ÉLIE CARTAN

Sur l'intégration de certains systèmes de Pfaff de caractère deux

Bulletin de la S. M. F., tome 29 (1901), p. 233-302
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1901__29__233_0>

MÉMOIRES.

SUR L'INTÉGRATION DE CERTAINS SYSTÈMES DE PFAFF DE CARACTÈRE DEUX;

Par M. Élie Cartan.

Dans un Mémoire inséré tout récemment dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure,* j'ai étudié la question de l'existence des intégrales d'un système d'équations aux différentielles totales quelconques. J'ai montré en particulier que, en ce qui concerne les intégrales non singulières, la dimension maxima de l'intégrale et la nature de son indétermination étaient fournies complètement par l'étude purement géométrique d'un certain système de complexes linéaires dans un espace à un nombre convenable de dimensions. On est ainsi conduit à une série de n entiers, n désignant la dimension maxima de l'intégrale du système,

$$s_1, s_2, \ldots, s_n,$$

dont le premier a déjà été introduit par M. E. von Weber dans un Mémoire cité plus loin et qu'il a nommé le *caractère* du système. Ces entiers ne vont pas en croissant; de plus, en formulant d'une manière convenable le problème de la détermination des intégrales, j'ai montré que l'intégrale générale dépendait de

s_n	fonctions arbitraires de	n	arguments,
s_{n-1}	»	$n-1$	»
....	...	.....	...
s_1	»	1	»

et enfin de s constantes arbitraires, s désignant le nombre des équations du système.

Le cas où le caractère s_1 est égal à l'unité comprend comme cas particulier le système formé d'une seule équation de Pfaff et a fait l'objet du Mémoire dont j'ai déjà parlé de M. von Weber.

Je m'occupe, dans ce présent Mémoire, des systèmes de caractère *deux* qui comprennent comme cas particuliers les systèmes formés de deux équations de Pfaff, et aussi les systèmes auxquels sont équivalentes les équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue de deux variables indépendantes ([1]). Mais en réalité je ne traite que le cas de certains systèmes de caractère *deux* que je qualifie de *systèmes singuliers* pour la raison suivante. En général, si les coefficients d'un système de Pfaff sont des fonctions quelconques des variables, les $n - 1$ caractères $s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}$ sont tous égaux entre eux et égaux au nombre s des équations du système. Pour un système de caractère *deux* à coefficients non particuliers, on a donc

$$s_2 = s_3 = \ldots = s_{n-1} = 2,$$

s_n pouvant avoir l'une des trois valeurs 0, 1, 2. *Les systèmes que j'appelle* singuliers *sont ceux pour lesquels s_{n-1} est inférieur à* 2. Il faut ajouter une autre restriction : c'est que l'intégrale générale n'est pas engendrée par des caractéristiques analogues à celles des équations aux dérivées partielles du premier ordre, caractéristiques que j'étudie complètement dans le Mémoire précité; cette restriction n'en est d'ailleurs en réalité pas une, car tout système engendré par des caractéristiques de cette nature se ramène facilement à un système sans caractéristiques.

Le résultat fondamental obtenu dans ce Travail est que *ces systèmes singuliers s'intègrent par des équations différentielles ordinaires*. Mais, chemin faisant, la suite des raisonnements m'a conduit à introduire la notion de système *systatique;* j'appelle ainsi un système jouissant de la propriété que toutes les intégrales qui passent par un point donné et admettent en ce point une tangente donnée admettent en ce point une deuxième tangente commune. La notion de ce que j'appelle les *caractéristiques de Monge* se présente aussi tout naturellement; comme les caractéristiques dont j'ai parlé précédemment, elles engendrent les intégrales générales : par chaque point d'une intégrale générale il en passe une, et une seule; mais elles dépendent dans leur ensemble de fonctions arbitraires, c'est-à-dire que par tout point de l'espace il en passe une infinité; les caractéristiques dont il est question plus haut, au contraire, ou *caractéris-*

([1]) Et aussi certains systèmes qui en sont une généralisation immédiate et dont s'occupe M. von Weber dans un Mémoire intitulé : *Ueber gewisse Systeme Pfaff'scher Gleichungen* (*Münch. Sitzungsber.*, t. XXV, p. 423-442; 1895).

tiques de Cauchy, dépendent seulement de constantes arbitraires. Enfin, dans certains systèmes singuliers, il se présente une troisième catégorie de caractéristiques, celles de ces caractéristiques qui sont situées sur une multiplicité intégrale donnée dépendant de fonctions arbitraires.

Ce Mémoire est divisé en quatre Chapitres. Le premier est consacré à rappeler les résultats généraux sur les systèmes de Pfaff; le second, à exposer la théorie des systèmes de caractère *un* à un point de vue différent de celui de M. von Weber, bien que les résultats soient naturellement les mêmes. Le troisième Chapitre est consacré aux systèmes systatiques et à l'étude géométrique des systèmes singuliers, ou plutôt des complexes linéaires qui leur sont associés. Enfin le quatrième Chapitre s'occupe de l'intégration proprement dite de ces systèmes.

Je me propose, dans un prochain Mémoire, d'étudier les systèmes non singuliers de caractère *deux*, en partant de la réduction simultanée de deux complexes linéaires à une forme canonique, problème dont la solution s'énonce simplement et est d'ailleurs contenue virtuellement dans les nombreux travaux parus jusqu'à ce jour sur les formes bilinéaires.

CHAPITRE PREMIER.

GÉNÉRALITÉS SUR LES SYSTÈMES DE PFAFF.

I.

ÉLÉMENTS INTÉGRAUX ET MULTIPLICITÉS INTÉGRALES.

1. Étant donné un système d'équations aux différentielles totales à r variables $x_1, x_2, \ldots, x_r$,

$$(1)\qquad \begin{cases} \omega_1 = a_{11}\,dx_1 + a_{12}\,dx_2 + \ldots + a_{1r}\,dx_r = 0, \\ \omega_2 = a_{21}\,dx_1 + a_{22}\,dx_2 + \ldots + a_{2r}\,dx_r = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega_s = a_{s1}\,dx_1 + a_{s2}\,dx_2 + \ldots + a_{sr}\,dx_r = 0, \end{cases}$$

considérons les covariants bilinéaires des premiers membres de ces équations

$$(2)\quad \begin{cases} \omega'_1 = \sum_{i,k} \left(\frac{\partial a_{1k}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{1i}}{\partial x_k}\right)(dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \omega'_s = \sum_{i,k} \left(\frac{\partial a_{sk}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{si}}{\partial x_k}\right)(dx_i \delta x_k - dx_k \delta x_i) \\ \qquad (i, k = 1, 2, \dots, r). \end{cases}$$

Étant donné un système particulier de valeurs de $x_1, x_2, \dots, x_r$, système que nous appellerons un *point* d'un espace à r dimensions, regardons $dx_1, dx_2, \dots, dx_r$ comme les paramètres directeurs d'une droite issue de ce point, de même $\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_r$. Nous dirons alors que l'*élément linéaire* formé du point $(x_1, x_2, \dots, x_r)$ et de la droite $(dx_1, \dots, dx_r)$ issue de ce point est *intégral* si ces $2r$ quantités satisfont aux équations (1). Nous dirons que deux éléments linéaires *intégraux* $(dx_1, \dots, dx_r)$ et $(\delta x_1, \delta x_2, \dots, \delta x_r)$ issus d'un même point sont en *involution* si les $3r$ quantités x_i, dx_i, δx_i annulent les seconds membres des équations (2). Enfin nous dirons qu'un élément plan E_p à p dimensions [1], issu du point $(x_1, \dots, x_r)$, est *intégral* si tout élément linéaire contenu dans E_p est intégral et si deux quelconques des éléments linéaires de E_p sont en involution.

2. Ces propriétés des éléments intégraux sont invariantes par rapport à un changement de variables quelconque; la chose est évidente pour les éléments linéaires intégraux; pour les éléments à plus d'une dimension, elle résulte des propriétés bien connues du covariant bilinéaire d'une expression de Pfaff. Par un changement de variables

$$x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \dots, y_r) \qquad (i = 1, 2, \dots, r)$$

entraînant

$$dx_i = \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_1} dy_1 + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_2} dy_2 + \dots + \frac{\partial \varphi_i}{\partial y_r} dy_r$$

---

[1] Un élément à p dimensions est l'ensemble d'un point et d'une multiplicité plane à p dimensions passant par ce point; cette dernière est définie, par exemple, par un système de $r - p$ équations linéaires en $dx_1, dx_2, \dots, dx_r$.

et, par suite, transformant un élément linéaire

$$(x_1, x_2, \ldots, x_r, dx_1, \ldots, dx_r)$$

en un élément linéaire

$$(y_1, y_2, \ldots, y_r, dy_1, \ldots, dy_r),$$

on obtient

$$\omega_\rho = b_{\rho 1} dy_1 + b_{\rho 2} dy_2 + \ldots + b_{\rho r} dy_r = \varpi_\rho,$$

et l'on a alors, par le même changement de variables,

$$\omega'_\rho = \varpi'_\rho.$$

Les propriétés des éléments intégraux subsistent encore si l'on substitue au système (1) un système linéairement équivalent

$$\Omega_\rho = \lambda_{\rho 1}\omega_1 + \lambda_{\rho 2}\omega_2 + \ldots + \lambda_{\rho s}\omega_s = 0 \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, s),$$

les λ_{ik} étant des fonctions quelconques de $x_1, x_2, \ldots, x_r$ à déterminant non identiquement nul. Il est évident, en effet, qu'un élément *linéaire* intégral ne cesse pas d'être intégral. De plus, *pour les éléments linéaires intégraux,* on vérifie sans peine que l'on a

$$\Omega'_\rho = \lambda_{\rho 1}\omega'_1 + \lambda_{\rho 2}\omega'_2 + \ldots + \lambda_{\rho s}\omega'_s,$$

de sorte que deux éléments linéaires intégraux en involution ne cessent pas d'être en involution.

Donc, sous quelque forme qu'on mette le système (1) et quelque variable qu'on choisisse, un élément intégral est toujours intégral.

3. Le lieu des éléments linéaires intégraux issus d'un point donné $M(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ est un élément plan H_{r-s} défini par les équations (1); tout élément intégral issu de M est nécessairement contenu dans H_{r-s}; mais la réciproque n'est en général pas vraie. Si nous coupons tous les éléments issus de M par une multiplicité plane P à $r-1$ dimensions ne passant pas par M, chaque élément linéaire donne un point et $dx_1, dx_2, \ldots, dx_r$ peuvent être regardés comme les coordonnées *homogènes* de ce point dans P; ce point peut être appelé l'*image* de l'élément linéaire. Le lieu des images des éléments linéaires intégraux issus de M est une multiplicité plane ε_{r-s-1} à $r-s-1$ dimensions. La condition nécessaire et suffisante pour que deux éléments linéaires intégraux

issus de M soient en involution est que la droite qui joint leurs images appartienne d'abord à ε_{r-s-1} et ensuite à s *complexes linéaires* définis par les équations (2); les quantités

$$dx_i\,\delta x_k - dx_k\,\delta x_i$$

n'étant en effet autre chose que les coordonnées plückériennes de la droite et ces coordonnées étant assujetties à vérifier s relations linéaires (non nécessairement indépendantes).

D'ailleurs, si l'on tient compte de ce que la droite appartient à ε_{r-s-1}, on peut ne laisser dans les équations de ces complexes que les $2r-2s$ quantités $dx_1, dx_2, \ldots, dx_{r-s}$; $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_{r-s}$, si les équations (1) sont résolubles par rapport à $dx_{r-s+1}, \ldots, dx_r$, de sorte que tout se ramène à la considération de points d'un espace à $r-s-1$ dimensions.

4. Ces préliminaires étant posés, au système donné (1) on peut faire correspondre un entier n et un système de n entiers

$$s_1,\quad s_2,\quad \ldots,\quad s_n$$

jouissant des propriétés suivantes.

Le lieu des éléments linéaires intégraux en involution avec un élément linéaire intégral arbitraire E_1 est un élément plan à $r-s-s_1$ dimensions H_{r-s-s_1}.

Par un élément intégral arbitraire E_2 contenant E_1 il passe au moins un élément intégral à trois dimensions et le lieu de ces éléments intégraux est un élément plan à $r-s-s_1-s_2$ dimensions $H_{r-s-s_1-s_2}$ contenu dans H_{r-s-s_1}, ...

