

Tous les ∞ points de la biquadratique $G_{\zeta x'}$ peuvent servir de x. Une fois x choisi, les valeurs absolues de x'_j se déterminent comme plus haut.

Problème III. — *Construire* Ξ_ζ *connaissant le support* D, choisi évidemment sur le complexe $\mathfrak{G}$.

D perce le plan de l'infini en x'; D est une corde de $G_{\zeta x'}$, et rencontre encore la courbe en x. Les x'_j se déterminent en valeur absolue comme au problème I.

CHAPITRE IV.

CONSTRUCTION D'UN POINT IMAGINAIRE A ARGUMENTS ET MODULAIRE DONNÉS.

33° Considérons un couple Ξ, de modulaire ζ et d'arguments ω, φ et ψ, ces trois angles étant définis comme au 29°. Chacune des trois conditions $\omega = \text{const.}$, $\varphi = \text{const.}$, $\psi = \text{const.}$ détermine sur le complexe $\mathfrak{G}$ une congruence Ω, Φ ou Ψ. Le support D du couple est à l'intersection des congruences. Une fois D connu, la construction de Ξ s'achèvera comme au 32°.

La connaissance des congruences Ω, Φ, Ψ résout le problème relatif à la recherche des couples Ξ admettant un modulaire et des arguments donnés.

Je vais déterminer les congruences et leurs intersections deux à deux.

Congruence Ω.

34° Posons, comme on l'a déjà fait,

$$j \neq k, \qquad [jk] = \sin(\alpha_j - \alpha_k) \qquad (j, k = 1, 2, 3, 4);$$

on vérifiera aisément l'identité

$$\text{(o)} \qquad [12][34] + [23][14] + [31][24] = 0.$$

Si je parviens à former une équation, homogène par rapport aux $[jk]$ et conséquence de la relation

$$\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_4 = 2\omega = \text{const.},$$

il suffira d'y remplacer $[jk]$ par $(z_j z_k)^{-1}(jk)$ (29°), pour avoir l'équation de la congruence Ω, cette dernière étant déjà située sur le complexe $\mathfrak{G}$.

35° On a

$$[14] = \sin(\alpha_1 - \alpha_4], \qquad [23] = \sin(\alpha_2 - \alpha_3),$$

$$\begin{aligned}
[14] - [23] &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_4 - \alpha_2 + \alpha_3)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_1 - \alpha_4 + \alpha_2 - \alpha_3) \\
&= 2\sin\lambda\cos\omega \\
2[14][23] &= \cos(\alpha_1 - \alpha_4 - \alpha_2 + \alpha_3) - \cos(\alpha_1 - \alpha_4 + \alpha_2 - \alpha_3) \\
&= \cos 2\lambda - \cos 2\omega, \\
2\lambda &= \alpha_1 - \alpha_4 + \alpha_2 - \alpha_3.
\end{aligned}$$

Éliminons l'angle auxiliaire λ.

$$\cos 2\lambda = \cos 2\omega + 2[14][23] = 1 - 2\sin^2\lambda = 1 - 2\,\frac{\{[14]-[23]\}^2}{4\cos^2\omega}$$

et enfin

$$(1)\qquad \sin^2\omega = [14][23] + \frac{\{[14]-[23]\}^2}{4\cos^2\omega},$$

puis, par un calcul analogue,

$$(2)\qquad \cos^2\omega = [24][31] + \frac{\{[24]-[31]\}^2}{4\sin^2\omega}.$$

Multiplions (1) par $4\cos^2\omega$, (2) par $-4\sin^2\omega$, ajoutons et, tenant compte de l'identité (o) du 34°, nous obtiendrons

$$o = [14]^2 + [23]^2 - [24]^2 - [31]^2 - 2[12][34]\cos 2\omega.$$

Remplaçons $[jk]$ par

$$\frac{(jk)}{z_j z_k} \quad \text{ou} \quad \frac{(jk)}{\zeta_j \zeta_k}$$

et chassons les dénominateurs. L'équation de la congruence Ω sera

$$\begin{aligned}(o) = \zeta_2^2\zeta_3^2(14)^2 + \zeta_1^2\zeta_4^2(23)^2 - \zeta_1^2\zeta_3^2(24)^2 - \zeta_2^2\zeta_4^2(31)^2 \\ - 2\cos 2\omega(12)(34)\zeta_1\zeta_2\zeta_3\zeta_4\end{aligned}$$

Congruences Φ et Ψ.