Par un élément intégral arbitraire E_{n-1} contenant E_{n-2} il passe au moins un élément intégral à n dimensions et le lieu de ces éléments intégraux, ou encore le lieu des éléments linéaires intégraux en involution avec E_{n-1}, est un élément plan à $r-s-s_1-\ldots-s_{n-1}$ dimensions $H_{r-s-\ldots-s_{n-1}}$ contenu dans $H_{r-s-\ldots-s_{n-2}}$.

Par un élément intégral arbitraire E_n contenant E_{n-1} il ne passe aucun élément intégral à $n+1$ dimensions; autrement dit, le lieu des éléments linéaires intégraux en involution avec E_n est l'élément E_n lui-même et l'on a

$$n = r - s - s_1 - \ldots - s_{n-1} - s_n.$$

Ces entiers $s, s_1, \ldots, s_n$ ne peuvent pas aller en croissant, c'est-à-dire que l'on a les inégalités

$$s \geqq s_1 \geqq s_2 \geqq \ldots \geqq s_n,$$

et ces nombres peuvent d'ailleurs être tous nuls à partir d'un certain rang.

On voit que s_1 désigne le nombre des équations indépendantes qu'il faut ajouter à (1) pour obtenir H_{r-s-s_1}, que s_2 est le nombre des équations indépendantes qu'il faut ajouter à celles de H_{r-s-s_1} pour obtenir $H_{r-s-s_1-s_2}$ et ainsi de suite. Si, en particulier, on désigne par $(\delta x_1, \ldots, \delta x_r)$ les coordonnées de E_1, $s+s_1$ désigne le nombre des équations indépendantes en $dx_1, \ldots, dx_r$ définies par (1) et (2), ou encore c'est le rang de la matrice

$$(3) \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sr} \\ \sum \alpha_{11i}\,\delta x_i & \sum \alpha_{12i}\,\delta x_i & \ldots & \sum \alpha_{1ri}\,\delta x_i \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \sum \alpha_{s1i}\,\delta x_i & \sum \alpha_{s2i}\,\delta x_i & \ldots & \sum \alpha_{sri}\,\delta x_i \end{vmatrix},$$

où l'on a posé

$$\alpha_{\rho ik} = \frac{\partial a_{\rho k}}{\partial x_i} - \frac{\partial a_{\rho i}}{\partial x_k} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, s;\ i, k = 1, 2, \ldots, r),$$

et où $\delta x_1, \delta x_2, \ldots, \delta x_r$ sont regardés comme des quantités arbitraires satisfaisant à (1).

De même $s+s_1+s_2$ est le rang de la matrice obtenue en ajoutant à la précédente les lignes

$$\begin{matrix} \sum \alpha_{11i}\,\delta' x_i, & \sum \alpha_{12i}\,\delta' x_i, & \ldots, & \sum \alpha_{1ri}\,\delta' x_i, \\ \ldots\ldots, & \ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots, \\ \sum \alpha_{s1i}\,\delta' x_i, & \sum \alpha_{s2i}\,\delta' x_i, & \ldots, & \sum \alpha_{sri}\,\delta' x_i, \end{matrix}$$

et où $(\delta x_1, \ldots, \delta x_r)$, $(\delta' x_1, \ldots, \delta' x_r)$ définissent un élément intégral arbitraire à deux dimensions. Et ainsi de suite.

Si l'on s'est arrangé de manière à faire disparaître dans ω'_1, $\omega'_2, \ldots, \omega'_s$ les termes en $dx_{r-s+1}, \ldots, dx_r$, $\delta x_{r-s+1}, \ldots, \delta x_r$ et qu'alors ω'_ρ prenne la forme

$$(4) \qquad \omega'_\rho = \sum_{i,k}^{1,\ldots,r-s} A_{\rho ik}(dx_i\,\delta x_k - dx_k\,\delta x_i),$$

s_1 est tout simplement le rang de la matrice

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} \sum_i A_{11i}\,\delta x_i & \sum_i A_{12i}\,\delta x_i & \ldots & \sum_i A_{1,r-s,i}\,\delta x_1 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \sum_i A_{s1i}\,\delta x_i & \sum_i A_{s2i}\,\delta x_i & \ldots & \sum_i A_{s,r-s,i}\,\delta x_i \end{vmatrix},$$

où $\delta x_1, \ldots, \delta x_{r-s}$ sont des quantités absolument arbitraires.

Cet entier s_1 s'appelle le *caractère* du système d'équations aux différentielles totales donné. Par analogie, $s_2, s_3, \ldots, s_n$ sont les 2e, 3e, …, $n^{\text{ième}}$ caractères du système.

5. Voici maintenant quelle est la signification des entiers qui viennent d'être introduits au point de vue de l'existence des multiplicités intégrales du système (1).

Par un point arbitraire M_0 il passe au moins une multiplicité intégrale à une dimension M_1 ; par une multiplicité intégrale arbitraire M_1 il passe au moins une multiplicité intégrale à deux dimensions $M_2, \ldots$; par une multiplicité intégrale arbitraire M_{n-1} il passe au moins une multiplicité intégrale à n dimensions M_n; enfin par une multiplicité intégrale arbitraire M_n il ne passe aucune multiplicité intégrale à $n+1$ dimensions.

D'une manière plus précise, désignons par :

μ_0 un point arbitraire;
μ_1 une multiplicité arbitraire à $s+1$ dimensions passant par μ_0;
μ_2 une multiplicité arbitraire à $s+s_1+2$ dimensions contenant $\mu_1, \ldots$;
μ_n une multiplicité arbitraire à $s+s_1+\ldots+s_{n-1}+n$ dimensions contenant μ_{n-1}.

Alors il existe une multiplicité intégrale à n dimensions M_n et une seule passant par μ_0, ayant en commun avec μ_1 une multiplicité à une dimension, avec μ_2 une multiplicité à deux dimensions, ..., avec μ_{n-1} une multiplicité à $n-1$ dimensions, et enfin contenue tout entière dans μ_n. De plus, cette multiplicité M_n n'est contenue dans aucune multiplicité intégrale à $n+1$ dimensions ([1]).

En présentant d'une manière convenable les éléments arbitraires de l'intégrale M_n, on peut dire encore que cette intégrale dépend respectivement de s_n, s_{n-1}, ..., s_1 fonctions arbitraires de n, $n-1$, ..., 1 arguments et de s constantes arbitraires.

Si s_{n-1} est nul et si, d'une manière générale, s_ν est le premier caractère qui soit nul ($\nu \leqq n-1$), la recherche de la multiplicité intégrale M_n déterminée par les multiplicités μ_0, μ_1, ..., μ_n dont il est question plus haut se ramène à la résolution d'un problème analogue à ν variables indépendantes, mais dépendant de $n-\nu$ paramètres arbitraires.

6. Enfin il est un cas où la multiplicité intégrale générale M_n est engendrée par une famille de courbes ou de multiplicités dépendant de constantes arbitraires : c'est celui où par chaque point $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ il passe des éléments intégraux *caractéristiques,* c'est-à-dire engendrés par des éléments linéaires intégraux en involution avec *tous* les éléments linéaires intégraux issus de M. Ces éléments caractéristiques, s'il en existe, sont tous compris dans l'un d'entre eux, et la dimension de cet élément indique la dimension des multiplicités caractéristiques qui engendrent M_n. On obtient ce plus grand élément caractéristique en ajoutant aux équations (1) celles qu'on obtient en annulant tous les mineurs à $s+1$ lignes et $s+1$ colonnes de la matrice (3)

$$(3)\qquad \left|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sr} \\ \sum \alpha_{11i}\, dx_i & \sum \alpha_{12i}\, dx_i & \ldots & \sum \alpha_{1ri}\, dx_i \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \sum \alpha_{s1i}\, dx_i & \sum \alpha_{s2i}\, dx_i & \ldots & \sum \alpha_{sri}\, dx_i \end{array}\right|,$$

[1]) La recherche de l'intégrale M_n déterminée par les conditions énoncées constitue ce que j'ai appelé le *problème de Cauchy*.

ou encore, si les covariants ω' ont été mis sous la forme (4), en ajoutant aux équations (1) les suivantes :

$$(6)\qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_i^{1,\ldots,r-s} \mathrm{A}_{\rho 1 i}\, dx_i = \sum_i \mathrm{A}_{\rho 2 i}\, dx_i = \ldots = \sum_i \mathrm{A}_{\rho, r-s, i}\, dx_i = 0 \\ \qquad\qquad (\rho = 1, 2, \ldots, s). \end{array} \right.$$

Si alors les équations (1) et (6) se réduisent à moins de r indépendantes, elles constituent un système d'équations aux différentielles totales *complètement intégrable* et leur intégrale générale fournit les multiplicités caractéristiques. De plus, si les équations

$$u_1 = a_1, \qquad u_2 = a_2, \qquad \ldots, \qquad u_{r'} = a_{r'},$$

représentent ces multiplicités, on peut, par un changement de variables, faire en sorte que le système (1) ne dépende plus que de $u_1, u_2, \ldots, u_{r'}$; de sorte qu'on est ramené à rechercher l'intégrale générale d'un nouveau système à r' variables pour lequel on a d'ailleurs

$$n' = n - r + r',$$

$$s' = s, \qquad s'_1 = s_1, \qquad s'_2 = s_2, \qquad \ldots, \qquad s'_{n'} = s_{n'} \qquad (s_{n'+1} = \ldots = s_n = 0).$$

Ce système formé des équations (1) et (6) s'appelle le *système adjoint* du système donné.

En particulier, la condition nécessaire et suffisante pour que le système donné soit complètement intégrable est que les équations (6) soient des identités, ou encore que tous les déterminants à $s+1$ lignes et $s+1$ colonnes de toutes les matrices,

$$(7)\qquad \left| \begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{s1} & a_{s2} & \ldots & a_{sr} \\ \alpha_{\rho 1 i} & \alpha_{\rho 2 i} & \ldots & \alpha_{\rho r i} \end{array} \right| \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, s;\ i = 1, 2, \ldots, r),$$

soient nuls : alors on a

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_n = 0,$$
$$r = s + n.$$

II.

LES EXPRESSIONS DIFFÉRENTIELLES SYMBOLIQUES ET LEURS DÉRIVÉES.

7. Nous représenterons le covariant bilinéaire ω' de l'expression de Pfaff

$$\omega = a_1\,dx_1 + a_2\,dx_2 + \ldots + a_r\,dx_r \tag{8}$$

sous la forme *symbolique*

$$\omega' = \sum_{i,k}\left(\frac{\partial a_k}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right) dx_i\,dx_k = da_1\,dx_1 + \ldots + da_r\,dx_r, \tag{9}$$

où les différentielles $dx_1, \ldots, dx_r$ sont soumises aux règles de la multiplication *combinatoire* de Grassmann ([1]).

Le procédé de dérivation qui permet de passer de ω à ω' peut s'appliquer à des expressions différentielles symboliques de n'importe quel degré. Considérons, pour fixer les idées, une expression différentielle symbolique du second degré

$$\Omega = \sum_{i,k}^{1,\ldots,r} a_{ik}\,dx_i\,dx_k \qquad (a_{ii} = 0,\ a_{ik} + a_{ki} = 0); \tag{10}$$

les coefficients a_{ik} étant des fonctions quelconques de $x_1, x_2, \ldots, x_r$; la *dérivée* de Ω sera, par définition, l'expression différentielle du troisième degré définie par

$$\Omega' = \sum da_{ik}\,dx_i\,dx_k = \sum_{i,j,k}^{1,2,\ldots,r}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j}\right) dx_i\,dx_j\,dx_k. \tag{11}$$

Cette expression Ω' est un *covariant* de Ω par rapport à tout changement de variables, au même titre que ω' est un covariant de ω ([2]).

([1]) La multiplication est *distributive* et *associative;* de plus, on a

$$dx_i\,dx_k = -\,dx_k\,dx_i, \qquad dx_i\,dx_i = 0.$$

Voir CARTAN, *Sur certaines expressions différentielles et le problème de Pfaff* (*Ann. de l'Éc. Norm. sup.*, 1899, p. 244 et suiv.).

([2]) Pour la démonstration, *voir* CARTAN, *loc. cit.*, p. 251-252.

8. Voici maintenant une proposition très importante et qui nous sera d'un usage fréquent :

Si ω désigne une expression de Pfaff quelconque, ω' son expression dérivée (covariant bilinéaire), l'expression du troisième degré dérivée de ω' est identiquement nulle.

On peut donner de ce théorème une démonstration intuitive fondée sur le caractère de covariance de la dérivée. La dérivée de ω' est, en effet, la somme des dérivées des termes

$$da_1 dx_1, \quad da_2 dx_2, \quad \ldots, \quad da_r dx_r;$$

or, prenons le premier de ces termes; si a_1 ne dépend que de x_1, ce terme est nul et sa dérivée aussi; dans le cas contraire on peut, par un changement de variables, faire en sorte que a_1 et x_1 soient deux des nouvelles variables y_1, y_2; mais alors la dérivée de $dy_1 dy_2$ est nulle, puisque tous les coefficients sont constants. Donc les dérivées de tous les termes de ω' sont nulles.

On peut aussi vérifier ce théorème par le calcul; on a, en effet, pour ω'

$$a_{ik} = \frac{\partial a_k}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_k},$$

de sorte que le coefficient de $dx_i dx_j dx_k$ dans l'expression dérivée de ω' est

$$\begin{aligned} &\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial a_{ki}}{\partial x_j} \\ &\quad = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} - \frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right) + \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial a_k}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_k}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i}\right) \end{aligned}$$

et le développement du second membre montre qu'il est nul.

9. Théorème. — *Si l'expression différentielle du second degré Ω est le produit de deux expressions de Pfaff ω et ϖ, on a*

$$\Omega' = \omega'\varpi - \varpi'\omega. \tag{12}$$

Si, en effet,

$$\Omega = (a_1 dx_1 + \ldots + a_r dx_r)(b_1 dx_1 + \ldots + b_r dx_r) = \sum_{i,k} a_i b_k dx_i dx_k,$$

on a

$$\Omega' = \sum (b_k da_i + a_i db_k)\, dx_i dx_k$$
$$= \sum da_i dx_i \sum b_k dx_k - \sum a_i dx_i \sum db_k dx_k,$$

ce qui démontre le théorème.

Théorème. — *Si* ω *désigne une expression différentielle d'un degré quelconque et* m *un coefficient fonction finie de* $x_1, x_2, \ldots, x_r$, *si enfin on pose*

$$\Omega = m\omega,$$

on a

$$\Omega' = m\omega' + dm\,\omega. \tag{13}$$

La démonstration est évidente.

10. On peut, dans une expression différentielle symbolique ω, introduire, au lieu des r différentielles $dx_1, dx_2, \ldots, dx_r$, r combinaisons linéaires à coefficients fonctions quelconques des x, c'est-à-dire r expressions de Pfaff, linéairement indépendantes, soient $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_r$

$$\varpi_i = \lambda_{i1} dx_1 + \lambda_{i2} dx_2 + \ldots + \lambda_{ir} dx_r,$$

ces expressions de Pfaff n'étant plus nécessairement des différentielles exactes. Alors l'expression ω devient une expression différentielle en $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_k$, dans laquelle les ϖ sont soumises aux règles de la multiplication combinatoire. Si, par exemple, on a

$$\omega = A_1\varpi_1 + A_2\varpi_2 + \ldots + A_r\varpi_r,$$

la dérivée de ω se calculera, d'après les théorèmes précédents (form. 13), au moyen de la formule

$$\omega' = dA_1\,\varpi_1 + dA_2\,\varpi_2 + \ldots + dA_r\,\varpi_r + A_1\varpi'_1 + \ldots + A_r\varpi'_r;$$

si ω est une expression du second degré

$$\omega = \sum A_{ik}\varpi_i\varpi_k,$$

on aura (form. 12 et 13)

$$\omega' = \sum dA_{ik}\varpi_i\varpi_k + \sum A_{ik}(\varpi'_i\varpi_k - \varpi'_k\varpi_i).$$

11. Voici maintenant une notation dont nous nous servirons souvent. Si Ω et Π désignent deux expressions différentielles de même degré δ, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ des expressions différentielles homogènes dont chacune est de degré au plus égal à celui de Ω, nous considérerons des *congruences* de la forme

$$(14) \qquad \Omega \equiv \Pi \quad (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p)$$

et cette congruence signifiera qu'on peut trouver p expressions différentielles $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_p$ de degrés respectivement $\delta - \delta_1$, $\delta - \delta_2, \ldots, \delta - \delta_p$ (une expression de degré zéro étant une fonction finie de variables), telles que l'on ait l'identité

$$(15) \qquad \Omega = \Pi + \omega_1\chi_1 + \omega_2\chi_2 + \ldots + \omega_p\chi_p.$$

Théorème. — *La congruence* (14)

$$\Omega \equiv \Pi \quad (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p)$$

entraîne la congruence

$$(16) \qquad \Omega' \equiv \Pi' \quad (\mathrm{mod}\ \omega_1, \ldots, \omega_p; \omega'_1, \ldots, \omega'_p).$$

En effet, la congruence (14) étant équivalente à une identité de la forme (15), on en déduit

$$\Omega' = \Pi' + \omega'_1\chi_1 + \ldots + \omega'_p\chi_p \pm \omega_1\chi'_1 + \ldots \pm \omega_p\chi'_p,$$

ce qui entraîne manifestement la congruence à démontrer (16).

12. Appliquons ces conventions au système d'équations de Pfaff

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = a_{11}dx_1 + \ldots + a_{1r}dx_r = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega_s = a_{s1}dx_1 + \ldots + a_{sr}dx_r = 0. \end{array} \right.$$

Prenons, avec $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s$, $\rho = r - s$ autres expressions de Pfaff $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_\rho$ indépendantes entre elles et indépendantes des ω. Alors chacun des covariants $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_s$ sera une expression différentielle du second degré en $\omega_1, \ldots, \omega_s, \varpi_1, \ldots, \varpi_\rho$

et, par suite, on pourra écrire

$$(17)\qquad \begin{cases} \omega'_1 \equiv \sum\limits_{i,k}^{1,\ldots,\rho} A_{1ik}\varpi_i\varpi_k, \\ \omega'_2 = \sum\limits_{i,k} A_{2ik}\varpi_i\varpi_k, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \omega'_s = \sum A_{sik}\varpi_i\varpi_k \\ (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s), \end{cases}$$

les A_{jik} étant des fonctions convenables de $x_1, \ldots, x_r$.

En particulier, la condition nécessaire et suffisante pour que le système (1) soit complètement intégrable est exprimée par les congruences

$$(18)\qquad \omega'_1 \equiv \omega'_2 \equiv \ldots \equiv \omega'_s \equiv 0 \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s).$$

Remarquons que tout élément linéaire issu d'un point *donné* $(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ peut être défini au moyen des rapports mutuels des r quantités $\omega_1, \ldots, \omega_s, \varpi_1, \ldots, \varpi_\rho$, qui sont, en effet, des combinaisons linéaires à coefficients constants de $dx_1, dx_2, \ldots, dx_r$; on a simplement effectué une transformation homographique des coordonnées de ces éléments linéaires. Avec ces nouvelles coordonnées, les conditions pour qu'un élément linéaire soit intégral sont simplement

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_s = 0;$$

de sorte que tout élément linéaire *intégral* est défini par un système de valeurs de $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_\rho$. Les conditions pour que deux éléments linéaires intégraux $(\varpi_1, \ldots, \varpi_\rho)$ et $(\varpi'_1, \varpi'_2, \ldots, \varpi'_\rho)$ soient en involution sont

$$\begin{cases} \sum A_{1ik}(\varpi_i\varpi'_k - \varpi_k\varpi'_i) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \sum A_{sik}(\varpi_i\varpi'_k - \varpi_k\varpi'_i) = 0, \end{cases}$$

et les éléments *caractéristiques* sont donnés par les équations

$$(19)\quad \sum_k^{1,\dots,\rho} A_{i1k}\varpi_k = \sum_k^{1,\dots,\rho} A_{i2k}\varpi_k = \dots = \sum_k^{1,\dots,\rho} A_{i\rho k}\varpi_k = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots s).$$

13. Comme application, nous allons donner une nouvelle démonstration du théorème fondamental de la théorie des caractéristiques, à savoir que le *système des équations* (1) *et* (19) *est complètement intégrable.*

Nous pouvons toujours, en effet, supposer choisies les ρ expressions ϖ, de manière que les équations (19) se réduisent à

$$\varpi_1 = \varpi_2 = \dots = \varpi_\sigma = 0 \qquad (\sigma \leqq \rho),$$

et il s'agit alors de montrer que le système d'équations de Pfaff

$$\omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_s = \varpi_1 = \dots = \varpi_\sigma = 0$$

est complètement intégrable, ou encore que l'on a

$$\omega'_1 \equiv \omega'_2 \equiv \dots \equiv \omega'_s \equiv \varpi'_1 \equiv \dots \equiv \varpi'_\sigma \equiv 0 \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \dots, \varpi_\sigma).$$

Pour cela, remarquons d'abord que, par hypothèse, les équations (19) ne doivent pas contenir $\varpi_{\sigma+1}, \dots, \varpi_\rho$, c'est-à-dire que tous les coefficients

$$A_{ij\sigma+1}, \quad \dots, \quad A_{ij\rho} \qquad (i = 1, 2, \dots, s;\ j = 1, 2, \dots, \rho)$$

sont nuls, ou enfin que dans les seconds membres des formules (17) n'entrent que $\varpi_1, \varpi_2, \dots, \varpi_\sigma$. De plus, les relations (19)

$$\sum_k^{1,\dots,\sigma} A_{i1k}\varpi_k = \dots = \sum_k^{1,\dots,\sigma} A_{i\sigma k}\varpi_k = 0$$

entraînent avec elles

$$\varpi_1 = \varpi_2 = \dots = \varpi_\sigma = 0.$$

Cela étant, prenons les dérivées des deux membres des congruences (17), *en remarquant que les dérivées des expressions*

$\omega'_1, \ldots, \omega'_s$ *sont identiquement nulles.* Nous obtenons

$$(20) \quad \begin{cases} \sum_{i,k}^{1,\ldots,\sigma} dA_{1ik}\varpi_i\varpi_k + \sum_{i,k}^{1,\ldots,\sigma} A_{1ik}(\varpi'_i\varpi_k - \varpi'_k\varpi_i) \equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \sum_{i,k}^{1,\ldots,\sigma} dA_{sik}\varpi_i\varpi_k + \sum_{i,k}^{1,\ldots,\sigma} A_{sik}(\varpi'_i\varpi_k - \varpi'_k\varpi_i) \equiv 0 \\ \qquad (\bmod\ \omega_1, \ldots, \omega_s;\ \omega'_1, \ldots, \omega'_s). \end{cases}$$

D'après (17), ces congruences sont *a fortiori* vraies, si l'on prend pour modules $\omega_1, \ldots, \omega_s$, et tous les produits $\varpi_i\varpi_k$ $(i, k = 1, \ldots, \sigma)$; dans ces conditions elles se réduisent à

$$(21) \quad \begin{cases} \sum A_{1ik}(\varpi'_i\varpi_k - \varpi'_k\varpi_i) \equiv 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \sum A_{sik}(\varpi'_i\varpi_k - \varpi'_k\varpi_i) \equiv 0 \\ (\bmod\ \omega_1, \ldots, \omega_s;\ \varpi_1\varpi_2, \ldots, \varpi_{\sigma-1}\varpi_\sigma). \end{cases}$$

Nous pouvons alors, sans changer ces congruences, enlever dans $\varpi'_1, \ldots, \varpi'_\sigma$ les termes qui contiennent $\varpi_1, \ldots, \varpi_\sigma$, et si nous désignons alors par $\overline{\varpi}'_1, \ldots, \overline{\varpi}'_\sigma$ ce que deviennent $\varpi'_1, \ldots, \varpi'_\sigma$ quand on n'y conserve que les termes du second degré en $\varpi_{\sigma+1}, \ldots, \varpi_\rho$, les congruences (21) se changent dans les *identités*

$$(22) \quad \begin{cases} \sum A_{1ik}(\overline{\varpi}'_i\varpi_k - \overline{\varpi}'_k\varpi_i) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \sum A_{sik}(\overline{\varpi}'_i\varpi_k - \overline{\varpi}'_k\varpi_i) = 0, \end{cases}$$

qui entraînent, en égalant à zéro les coefficients de $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_\sigma$,

$$\sum_k^{1,\ldots,\sigma} A_{1ik}\overline{\varpi}'_k = \sum_k^{1,\ldots,\sigma} A_{2ik}\overline{\varpi}'_k = \ldots = \sum_k^{1,\ldots,\sigma} A_{sik}\overline{\varpi}'_k = 0,$$

ou enfin, d'après une remarque faite précédemment,

$$\overline{\varpi}'_1 = \overline{\varpi}'_2 = \ldots = \overline{\varpi}'_\sigma = 0.$$

Il en résulte bien les congruences à démontrer

$$\omega'_1 \equiv \omega'_2 \equiv \ldots \equiv \omega'_s \equiv \varpi'_1 \equiv \ldots \equiv \varpi'_\sigma \equiv 0 \qquad (\text{mod } \omega_1, \ldots, \varpi_\sigma).$$

14. Voici maintenant deux remarques qui nous seront utiles.

Si Ω *désigne une expression symbolique du second degré et* ω *une expression non nulle du premier degré, la congruence*

$$\Omega \equiv 0 \qquad (\text{mod } \omega)$$

entraîne l'identité

$$\Omega^2 = \Omega\,\Omega = 0,$$

car il existe une expression de Pfaff ϖ telle que

$$\Omega = \omega\varpi,$$

et alors

$$\Omega^2 = \omega\varpi\,\omega\varpi = 0,$$

à cause de la présence de deux facteurs identiques du premier degré.