36° Le calcul est analogue au précédent

$$\begin{aligned}
[23] &= \sin(\alpha_2 - \alpha_3), \qquad [31] = \sin(\alpha_3 - \alpha_1)\\
[23] + [31] &= 2\sin\tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_3 - \alpha_1)\cos\tfrac{1}{2}(\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_3 + \alpha_1)\\
&= -2\sin\varphi\cos\lambda,\\
2[23][31] &= \cos(\alpha_2 - \alpha_3 - \alpha_3 + \alpha_1) - \cos(\alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_3 - \alpha_1)\\
&= \cos 2\lambda - \cos 2\varphi,
\end{aligned}$$

puisque $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\varphi$, et posant $2\lambda = \alpha_1 + \alpha_2 - 2\alpha_3$.

Ensuite, pour éliminer λ,

$$\begin{aligned}\cos 2\lambda &= \cos 2\varphi + 2[23][31] = -1 + 2\cos^2\lambda\\ &= -1 + 2\,\frac{\{[23]+[31]\}^2}{4\sin^2\varphi};\end{aligned}$$

un calcul facile donne

$$[23]^2+[31]^2+2[23][31]\cos 2\varphi = \sin^2 2\varphi = \sin^2(\alpha_1-\alpha_2) = [12]^2.$$

L'équation de la congruence Φ est donc

$$\zeta_1^2\zeta_4^2(23)^2+\zeta_2^2\zeta_4^2(31)^2+2\cos 2\varphi\,\zeta_1\zeta_2\zeta_4^2(23)(31)-\zeta_3^2\zeta_4^2(12)^2=0.$$

La congruence Ψ s'obtiendra par un procédé tout pareil.

Surface réglée, intersection des congruences Ω et Φ.

37° Des relations $\rho(jk)=\zeta_j\zeta_k\sin(\alpha_j-\alpha_k)$ et (29°)

$$\left\{\begin{array}{ll} \alpha_1-\alpha_2=2\varphi, & \alpha_3-\alpha_4=2\psi \\ \alpha_2-\alpha_3=\omega-\varphi-\psi, & \alpha_1-\alpha_4=\omega+\varphi+\psi \\ \alpha_3-\alpha_1=-\omega-\varphi+\psi, & \alpha_2-\alpha_4=\omega-\varphi+\psi \end{array}\right\}$$

on tire

$$\begin{aligned}
\rho(12)&=\zeta_1\zeta_2\sin 2\varphi,\\
\rho(34)&=\zeta_3\zeta_4\sin 2\psi,\\
\rho(23)&=\zeta_2\zeta_3\{\ \ \sin(\omega-\varphi)\cos\psi-\cos(\omega-\varphi)\sin\psi\},\\
\rho(14)&=\zeta_1\zeta_4\{\ \ \sin(\omega+\varphi)\cos\psi+\cos(\omega+\varphi)\sin\psi\},\\
\rho(31)&=\zeta_1\zeta_3\{-\sin(\omega+\varphi)\cos\psi+\cos(\omega+\varphi)\sin\psi\},\\
\rho(24)&=\zeta_2\zeta_4\{\ \ \sin(\omega-\varphi)\cos\psi+\cos(\omega-\varphi)\sin\psi\}.
\end{aligned}$$