Plus généralement si $\omega_1, \ldots, \omega_p$ *désignent* p *expressions indépendantes du premier degré, la congruence*

$$\Omega \equiv 0 \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p)$$

entraîne

$$\Omega^{p+1} = 0,$$

car la puissance $(p+1)$ de toute expression de la forme

$$\omega_1\varpi_1 + \ldots + \omega_p\varpi_p$$

est une somme de termes dont chacun contient au moins deux facteurs identiques et par suite est nul.

La deuxième remarque est la suivante :

Si $\omega_1, \ldots, \omega_p$ *désignent* p *expressions indépendantes du premier degré, la congruence*

$$\Omega \equiv 0 \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p)$$

est équivalente à l'identité

$$\omega_1\omega_2 \ldots \omega_p\,\Omega = 0;$$

car si l'on a

$$\Omega = \omega_1\varpi_1 + \omega_2\varpi_2 + \ldots + \omega_p\varpi_p,$$

chaque terme du produit $\omega_1\omega_2\ldots\omega_p\Omega$ contient deux facteurs identiques du premier degré; et réciproquement si le produit $\omega_1\omega_2\ldots\omega_p\Omega$ est identiquement nul, on peut choisir à la place de $dx_1, \ldots, dx_r$, r expressions indépendantes de Pfaff parmi lesquelles $\omega_1, \ldots, \omega_p$; si alors $\omega_{p+1}, \ldots, \omega_r$ sont les $r-p$ autres, tout terme de Ω devra contenir une des expressions $\omega_1, \ldots, \omega_p$, sinon on obtiendrait dans le produit $\omega_1\omega_2\ldots\omega_p\Omega$ un terme *non nul* et irréductible avec un autre terme quelconque du même produit. Cela démontre le théorème.

15. Nous introduirons enfin la définition suivante :

Étant données une expression Ω du second degré et p expressions $\omega_1, \ldots, \omega_p$ du premier degré, nous désignerons sous le nom de GENRE *de l'expression Ω (mod $\omega_1, \ldots, \omega_p$) le plus petit entier h tel que l'on ait*

$$\Omega^{h+1} \equiv 0 \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p).$$

Si $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$ sont indépendantes, c'est le plus petit entier satisfaisant à l'identité

$$\omega_1\omega_2\ldots\omega_p\,\Omega^{h+1} = 0.$$

D'une manière plus générale, si au lieu d'une seule expression Ω du second degré l'on en a plusieurs

$$\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_q,$$

nous désignerons sous le nom de *genre* du faisceau

$$u_1\Omega_1 + u_2\Omega_2 + \ldots + u_q\Omega_q \tag{23}$$

par rapport aux modules $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_p$, le genre maximum de l'expression (23), où l'on regarde $u_1, \ldots, u_q$ comme des constantes arbitraires. Le genre ne change pas si l'on remplace les Ω par des expressions qui leur soient congrues (mod $\omega_1, \ldots, \omega_p$).

Le genre d'un système de Pfaff sera celui du faisceau formé par les covariants bilinéaires de ses premiers membres, les modules étant ces premiers membres eux-mêmes. La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système de Pfaff soit complètement intégrable est donc qu'il soit de genre zéro.

CHAPITRE II.

LES SYSTÈMES DE PFAFF DE CARACTÈRE *un*.

III.

LE SYSTÈME DÉRIVÉ.

16. Les résultats obtenus dans ce Chapitre ne sont pas nouveaux et sont dus en grande partie à M. E. von Weber (¹). Mais ils constituent une application simple des principes du Chapitre précédent et ils nous seront utiles pour l'étude des systèmes de caractère *deux*.

Le premier théorème fondamental est le suivant :

Théorème. — *On peut toujours choisir les équations d'un système de Pfaff de caractère* un *de manière que l'on ait*

$$\omega'_2 \equiv \omega'_3 \equiv \ldots \equiv \omega'_s \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s).$$

En effet, nous pouvons toujours mettre les covariants bilinéaires $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_s$ sous la forme (17) du Chapitre précédent

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \omega'_1 \equiv \displaystyle\sum_{i,k}^{1,\ldots,\rho} A_{1ik}\varpi_i\varpi_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega'_s \equiv \displaystyle\sum_{i,k}^{1,\ldots,\rho} A_{sik}\varpi_i\varpi_k \end{array} \right. \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s),$$

en désignant par $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_\rho$, ρ expressions de Pfaff indépendantes entre elles et indépendantes de $\omega_1, \ldots, \omega_s$. Cela étant, le caractère s_1 est le rang de la matrice

$$(2) \qquad \left\| \begin{array}{cccc} \sum A_{11i}\varpi_i & \sum A_{12i}\varpi_i & \ldots & \sum A_{1\rho i}\varpi_i \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ \sum A_{s1i}\varpi_i & \sum A_{s2i}\varpi_i & \ldots & \sum A_{s\rho i}\varpi_i \end{array} \right\|,$$

(¹) E. von Weber, *Zur Invariantentheorie der Systeme Pfaff'scher Gleichungen* (*Leipz. Ber.*, p. 207-229; 1898).

où les ϖ sont regardées comme des paramètres *arbitraires*. Ici, ce caractère doit être égal à l'unité, c'est-à-dire que tous les mineurs du deuxième degré de la matrice (2) doivent être identiquement nuls. Supposons, par exemple, que les éléments de la première ligne ne soient pas tous identiquement nuls et qu'en particulier le premier élément

$$\sum A_{11i}\varpi_i$$

ne soit pas identiquement nul. Alors l'identité

$$\sum_i A_{11i}\varpi_i \sum_i A_{2ki}\varpi_i = \sum_i A_{1ki}\varpi_i \sum_i A_{21i}\varpi_i$$

(où les ϖ sont maintenant soumis aux règles ordinaires du calcul algébrique) montre que l'on a, ou bien

$$\left.\begin{aligned}\sum_i A_{1ki}\varpi_i &= l_k \sum_i A_{11i}\varpi_i\\ \sum_i A_{2ki}\varpi_i &= l_k \sum_i A_{21i}\varpi_i\end{aligned}\right\} \qquad (k = 2, 3, \ldots, \rho),$$

ou bien

$$\left.\begin{aligned}\sum_i A_{21i}\varpi_i &= l \sum_i A_{11i}\varpi_i\\ \sum_i A_{2ki}\varpi_i &= l \sum_i A_{1ki}\varpi_i\end{aligned}\right\} \qquad (k = 2, 3, \ldots, \rho),$$

$l_1, l_2, \ldots, l_\rho$ désignant des fonctions des x (indépendantes des ϖ). Mais la première hypothèse entraîne

$$A_{1k1} = 0,$$

ce qui est absurde, parce que $\sum A_{11i}\varpi_i$ serait identiquement nul. Il ne reste donc que la seconde hypothèse. Elle exprime tout simplement la congruence

$$\omega'_2 \equiv l\omega'_1 \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s).$$

Si donc on prend pour seconde équation du système

$$\bar{\omega}_2 = \omega_2 - l\omega_1 = 0,$$

on a

$$\bar{\omega}'_2 \equiv 0 \qquad (\text{mod } \omega_1, \ldots, \omega_s).$$

Il en est de même pour les $s-2$ autres, ce qui démontre le théorème.

Le système

$$\overline{\omega}_2 = \overline{\omega}_3 = \ldots = \overline{\omega}_s = 0$$

est dit le système *dérivé* [1] du système donné. Si

$$u_1\omega_1 + u_2\omega_2 + \ldots + u_s\omega_s = 0$$

est une équation du système dérivé, on doit avoir

$$u_1\omega'_1 + u_2\omega'_2 + \ldots + u_s\omega'_s \equiv 0 \qquad (\text{mod } \omega_1, \ldots, \omega_s),$$

ce qui revient à l'identité

$$(3) \qquad \omega_1\omega_2\ldots\omega_s(u_1\omega'_1 + \ldots + u_s\omega'_s) = 0.$$

Le développement de cette identité conduit à un certain nombre d'équations linéaires en $u_1, u_2, \ldots, u_s$, équations qui se réduisent à une seule, si le caractère du système est l'unité, et qui définissent le système dérivé.

IV.

LE COMPLEXE LINÉAIRE ATTACHÉ AU SYSTÈME DE PFAFF.

17. Le seul covariant ω'_1 qu'il y ait lieu de considérer définit alors un complexe linéaire que nous allons maintenant étudier.

Soit H_ρ ($\rho = r - s$) l'élément plan lieu des éléments linéaires intégraux. Supposons que σ désigne la dimension du plus grand élément caractéristique ε_σ, σ étant nul s'il n'y a pas d'élément caractéristique. Soit alors E_1 un élément linéaire intégral (situé dans H_ρ) et n'appartenant pas à ε_σ; le lieu des éléments intégraux en involution avec E_1 est un élément plan $H_{\rho-1}$ contenant naturellement ε_σ. Pour les éléments contenus dans $H_{\rho-1}$, il existe un élément caractéristique à $\sigma+1$ dimensions, à savoir le plus petit élément plan $\varepsilon_{\sigma+1}$ contenant à la fois ε_σ et E_1. *Je dis d'abord que* $H_{\rho-1}$ *n'admet pas d'élément caractéristique à plus de* $\sigma+1$ *dimensions*. Si, en effet, il en existait un à $\sigma+2$ dimensions, par exemple $\varepsilon_{\sigma+2}$, l'élément plan $H'_{\rho-1}$ lieu des éléments

[1] Cette dénomination est due à M. von Weber, *loc. cit.*

intégraux en involution avec un élément linéaire E'_1 *non situé dans* $H_{\rho-1}$ couperait $\varepsilon_{\sigma+2}$ suivant un élément à $\sigma+1$ dimensions *au moins,* soit $\varepsilon'_{\sigma+1}$; mais alors $\varepsilon'_{\sigma+1}$ serait caractéristique pour $H_{\rho-1}$ et pour E'_1 et par suite pour le plus petit élément contenant à la fois $H_{\rho-1}$ et E'_1, c'est-à-dire pour H_ρ, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc *le plus grand élément caractéristique pour* $H_{\rho-1}$ *est à* $\sigma+1$ *dimensions, et c'est* $(\varepsilon_\sigma, E_1)$ (¹).

Prenons alors dans $H_{\rho-1}$ un élément linéaire E'_1 non situé dans $\varepsilon_{\sigma+1}$; le lieu des éléments linéaires de $H_{\rho-1}$ en involution avec E'_1 est, d'après ce qui précède, un élément $H_{\rho-2}$ et le plus grand élément caractéristique pour $H_{\rho-2}$ est à $\sigma+2$ dimensions, à savoir $(\varepsilon_{\sigma+1}, E'_1)$ ou $(\varepsilon_\sigma, E_1, E'_1)$, que nous désignerons par $\varepsilon_{\sigma+2}$.

On peut continuer ainsi de proche en proche jusqu'à ce qu'on arrive à un élément $H_{\rho-h}$ pour lequel le plus grand élément caractéristique $\varepsilon_{\sigma+h}$ se confond avec $H_{\rho-h}$, ce qui arrivera nécessairement pour une valeur de h donnée par

$$\rho-\sigma = 2h. \tag{4}$$

L'élément $H_{\rho-h}$ est alors un des éléments intégraux au nombre maximum de dimensions et l'on a

$$\left\{\begin{array}{l} n = \rho - h = \sigma + h, \\ s_1 = s_2 = \ldots = s_h = 1, \qquad s_{h+1} = \ldots = s_n = 0 \qquad (\text{si } \sigma > 0). \end{array}\right. \tag{5}$$

18. Convenons d'appeler *élément polaire* d'un élément linéaire intégral donné E_1 le lieu $H_{\rho-1}$ des éléments intégraux en involution avec E_1; il résulte de ce qui précède que $H_{\rho-1}$ est élément polaire pour tous les éléments de $\varepsilon_{\sigma+1}$: $(\varepsilon_\sigma, E_1)$. Pour arriver à $H_{\rho-h}$ nous sommes partis, en somme, de h éléments $\varepsilon_{\sigma+1}$ en involution deux à deux et nous avons pris l'intersection de leurs h éléments polaires. Soient

$$\varpi_1 = 0, \qquad \varpi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varpi_h = 0 \tag{6}$$

les équations de ces h éléments. Si l'on tient compte de (6), le covariant ω'_1 doit s'annuler identiquement : on a donc une rela-

---

(¹) Je désignerai par la notation (E_μ, E_ν) le plus petit élément contenant à la fois E_μ et E_ν.

tion de la forme

$$(7)\quad \omega'_1 \equiv \varpi_1\varpi_{h+1} + \varpi_2\varpi_{h+2} + \ldots + \varpi_h\varpi_{2h} \qquad (\bmod\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s),$$

et les $2h$ expressions de Pfaff $\varpi_1, \ldots, \varpi_{2h}$ doivent être indépendantes (mod $\omega_1, \ldots, \omega_s$), sinon le plus grand élément caractéristique serait à plus de $\rho - 2h$, c'est-à-dire à plus de σ dimensions.

La forme réduite (7) *montre que tout élément* $H_{\rho-1}$ *contenant* ε_σ *est l'élément polaire d'un élément* $\varepsilon_{\sigma+1}$ *contenant* ε_σ. En effet, soient

$$(8)\qquad \frac{\varpi_1}{a_1} = \frac{\varpi_2}{a_2} = \ldots = \frac{\varpi_{2h}}{a_{2h}}$$

les équations de l'élément $\varepsilon_{\sigma+1}$, celles de l'élément ε_σ étant

$$\varpi_1 = \varpi_2 = \ldots = \varpi_{2h} = 0.$$

L'élément polaire de $\varepsilon_{\sigma+1}$ a alors pour équation

$$(9)\qquad a_1\varpi_{h+1} - a_{h+1}\varpi_1 + \ldots + a_h\varpi_{2h} - a_{2h}\varpi_h = 0,$$

et cette équation (9) est évidemment l'équation *générale* d'un élément $H_{\rho-1}$ passant par ε_σ.

Nous dirons que deux éléments $H_{\rho-1}$, $H'_{\rho-1}$ passant par ε_σ sont *conjugués* lorsque les deux éléments $\varepsilon_{\sigma+1}$, $\varepsilon'_{\sigma+1}$ dont ils sont les éléments polaires sont en involution; alors $H_{\rho-1}$ contient $\varepsilon'_{\sigma+1}$ et $H'_{\rho-1}$ contient $\varepsilon_{\sigma+1}$. *Pour obtenir un élément intégral à n dimensions, il suffit de prendre h éléments* $H_{\rho-1}$ *contenant* ε_σ *et conjugués deux à deux;* ces h éléments permettent de réduire ω'_1 à la forme (7).

19. Cherchons à exprimer analytiquement tous les résultats précédents. D'abord pour obtenir l'entier h, on peut chercher le plus grand élément caractéristique ε_σ, et alors

$$h = \frac{\rho - \sigma}{2};$$

ou bien encore on peut remarquer, d'après la formule (7), que h est le plus petit entier satisfaisant à la congruence

$$(10)\qquad \omega'^{\,h+1}_1 \equiv 0 \qquad (\bmod\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s),$$

ou encore à l'identité

$$(11)\qquad \omega_1\omega_2\ldots\omega_s\omega'^{\,h+1}_1 = 0.$$

On voit que l'entier h n'est autre chose que le *genre* du système (n° 15).

On exprimera que l'élément à $\rho - 1$ dimensions

$$\varpi = 0,$$

contient ε_σ, en écrivant que pour cet élément l'entier h est diminué d'une unité, c'est-à-dire que l'on a soit

$$\varpi \omega_1'^h \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s), \tag{12}$$

soit

$$\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_s \omega_1'^h \varpi = 0. \tag{13}$$

On exprimera que les deux éléments à $\rho - 1$ dimensions

$$\varpi = 0,$$
$$\varpi' = 0,$$

passant par ε_σ sont conjugués, en écrivant que $\varpi' = 0$ contient l'élément caractéristique relatif à l'élément $\varpi = 0$, c'est-à-dire d'après (12)

$$\omega_1'^{h-1} \varpi' \equiv 0 \quad (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s, \varpi),$$

ou, ce qui revient au même,

$$\omega_1 \omega_2 \ldots \omega_s \omega_1'^{h-1} \varpi\varpi' = 0. \tag{14}$$

V.

INTÉGRATION DES SYSTÈMES DE CARACTÈRE *un*.

20. Il se produit, au point de vue de l'intégration, un fait très remarquable, énoncé et démontré par M. von Weber ([1]), et qui sépare nettement le cas où le genre h est supérieur à 1 de celui où il est égal à 1.

Théorème. — *Si h est supérieur à l'unité, le système dérivé est complètement intégrable.*

Supposons que

$$\omega_2 = \omega_3 = \ldots = \omega_s = 0 \tag{15}$$

([1]) *Loc. cit.*

soit le système dérivé. On a alors, par définition,

$$\omega'_2 \equiv \omega'_3 \equiv \ldots \equiv \omega'_s \equiv 0 \qquad (\text{mod}\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s).$$

Il résulte de là que l'on peut écrire, par exemple,

$$(16) \qquad \omega'_2 \equiv \omega_1 \chi \qquad (\text{mod}\ \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_s),$$

χ étant une combinaison linéaire de $\omega_1, \varpi_1, \ldots, \varpi_{2h}$. Si nous prenons les dérivées des deux membres de la congruence (16) en remarquant que la dérivée du premier membre est identiquement nulle, nous obtenons

$$\omega'_1 \chi - \chi' \omega_1 \equiv 0 \qquad (\text{mod}\ \omega_2, \ldots, \omega_s;\ \omega'_2, \ldots, \omega'_s),$$

et, *a fortiori*,

$$(17) \qquad \omega'_1 \chi \equiv 0 \qquad (\text{mod}\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s).$$

Cela étant, si χ était indépendant de ω_1, la congruence (17) entraînerait (n° **14**)

$$\omega'^2_1 \equiv 0 \qquad (\text{mod}\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s),$$

et le genre h serait au plus égal à l'unité, ce qui est contraire à l'hypothèse. χ ne dépend donc que de ω_1 et, par suite, la congruence (16) se réduit à

$$\omega'_2 \equiv 0 \qquad (\text{mod}\ \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_s).$$

Le raisonnement fait pour ω_2 est valable pour $\omega_3, \ldots, \omega_s$ et l'on arrive finalement aux congruences

$$\omega'_2 \equiv \omega'_3 \equiv \ldots \equiv \omega'_s \equiv 0 \qquad (\text{mod}\ \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_s),$$

qui démontrent la proposition.

21. Cela étant, voici comment, dans le cas $h > 1$, on intégrera le système. On commencera par intégrer le système dérivé, ce qui donnera par exemple

$$(18) \qquad y_1 = a_1, \qquad y_2 = a_2, \qquad \ldots, \qquad y_{s-1} = a_{s-1},$$

les y désignant $s-1$ fonctions indépendantes des variables et les a désignant des constantes arbitraires. En tenant compte alors de (18), il reste à intégrer une seule équation de Pfaff

$$\omega_1 = 0$$

avec

$$\omega_1'^{h+1} \equiv 0 \qquad (\bmod\ \omega_1).$$

On appliquera la théorie bien connue du problème de Pfaff qui nous est d'ailleurs fournie par les considérations géométriques précédentes. Les équations de Pfaff qui définissent l'élément ε_σ sont complètement intégrables; on en cherchera une intégrale première

$$(19) \qquad z_1 = \text{const.}$$

au moyen de l'équation (18)

$$(20) \qquad \omega_1 \omega_1'^h \, dz_1 \equiv 0,$$

z_1 étant une fonction inconnue des variables. Cette intégrale étant trouvée, si l'on tient compte de (19), le genre de l'équation ω_1 est diminué d'une unité; on cherchera une intégrale première $z_2 =$ const. de l'équation

$$\omega_1 \omega_1'^{h-1} \, dz_1 \, dz_2 = 0,$$

et ainsi de suite. On aura de proche en proche h intégrales

$$(21) \qquad z_1 = b_1, \qquad z_2 = b_2, \qquad \ldots, \qquad z_h = b_h,$$

telles que les h éléments

$$dz_1 = 0, \qquad dz_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad dz_h = 0$$

contiennent ε_σ et soient conjugués deux à deux. En tenant compte de (21) on aura alors

$$\omega_1' \equiv 0 \qquad (\bmod\ \omega_1),$$

c'est-à-dire que l'équation $\omega_1 = 0$ deviendra complètement intégrable, c'est-à-dire réductible à la forme

$$dz_{h+1} = 0.$$

Autrement dit l'équation $\omega_1 = 0$ pourra s'écrire

$$dz_{h+1} - p_1 \, dz_1 - p_2 \, dz_2 - \ldots - p_h \, dz_h = 0,$$

où les $2h + 1$ quantités z_i, p_k sont indépendantes.

Finalement, *le système donné est réductible à la forme*

$$
(22) \qquad \begin{cases} dy_1 \quad = 0, \\ dy_2 \quad = 0, \\ \dots\dots\dots, \\ dy_{s-1} = 0, \\ dz_{h+1} - p_1\, dz_1 - \dots - p_h\, dz_h = 0, \end{cases}
$$

où $y_1, \dots, y_{s-1}, z_1, \dots, z_{h+1}, p_1, \dots, p_h$ *sont* $s + 2h$ *variables indépendantes.*

On déduit facilement de cette forme l'intégrale *générale* du système; s'il y a des caractéristiques, on les obtient en égalant à des constantes arbitraires les $s + 2h$ variables y, z, p.

La réduction du système à la forme canonique (22) exige $s + h$ opérations d'ordres

$$s - 1, \quad s - 2, \quad \dots, \quad 2, \quad 1; \quad 2h + 1, \quad 2h - 1, \quad \dots, \quad 3, \quad 1.$$

22. *Cas où* h *est égal à* 1. — Dans ce cas une réduction analogue est en général impossible. Si ρ est supérieur à 2, il y a des caractéristiques à $\rho - 2$ dimensions et n est égal à $\rho - 1$. *L'intégrale générale se ramène à des équations différentielles ordinaires.* Le moyen le plus simple de procéder est le suivant :

On cherchera une intégrale première des équations des caractéristiques (s'il n'y en a pas, on prendra une fonction quelconque); soit

$$(23) \qquad z = \text{const.},$$

elle est fournie par

$$\omega'_1\, dz \equiv 0 \qquad (\text{mod}\ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s)$$

ou encore par

$$(24) \qquad \omega_1 \omega_2 \dots \omega_s \omega'_1\, dz = 0.$$

En tenant compte alors de (23), le système devient complètement intégrable; il admet s intégrales premières indépendantes fournies par le système complet

$$\omega_1 \omega_2 \dots \omega_s\, df = 0.$$

Soient

$$z_1 = a_1, \qquad z_2 = a_2, \qquad \dots, \qquad z_s = a_s.$$

Alors cela signifie que le système donné est réductible à la forme

$$(25)\quad \begin{cases} dz_1 - u_1\,dz = 0, \\ dz_2 - u_2\,dz = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \\ dz_s - u_s\,dz = 0, \end{cases}$$

et il y a $2s+1-(s+2) = s-1$ relations entre $z, z_1, \dots, z_s, u_1, \dots, u_s$.

Finalement l'intégration du système revient à celle du système d'équations différentielles ordinaires

$$(26)\quad \begin{cases} F_1\left(z, z_1, \dots, z_s, \dfrac{dz_1}{dz}, \dots, \dfrac{dz_s}{dz}\right) = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ F_{s-1}\left(z, z_1, \dots, z_s, \dfrac{dz_1}{dz}, \dots, \dfrac{dz_s}{dz}\right) = 0. \end{cases}$$

On peut se donner arbitrairement une relation entre $z, z_1, \dots, z_s$.

Dans certains cas particuliers, le système est susceptible d'une forme canonique simple; mais, pour ne pas trop sortir de notre sujet, je renverrai sur ce point au Mémoire déjà cité de M. von Weber.

CHAPITRE III.