Soit t, de coordonnées t_j, un point quelconque sur la droite D, de coordonnées (jk), On aura d'abord

$$-t_3(12)=t_1(23)+t_2(31); \qquad -t_4(12)=t_1(24)-t_2(14).$$

Puis, par un calcul facile,

$$\begin{aligned}
\frac{\zeta_3\zeta_4}{\zeta_1\zeta_2\sin 2\varphi}\cos\psi &= -\frac{t_3\zeta_4+t_4\zeta_3}{P}=\frac{P'}{P},\\
\frac{\zeta_3\zeta_4}{\zeta_1\zeta_2\sin 2\varphi}\sin\psi &= \frac{t_3\zeta_4-t_4\zeta_3}{Q}=\frac{Q'}{Q},\\
P&=t_1\zeta_2\sin(\omega-\varphi)-t_2\zeta_1\sin(\omega+\varphi),\\
Q&=t_1\zeta_2\cos(\omega-\varphi)-t_2\zeta_1\cos(\omega+\varphi).
\end{aligned}$$

Éliminant ψ, on a l'équation de la surface réglée W, intersection, sur le complexe $\mathfrak{G}$, des deux congruences Ω et Φ. Cette équation est

$$\frac{P'^2}{P^2}+\frac{Q'^2}{Q^2}=\frac{\zeta_3^2\zeta_4^2}{\zeta_1^2\zeta_2^2\sin^2 2\varphi}=K^2,$$

$$P'^2Q^2+Q'^2P^2-K^2P^2Q^2=0.$$

38° Nommons g_{jk} l'arête $0=t_j=t_k$ du tétraèdre de référence,

a la droite $P=P'=0$ } qui rencontrent toutes deux g_{12} et g_{34}.
b la droite $Q=Q'=0$ }

W est une surface du quatrième degré qui admet pour droites doubles a, b et g_{12} (ou $P=Q=0$). Chaque génératrice D rencontre a et b. En vertu de la relation

$$\frac{\sin 2\psi}{\sin 2\varphi}=\frac{\zeta_1\zeta_2}{\zeta_3\zeta_4}\cdot\frac{(34)}{(12)} \qquad (37°)$$

$\sin 2\psi$ est proportionnel au quotient des moments de la génératrice D par rapport aux arêtes g_{12} et g_{34} du tétraèdre de référence. Cela donne la signification géométrique du paramètre ψ sur W.

39° On a donc résolu le problème relatif à la construction d'un couple Ξ, ou d'un point X, qui admet un modulaire et des arguments donnés.

Connaissant le modulaire ζ et les arguments ω et φ, on construira la surface W, puis, à l'aide de l'argument ψ, la génératrice D de W. Le support D de Ξ étant obtenu, on est ramené à un problème traité déjà (problème III du 32°).

40° Comme application, je vais représenter géométriquement la substitution linéaire canonique

$$S=|X_j \quad X_je^{i\theta_j}|.$$

Nommons X' le point transformé de X par S. Si $X_j=z_je^{i\alpha_j}$ et

$$\sum_j e_jz_je^{i\alpha_j}=Ze^{i\theta_0},$$

on a

$$X'_j=z_jZ^{-1}e^{i(\alpha_j+\theta_j-\theta_0)}.$$

X' a pour modulaire le même point ζ que X et pour arguments

$$\begin{aligned}\omega' &= \omega + \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4,\\ 2\varphi' &= 2\varphi + \theta_1 - \theta_2,\\ 2\psi' &= 2\psi + \theta_3 - \theta_4.\end{aligned}$$

On est ramené au problème qui vient d'être résolu.

J'espère, dans un Travail ultérieur, interpréter géométriquement, dans le sens qui vient d'être indiqué, la substitution linéaire quaternaire complexe générale

$$\left| X_j \quad \sum_k X_k(a_{jk} + ib_{jk}) \right|$$

$$a_{jk},\ b_{jk} = \text{réels}; \qquad j,\ k = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$