LES SYSTÈMES DE CARACTÈRE *deux*.

VI.

LE SYSTÈME DÉRIVÉ.

23. Soit

$$(1)\quad \omega_1 = \omega_2 = \dots = \omega_s = 0$$

un système de caractère *deux*. Le *système dérivé* est alors au plus formé de $s-2$ équations indépendantes. Cherchons d'abord dans quel cas il contiendrait *moins* de $s-2$ équations, autrement dit dans quel cas les s covariants $\omega'_1, \omega'_2, \dots, \omega'_s$ seraient liés par moins de $s-2$ relations linéaires (mod $\omega_1, \dots, \omega_s$).

Supposons, pour fixer les idées, que l'on n'ait aucune relation de la forme

$$(2) \qquad u_1\omega'_1 + u_2\omega'_2 + u_3\omega'_3 \equiv 0 \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s),$$

soit h le genre minimum de l'expression

$$u_1\omega'_1 + u_2\omega'_2 + u_3\omega'_3 \qquad (\text{mod } \omega_1, \ldots, \omega_s).$$

Nous pouvons alors supposer que l'on a

$$(3) \qquad \omega_1'^{h+1} = 0 \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s),$$

et pour aucun système de valeurs des u on n'a

$$(u_1\omega'_1 + u_2\omega'_2 + u_3\omega'_3)^h \equiv 0 \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s).$$

Cela étant, *supposons d'abord que h est égal à* 1; on peut alors mettre ω'_1 sous la forme

$$(4) \qquad \omega'_1 \equiv \varpi_1\varpi_2 \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s),$$

soit

$$(5) \qquad \left\{ \begin{aligned} \omega'_2 &\equiv \sum_{i,k}^{1,\ldots,\rho} a_{ik}\varpi_i\varpi_k \\ \omega'_3 &\equiv \sum_{i,k}^{1,\ldots,\rho} b_{ik}\varpi_i\varpi_k \end{aligned} \right. \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s).$$

D'après la définition du caractère, tous les déterminants du troisième degré de la matrice

$$(6) \qquad \left\| \begin{matrix} \varpi_2 & -\varpi_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \sum a_{1i}\varpi_i & \sum a_{2i}\varpi_i & \sum a_{3i}\varpi_i & \ldots & \sum a_{\rho i}\varpi_i \\ \sum b_{1i}\varpi_i & \sum b_{2i}\varpi_i & \sum b_{3i}\varpi_i & \ldots & \sum b_{\rho i}\varpi_i \end{matrix} \right\|$$

doivent être nuls, quels que soient $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_\rho$. Il résulte en particulier de là que tous les déterminants du second degré de la matrice

$$(7) \qquad \left\| \begin{matrix} \sum a_{3i}\varpi_i & \ldots & \sum a_{\rho i}\varpi_i \\ \sum b_{3i}\varpi_i & \ldots & \sum b_{\rho i}\varpi_i \end{matrix} \right\|$$

doivent être identiquement nuls. D'après un raisonnement fait pour les systèmes de caractère *un*, cela n'est possible que de deux manières.

Ou bien les éléments de la deuxième ligne de la matrice (7) sont proportionnels à ceux de la première ligne, ce qui entraîne des relations de la forme

$$b_{3i} - la_{3i} = b_{4i} - la_{4i} = \ldots = b_{\rho i} - la_{\rho i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho);$$

mais alors le covariant $\omega'_3 - l\omega'_2$ a tous ses coefficients nuls, sauf celui de $\varpi_1\varpi_2$, et l'on a, par suite, une congruence de la forme

$$\omega'_3 \equiv l\omega'_2 + m\omega'_1 \qquad (\bmod\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s),$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Ou bien, et c'est par conséquent la seule hypothèse possible, il existe des relations de la forme

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{ll} \sum a_{4i}\varpi_i = l_4 \sum a_{3i}\varpi_i, & \sum b_{4i}\varpi_i = l_4 \sum b_{3i}\varpi_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum a_{\rho i}\varpi_i = l_\rho \sum a_{3i}\varpi_i, & \sum b_{\rho i}\varpi_i = l_\rho \sum b_{3i}\varpi_i, \end{array}\right.$$

en supposant, par exemple, que tous les a_{3i} ne soient pas nuls. Mais ces formules montrent, en faisant dans les seconds membres $i = 3$ et cherchant dans les premiers membres les coefficients de ϖ_3, que l'on a

$$a_{43} = \ldots = a_{\rho 3} = 0, \qquad b_{43} = \ldots = b_{\rho 3} = 0;$$

par suite, dans les éléments de la matrice (7) il n'entre que ϖ_1 et ϖ_2; de plus, les équations des éléments caractéristiques

$$(9)\qquad \left\{\begin{array}{r} \varpi_1 = 0, \\ \varpi_2 = 0, \\ a_{12}\varpi_2 + a_{13}\varpi_3 + \ldots + a_{1\rho}\varpi_\rho = 0, \\ a_{21}\varpi_1 + a_{23}\varpi_3 + \ldots + a_{2\rho}\varpi_\rho = 0, \\ b_{12}\varpi_2 + b_{13}\varpi_3 + \ldots + b_{1\rho}\varpi_\rho = 0, \\ b_{21}\varpi_1 + b_{23}\varpi_3 + \ldots + b_{2\rho}\varpi_\rho = 0 \end{array}\right.$$

se réduisent à trois seulement, à savoir :

$$(10)\qquad \left\{\begin{array}{r} \varpi_1 = 0, \\ \varpi_2 = 0, \\ \varpi_3 + l_4\varpi_4 + \ldots + l_\rho\varpi_\rho = 0. \end{array}\right.$$

Dans ce cas, *si ρ est supérieur à 3, le système admet un élément caractéristique à $\rho - 3$ dimensions.*

La réciproque est d'ailleurs évidente, parce qu'alors on peut s'arranger pour avoir des congruences de la forme

$$
(11) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \omega'_1 \equiv \varpi_1 \varpi_2 \\ \omega'_2 \equiv \varpi_1 \varpi_3 \\ \omega'_3 \equiv \varpi_2 \varpi_3 \\ \omega'_4 \equiv 0 \\ \cdots\cdots\cdots \\ \omega'_s \equiv 0 \end{array} \right. \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s).
$$

et l'on a manifestement $s_1 = 2$.

24. Prenons maintenant le cas où h est supérieur à l'unité, et soit

$$
(12) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \omega'_1 \equiv \varpi_1 \varpi_2 + \ldots + \varpi_{2h-1} \varpi_{2h} \\ \omega'_2 \equiv \sum a_{ik} \varpi_i \varpi_k \\ \omega'_3 \equiv \sum b_{ik} \varpi_i \varpi_k \end{array} \right. \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s),
$$

on a alors forcément $\rho > 2h$, sinon l'équation

$$(\omega'_2 - \lambda \omega'_1)^h = 0,$$

équivalente à une équation de degré h en λ, admettrait au moins une racine, ce qui conduirait à une contradiction.

Cela étant, formons la matrice

$$
(13) \quad \left\| \begin{array}{cccccccc} \varpi_2 & -\varpi_1 & \ldots & \varpi_{2h} & -\varpi_{2h-1} & 0 & \ldots & 0 \\ \sum a_{1i} \varpi_i & \sum a_{2i} \varpi_i & \ldots & \sum a_{2h-1,i} \varpi_i & \sum a_{2h,i} \varpi_i & \sum a_{2h+1,i} \varpi_i & \ldots & \sum a_{\rho i} \varpi_i \\ \sum b_{1i} \varpi_i & \sum b_{2i} \varpi_i & \ldots & \sum b_{2h-1,i} \varpi_i & \sum b_{2h,i} \varpi_i & \sum b_{2h+1,i} \varpi_i & \ldots & \sum b_{\rho i} \varpi_i \end{array} \right\|.
$$

Tous les déterminants du troisième degré de cette matrice doivent être nuls et, par suite, tous les déterminants du second degré de la matrice

$$
(14) \qquad \left\| \begin{array}{ccc} \sum a_{2h+1,i} \varpi_i & \ldots & \sum a_{\rho i} \varpi_i \\ \sum b_{2h+1,i} \varpi_i & \ldots & \sum b_{\rho i} \varpi_i \end{array} \right\|
$$

En raisonnant comme tout à l'heure, on voit que les éléments de la deuxième ligne de cette matrice ne peuvent pas être proportionnels à ceux de la première, sinon il y aurait un covariant tel que $\omega'_3 - l\omega'_2$ ne dépendant que de $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{2h}$, et, par suite, il existerait un coefficient m tel que

$$(\omega'_3 - l\omega'_2 - m\omega'_1)^h \equiv 0 \qquad (\text{mod}\ \omega_1, \ldots, \omega_s),$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il faut donc, comme dans le cas de $h = 1$, que tous les coefficients

$$a_{2h+i,2h+j}, \quad b_{2h+i,2h+j}$$

soient nuls et, de plus, par une substitution linéaire convenable effectuée sur les ϖ, on peut faire en sorte qu'il n'y ait pas de termes en $\varpi_{2h+2}, \ldots, \varpi_\rho$.

Cela étant, les coefficients

$$b_{1,2h+1}, \quad b_{2,2h+1}, \quad \ldots, \quad b_{2h,2h+1}$$

ne sont pas proportionnels aux coefficients

$$a_{1,2h+1}, \quad a_{2,2h+1}, \quad \ldots, \quad a_{2h,2h+1},$$

sinon on retomberait sur la première hypothèse. Supposons, par exemple, que l'on ait

$$a_{1,2h+1}\, b_{2,2h+1} - a_{2,2h+1}\, b_{1,2h+1} \neq 0.$$

Prenons dans la matrice (13) le déterminant formé des trois premières colonnes; dans ce déterminant, le coefficient de $\varpi_1 \varpi_{2h+1}^2$ est précisément la quantité

$$a_{1,2h+1}\, b_{2,2h+1} - a_{2,2h+1}\, b_{1,2h+1};$$

il est donc impossible que ce déterminant soit nul.

Nous voyons donc que, dans le cas où h est supérieur à 1, trois quelconques des covariants $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_s$ sont liés par une relation linéaire, autrement dit que le système dérivé est formé de $s - 2$ équations.

Nous arrivons donc au théorème suivant :

THÉORÈME. — *Le système dérivé d'un système de Pfaff de s équations à variables et de caractère deux est formé de s — 2 équations. Il n'y a qu'une exception, lorsque le système admet* *un élément caractéristique à $r - s - 3$ dimensions; alors le système dérivé peut contenir $s - 3$ équations seulement.*

25. *Cas où le système dérivé est formé de $s - 3$ équations.* — On a dans ce cas les formules (11) déjà écrites

$$(11)\qquad \begin{cases} \omega'_1 \equiv \varpi_1 \varpi_2 \\ \omega'_2 \equiv \varpi_1 \varpi_3 \\ \omega'_3 \equiv \varpi_2 \varpi_3 \\ \omega'_4 \equiv 0 \\ \dots\dots \\ \omega'_s \equiv 0 \end{cases} \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s).$$

Si $\rho = r - s$ est égal à 3, il n'y a pas d'élément caractéristique et la formule

$$r = s + s_1 + \dots + s_n + n$$

montre que l'on a

$$n = 1, \qquad s_1 = 2.$$

L'intégrale générale est à une dimension et dépend de deux fonctions arbitraires d'un argument. On peut regarder le système (11) comme un système de s équations différentielles ordinaires à $s + 2$ fonctions inconnues, et l'on peut prendre arbitrairement deux de ces fonctions inconnues.

Si $\rho = r - s$ est supérieur à 3, il y a des caractéristiques à $\rho - 3$ dimensions et l'on a

$$n = \rho - 2, \qquad s_1 = 2, \qquad s_2 = \dots = s_n = 0.$$

Pour avoir les caractéristiques, on cherchera deux intégrales premières du système qui les détermine et alors, en égalant ces intégrales premières à des constantes arbitraires, le système donné deviendra complètement intégrable. Il suffira de l'intégrer pour avoir par différentiation la dernière intégrale du système des caractéristiques. Cette méthode exige $s + 2$ opérations d'ordre

$$s + 3, \quad s + 2; \quad s, \quad s - 1, \dots, 2, 1;$$

elle permet de mettre le système sous la forme

$$(15)\qquad \begin{cases} dz_1 - u_1\,dx - v_1\,dy = 0, \\ dz_2 - u_2\,dx - v_2\,dy = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ dz_s - u_s\,dx - v_s\,dy = 0. \end{cases}$$

et il existe $2s - 1$ relations entre $x, y, z_1, \ldots, z_s, u_1, \ldots, u_s, v_1, \ldots, v_s$. Les équations des caractéristiques s'obtiennent, par exemple, en égalant à des constantes $x, y, z_1, \ldots, z_s$ et u_1, si u_1 est indépendant des variables précédentes.

Une fois le système mis sous la forme (15), on est ramené au cas où ρ est égal à 3, c'est-à-dire à des équations différentielles ordinaires.

VII.

LES SYSTÈMES POUR LESQUELS n EST SUPÉRIEUR A $\frac{r-s}{2}$.

26. Nous pouvons maintenant nous borner à étudier le cas général où le système dérivé est formé de $s - 2$ équations, que nous supposerons être

$$\omega_3 = \omega_4 = \ldots = \omega_s = 0. \tag{16}$$

Nous allons d'abord démontrer un théorème très important, qui est d'ailleurs valable dans le cas particulier précédemment étudié.

Théorème. — *Si l'intégrale générale d'un système de Pfaff de caractère deux est à n dimensions et si la différence ρ du nombre r des variables et du nombre s des équations est inférieure à $2n$, le système admet des caractéristiques à $2n - \rho$ dimensions au moins.*

Soit, en effet, E_n un élément intégral *non singulier* à n dimensions; il n'est contenu dans aucun élément intégral à $n+1$ dimensions. Prenons un élément linéaire intégral E_1 non contenu dans E_n; le lieu des éléments intégraux en involution avec E_1 est un élément $H_{\rho-2}$ qui coupe E_n suivant un élément à $n - 2$ dimensions au moins; il ne contient d'ailleurs pas E_n tout entier, car l'élément (E_n, E_1) serait intégral, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Il n'y a donc que deux cas possibles; $H_{\rho-2}$ coupe E_n suivant un élément à $n - 1$ ou $n - 2$ dimensions.

Si $H_{\rho-2}$ coupe E_n suivant un élément ε_{n-1} à $n - 1$ dimensions, cet élément intégral ε_{n-1} est en involution avec tous les éléments linéaires contenus dans le plus petit élément E_{n+1} contenant à la fois E_n et E_1.

Si $H_{\rho-2}$ coupe E_n suivant un élément (intégral) ε_{n-2} à $n-2$ dimensions, par l'élément intégral (ε_{n-2}, E_1) il passe au moins un élément intégral à n dimensions E'_n; cet élément E'_n ne peut pas avoir avec E_n d'autre élément commun que ε_{n-2}, E'_n étant nécessairement contenu dans $H_{\rho-2}$; par suite, l'élément (E_n, E'_n) est à $n+n-(n-2)=n+2$ dimensions, soit E_{n+2}, et ε_{n-2} est en involution avec tous les éléments linéaires de E_n et de E'_n, c'est-à-dire de E_{n+2}.

Dans les deux cas on trouve donc un élément intégral ε_{n-i} situé dans E_n et un élément non intégral E_{n+i} contenant E_n, tels que ε_{n-i} soit en involution avec tous les éléments linéaires de E_{n+i}; i a l'une des valeurs 1 ou 2.

27. Supposons, d'une manière générale, que cette propriété ait lieu pour une certaine valeur de i; si $n+i$ est égal à ρ, $n-i$ est égal à $2n-\rho$ et le théorème est démontré. Si $n+i$ est inférieur à ρ, je dis que la propriété peut être étendue à une valeur de i supérieure.

Prenons, en effet, en dehors de E_{n+i} un élément linéaire intégral non singulier E'_1 et l'élément $H'_{\rho-2}$, lieu des éléments linéaires intégraux en involution avec E'_1. Si $H'_{\rho-2}$ a avec ε_{n-i} un élément commun à $n-i-1$ dimensions, ε_{n-i-1}, cet élément, contenu dans E_n, est en involution avec tous les éléments linéaires de E_{n+i} et avec E'_1 et, par suite, avec tous les éléments linéaires du plus petit élément E_{n+i+1} contenant à la fois E_{n+i} et E'_1. Supposons maintenant que $H'_{\rho-2}$ n'ait en commun avec ε_{n-i} qu'un élément ε_{n-i-2} à $n-i-2$ dimensions, alors $H'_{\rho-2}$ n'aura nécessairement en commun avec E_n qu'un élément H_{n-2} à $n-2$ dimensions; de plus, H_{n-2} n'a en commun avec ε_{n-i} que l'élément ε_{n-i-2}, de sorte que le plus petit élément contenant H_{n-2} et ε_{n-i} est à $(n-2)+(n-i)-(n-i-2)=n$ dimensions, c'est-à-dire est précisément E_n. Cela étant, par l'élément intégral (H_{n-2}, E'_1) il passe au moins un élément intégral à n dimensions E''_n, et E''_n n'a en commun avec E_n que H_{n-2}. Je dis que *l'élément* (E''_n, E_{n+i}) *est à* $n+i+2$ *dimensions*. Si, en effet, il n'était qu'à $n+i+1$ dimensions, E''_n aurait en commun avec E_{n+i} un élément à $n+(n+i)-(n+i+1)=n-1$ dimensions, formé par suite de H_{n-2} et d'un élément linéaire E''_1 situé dans E_{n+i}, mais non dans E_n. Mais alors E_1' serait en involution avec ε_{n+i} (comme situé dans E_{n+i}) et avec H_{n-2} (comme faisant partie avec H_{n-2} d'un même élément intégral E_n''); donc E_1' serait en involution avec l'élément (ε_{n+i}, H_{n-2}), c'est-à-dire avec E_n; autrement dit *l'élément* (E_n, E_1'') à $n+1$ *dimensions serait intégral,* ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur E_n.

Il résulte donc de ce qui précède que l'élément (E_n'', E_{n+i}) est à $n+i+2$ dimensions, soit E_{n+i+2}. De plus, ε_{n-i-2} est en involution avec tous les éléments linéaires de E_n'' (qui est un élément intégral contenant ε_{n-i-2}) et avec tous les éléments linéaires de E_{n+i} (puisque ε_{n-i-2} est contenu dans ε_{n-i}); donc ε_{n-i-2} est en involution avec tous les éléments linéaires de E_{n+i+2}.

La propriété supposée pour i est donc vraie, soit pour $i+1$, soit pour $i+2$.

Il résulte enfin de là que la propriété est vraie pour $i=\rho-n$, c'est-à-dire qu'*il existe au moins un élément intégral* $\varepsilon_{2n-\rho}$ *en involution avec tous les éléments linéaires intégraux et par suite caractéristique.*

28. On peut encore énoncer ce théorème sous la forme suivante :

Si un système de caractère deux *n'admet pas de multiplicités caractéristiques, l'excès* ρ *du nombre des variables sur le nombre des équations est au moins égal au double* $2n$ *de la dimension de l'intégrale générale.*

Nous supposerons dorénavant que les systèmes dont nous nous occupons n'ont pas d'élément caractéristique, et que l'on a par suite

$$\rho \geqq 2n.$$

VIII.

LES SYSTÈMES SYSTATIQUES.

29. Considérons, dans un système sans élément caractéristique, un élément linéaire intégral non singulier E_1 ; *si tous les éléments intégraux à n dimensions qui contiennent* E_1 *ont en commun un élément à deux ou plus de deux dimensions* (*contenant* E_1)

le système sera dit systatique. On voit quelle est la propriété correspondante des multiplicités intégrales M_n d'un système systatique.

Toutes les intégrales M_n *qui passent par un point non singulier, et ont en ce point une même tangente, ont également en commun, en ce point, une multiplicité plane tangente à deux dimensions au moins.*

L'hypothèse faite revient encore à la suivante. Dans l'élément plan $H_{\rho-2}$, lieu des éléments linéaires intégraux en involution avec E_1, il y a au moins un autre élément linéaire E'_1 en involution avec tous les éléments linéaires de $H_{\rho-2}$, c'est-à-dire qui soit *caractéristique* pour $H_{\rho-2}$.

L'élément ε *caractéristique de* $H_{\rho-2}$ *est au plus à deux dimensions;* car si c'était un élément ε_3 à trois dimensions, un raisonnement identique à celui fait tout à l'heure (n^{os} 26 et 27) prouverait l'existence d'un élément à trois, deux ou une dimension ε_1 en involution avec tous les éléments linéaires intégraux et par suite caractéristique, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc, pour un système systatique, tous les éléments linéaires intégraux en involution avec E_1 sont également en involution avec un élément E_2 contenant E_1, mais ne le sont avec aucun autre élément situé en dehors de E_2.

30. Désignons (dans l'élément H_ρ, lieu des éléments linéaires intégraux) par

$$\varpi_1 = \varpi_2 = 0, \tag{17}$$

les équations de $H_{\rho-2}$, et soient

$$\varpi_1 = \varpi_2 = \chi_1 = \ldots = \chi_{\rho-4} = 0, \tag{18}$$

les équations de l'élément E_2 caractéristique pour $H_{\rho-2}$.

Soient enfin θ_1 et θ_2 deux expressions de Pfaff formant avec ϖ_1, ϖ_2, χ_1, ..., $\chi_{\rho-4}$ un système de ρ expressions indépendantes entre elles et indépendantes de ω_1, ω_2, ..., ω_s.

Si dans ω'_1 et ω'_2 l'on introduit les équations (17), ω'_1 et ω'_2 doivent se réduire $(\bmod\, \omega_1, \ldots, \omega_s)$ à des formes du second dégré en $\chi_1, \ldots, \chi_{\rho-1}$, de sorte que l'on a

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} \omega'_1 &\equiv \alpha_{11}\varpi_1\theta_1 + \alpha_{12}\varpi_1\theta_2 + \alpha_{21}\varpi_2\theta_1 + \alpha_{22}\varpi_2\theta_2 + \alpha\varpi_1\varpi_2 \\ &\quad + \varpi_1\sum a_i\chi_i + \varpi_2\sum a'_i\chi_i + \sum a_{ik}\chi_i\chi_k, \\ \omega'_2 &\equiv \beta_{11}\varpi_1\theta_1 + \beta_{12}\varpi_1\theta_2 + \beta_{21}\varpi_2\theta_1 + \beta_{22}\varpi_2\theta_2 + \beta\varpi_1\varpi_2 \\ &\quad + \varpi_1\sum b_i\chi_i + \varpi_2\sum b'_i\chi_i + \sum b_{ik}\chi_i\chi_k. \end{aligned}\right.$$

Si, enfin, les équations de E_1 sont

$$\varpi_1 = \varpi_2 = \chi_1 = \ldots = \chi_{\rho-4} = \theta_2 = 0,$$

les deux expressions

$$\alpha_{11}\varpi_1 + \alpha_{21}\varpi_2, \quad \beta_{11}\varpi_1 + \beta_{21}\varpi_2$$

sont indépendantes, puisque, égalées à zéro, elles doivent donner $H_{\rho-2}$.

Cela étant, on peut d'abord simplifier les formules (19). Désignons par $\overline{\omega}'_1$ et $\overline{\omega}'_2$ ce que deviennent les seconds membres quand on y annule tous les χ; ce sont des expressions différentielles à quatre variables ϖ_1, ϖ_2, θ_1, θ_2 et elles ne se réduisent pas à trois, parce qu'alors le système admettrait un élément caractéristique à une dimension. Déterminons les coefficients u, v de manière que l'on ait

$$(20)\qquad (u\overline{\omega}'_1 + v\overline{\omega}'_2)^2 = 0,$$

ce qui donne en $\dfrac{v}{u}$ une équation du second degré admettant au moins une racine.

Si l'équation (20) admet deux racines inégales, on peut toujours, par une substitution linéaire sur ω_1 et ω_2, supposer

$$\overline{\omega}'^2_1 = \overline{\omega}'^2_2 = 0.$$

Alors $\overline{\omega}'_1$ est réductible à la forme $\Pi_1\Pi_2$, soit

$$\overline{\omega}'_1 = (\lambda_1\varpi_1 + \lambda_2\varpi_2 + \mu_1\theta_1 + \mu_2\theta_2)(\lambda'_1\varpi_1 + \lambda'_2\varpi_2 + \mu'_1\theta_1 + \mu'_2\theta_2);$$

mais les formules (19) montrent que $\mu_1\mu'_2 - \mu_2\mu'_1$ est nul, et l'on peut, par suite, suppose e

$$\mu_1 = \mu_2 = 0;$$

nous pouvons alors prendre $\lambda_1\varpi_1 + \lambda_2\varpi_2$ comme nouvelle expression ϖ_1 et $\lambda'_1\varpi_1 + \lambda'_2\varpi_2 + \mu'_1\theta_1 + \mu'_2\theta_2$ comme nouvelle expression θ_1 (car si μ'_1 et μ'_2 étaient nuls, il n'y aurait dans ω'_1 ni terme en θ_1 ni terme en θ_2 et α_{11} et α_{21} seraient nuls). Donc on peut supposer

$$\overline{\omega}'_1 = \varpi_1 \theta_1;$$

de même

$$\overline{\omega}'_2 = \varpi_2 \theta_2,$$

les quatre expressions ϖ_1, ϖ_2, θ_1, θ_2 étant nécessairement indépendantes.

Finalement, en prenant $\theta_1 + \sum a_i \chi_i$, $\theta_2 + \sum b'_i \chi_i$ comme nouvelles expressions θ_1 et θ_2, et changeant un peu les notations, il vient

$$(21) \quad \begin{cases} \omega'_1 \equiv \varpi_1 \theta_1 + \varpi_2 \sum a_i \chi_i + \sum a_{ik} \chi_i \chi_k \\ \omega'_2 \equiv \varpi_2 \theta_2 + \varpi_1 \sum b_i \chi_i + \sum b_{ik} \chi_i \chi_k \end{cases} \quad (\bmod\, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s).$$

Si maintenant l'équation (20) admet une racine double, on peut supposer que c'est $\rho = 0$; de sorte que l'on a

$$\overline{\omega}'^2_1 = \overline{\omega}'_1 \overline{\omega}'_2 = 0;$$

on peut alors, comme tout à l'heure, mettre $\overline{\omega}'_1$ sous la forme

$$\overline{\omega}'_1 = \varpi_1 \theta_1,$$

et, par suite, comme on a

$$\overline{\omega}'_1 \overline{\omega}'_2 = \beta_{22} \varpi_1 \theta_1 \varpi_2 \theta_2 = 0,$$

β_{22} est nul, et l'on a

$$\overline{\omega}'_2 = \varpi_1 (\beta_{11} \theta_1 + \beta_{12} \theta_2 + \beta \varpi_2) + \beta_{21} \varpi_2 \theta_1;$$

β_{21} n'est certainement pas nul, sinon $\overline{\omega}'_1$ et $\overline{\omega}'_2$ ne dépendraient que des trois expressions ϖ_1, θ_1, $\beta_{12}\theta_2 + \beta\varpi_2$. En prenant alors $\beta_{21}\varpi_2$ pour nouvelle expression ϖ_2 et $\beta_{11}\theta_1 + \beta_{12}\theta_2 + \beta\varpi_2$ pour nouvelle expression θ_2, on arrive à

$$\overline{\omega}'_1 = \varpi_1 \theta_1,$$
$$\overline{\omega}'_2 = \varpi_1 \theta_2 + \varpi_2 \theta_1$$

et, après des modifications évidentes, aux formules

$$(22)\quad \begin{cases} \varpi'_1 \equiv \varpi_1\theta_1 + \qquad\qquad \varpi_2 \sum a_i\chi_i + \sum a_{ik}\chi_i\chi_k \\ \omega'_2 \equiv \varpi_1\theta_2 + \varpi_2\theta_1 + \varpi_2 \sum b_i\chi_i + \sum b_{ik}\chi_i\chi_k \end{cases} \quad (\bmod\, \omega_1, \ldots\, \omega_s).$$

31. Dans les deux cas exprimés par les formules (21) et (22), les seconds membres où l'on fait $\varpi_1 = \varpi_2 = 0$ ne peuvent pas s'exprimer au moyen de moins de $\rho - 4$ variables; autrement dit, les équations

$$(23)\quad \begin{cases} \sum a_{1i}\chi_i = \sum a_{2i}\chi_i = \ldots = \sum a_{\rho-4,i}\chi_i = 0, \\ \sum b_{1i}\chi_i = \sum b_{2i}\chi_i = \ldots = \sum b_{\rho-4,i}\chi_i = 0, \end{cases}$$

entraînent

$$\chi_1 = \chi_2 = \ldots = \chi_{\rho-4} = 0;$$

autrement dit les $2(\rho - 4)$ premiers membres des équations (23) sont liés par $\rho - 4$ relations linéaires.

Cela étant, examinons d'abord le *premier cas* où l'on a les formules (21). Nous allons prendre un élément linéaire intégral arbitraire E_1

$$\frac{\varpi_1}{\varpi_1^0} = \frac{\varpi_2}{\varpi_2^0} = \ldots = \frac{\chi_{\rho-4}}{\chi_{\rho-4}^0} = \frac{\theta_1}{\theta_1^0} = \frac{\theta_2}{\theta_2^0},$$

et exprimer que pour l'élément $H_{\rho-2}$ correspondant il existe un élément caractéristique à deux dimensions.

Les équations de $H_{\rho-2}$ sont

$$(24)\quad \begin{cases} \varpi_1^0\theta_1 - \theta_1^0\varpi_1 - \sum a_i\chi_i^0\,\varpi_2 + \varpi_2^0 \sum a_i\chi_i - \sum a_{ik}\chi_i\chi_k^0 = 0, \\ \varpi_2^0\theta_2 - \theta_2^0\varpi_2 - \sum b_i\chi_i^0\,\varpi_1 + \varpi_1^0 \sum b_i\chi_i - \sum b_{ik}\chi_i\chi_k^0 = 0. \end{cases}$$

On peut tirer de ces équations θ_1 et θ_2 en fonction des ϖ et des χ, et en portant alors dans ω'_1 et ω'_2 il vient

$$(25)\quad \begin{cases} \varpi_1^0\omega'_1 \equiv \sum a_i\chi_i^0\,\varpi_1\varpi_2 + (\varpi_1^0\varpi_2 - \varpi_2^0\varpi_1)\sum a_i\chi_i + \varpi_1 \sum a_{ik}\chi_i\chi_k^0 + \varpi_1^0 \sum a_{ik}\chi_i\chi_k, \\ \varpi_2^0\omega'_2 \equiv \sum b_i\chi_i^0\,\varpi_1\varpi_2 - (\varpi_1^0\varpi_2 - \varpi_2^0\varpi_1)\sum b_i\chi_i + \varpi_2 \sum b_{ik}\chi_i\chi_k^0 + \varpi_2^0 \sum b_{ik}\chi_i\chi_k. \end{cases}$$

On aura les éléments caractéristiques pour $H_{\rho-2}$ en égalant à zéro les dérivées partielles des seconds membres des équations (25); de sorte que ces $2(\rho-2)$ dérivées partielles doivent se réduire à $\rho-4$. Or si nous prenons les dérivées par rapport aux χ, il vient les $2(\rho-4)$ équations suivantes :

$$(26)\quad \left\{\begin{array}{l}
\varpi_1^0 \sum a_{1i}\,\chi_i - \sum a_{1i}\,\chi_i^0\,\varpi_1 - a_1\,(\varpi_1^0\varpi_2 - \varpi_2^0\varpi_1) = 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
\varpi_1^0 \sum a_{\rho-4,i}\chi_i - \sum a_{\rho-4,i}\chi_i^0\,\varpi_1 - a_{\rho-4}(\varpi_1^0\varpi_2 - \varpi_2^0\varpi_1) = 0,\\
\varpi_2^0 \sum b_{1i}\,\chi_i - \sum b_{1i}\,\chi_i^0\,\varpi_2 + b_1\,(\varpi_1^0\varpi_2 - \varpi_2^0\varpi_1) = 0,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\
\varpi_2^0 \sum b_{\rho-4,i}\chi_i - \sum b_{\rho-4,i}\chi_i^0\,\varpi_2 + b_{\rho-4}(\varpi_1^0\varpi_2 - \varpi_2^0\varpi_1) = 0.
\end{array}\right.$$

D'après l'hypothèse faite sur le système (23), ces équations sont au nombre de $\rho-4$ indépendantes *au moins,* puisque, si l'on y fait $\varpi_1 = \varpi_2 = 0$, elles se réduisent à

$$\chi_1 = \chi_2 = \ldots = \chi_{\rho-4} = 0;$$

donc *toute relation linéaire entre les premiers membres des équations* (23) *doit avoir lieu entre les premiers membres des équations correspondantes* (26) (divisés par ϖ_1^0 ou ϖ_2^0).

Soit, en particulier,

$$(27)\quad \left\{\begin{array}{l}
\lambda_1 \sum a_{1i}\chi_i + \ldots + \lambda_{\rho-4} \sum a_{\rho-4,i}\chi_i\\
+ \mu_1 \sum b_{1i}\chi_i + \ldots + \mu_{\rho-4} \sum b_{\rho-4,i}\chi_i = 0
\end{array}\right.$$

une telle relation; on en déduira, pour les équations (26), deux relations correspondant aux coefficients de ϖ_1 et de ϖ_2, à savoir :

$$(28)\quad \left\{\begin{array}{l}
-\left(\lambda_1 \sum a_{1i}\chi_i^0 + \ldots + \lambda_{\rho-4} \sum a_{\rho-4,i}\chi_i^0\right) + \varpi_2^0(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{\rho-4} a_{\rho-4})\\
\qquad\qquad - \varpi_1^0(\mu_1 b_1 + \ldots + \mu_{\rho-4} b_{\rho-4}) = 0,\\
-\left(\mu_1 \sum b_{1i}\chi_i^0 + \ldots + \mu_{\rho-4} \sum b_{\rho-4,i}\chi_i^0\right) - \varpi_2^0(\lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{\rho-4} a_{\rho-4})\\
\qquad\qquad + \varpi_1^0(\mu_1 b_1 + \ldots + \mu_{\rho-4} b_{\rho-4}) = 0,
\end{array}\right.$$

et ces relations ont lieu quels que soient ϖ_1^0, ϖ_2^0, χ_1^0, ..., $\chi_{\rho-4}^0$.

On déduit de là les identités

$$(29)\quad \begin{cases} \lambda_1 \sum a_{1i}\chi_i + \ldots + \lambda_{\rho-4} \sum a_{\rho-4,i}\chi_i = 0, \\ \mu_1 \sum b_{1i}\chi_i + \ldots + \mu_{\rho-4} \sum b_{\rho-4,i}\chi_i = 0, \\ \qquad \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{\rho-4} a_{\rho-4} \qquad\quad = 0, \\ \qquad \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_{\rho-4} b_{\rho-4} \qquad\quad = 0. \end{cases}$$

Ainsi chaque relation de la forme (27) *entraîne les relations* (29).

Il résulte de là que les $\rho - 4$ relations telles que (27) peuvent être partagées en deux groupes; pour celles du premier groupe, tous les μ sont nuls, et pour celles du second groupe, tous les λ sont nuls. On peut toujours, comme nous l'avons vu dans le Chapitre II, mettre l'expression $\sum a_{ik}\chi_i\chi_k$ sous la forme

$$\sum a_{ik}\chi_i\chi_k \equiv \chi_1\chi_2 + \chi_3\chi_4 + \ldots + \chi_{2\alpha-1}\chi_{2\alpha},$$

α pouvant d'ailleurs être nul, et de même

$$\sum b_{ik}\chi_i\chi_k = \chi'_1\chi'_2 + \ldots + \chi'_{2\beta-1}\chi'_{2\beta};$$

alors les relations du premier groupe sont au nombre de $\rho - 4 - 2\alpha$, celles du second groupe au nombre de $\rho - 4 - 2\beta$ et, par suite,

$$\rho - 4 = (\rho - 4 - 2\alpha) + (\rho - 4 - 2\beta)$$

ou

$$2\alpha + 2\beta = \rho - 4;$$

il résulte de là que *les* $2\alpha + 2\beta$ *expressions* χ, χ' *sont indépendantes* et, en tenant compte de (29), on a

$$\omega'_1 \equiv \varpi_1\theta_1 + \varpi_2 \sum a_i\chi_i + \chi_1\chi_2 + \ldots + \chi_{2\alpha-1}\chi_{2\alpha},$$

$$\omega'_2 \equiv \varpi_2\theta_2 + \varpi_1 \sum b_i\chi'_i + \chi'_1\chi'_2 + \ldots + \chi'_{2\beta-1}\chi'_{2\beta};$$

enfin, en prenant pour nouvelles expressions $\chi_1, \chi_2, \ldots$, les expressions

$$\chi_1 + a_2\varpi_2, \quad \chi_2 + a_1\varpi_2, \quad \ldots, \quad \chi_{2\alpha} - a_{2\alpha-1}\varpi_2$$

et de même pour les χ', et enfin en changeant les notations, il vient les formules définitives

$$(30)\quad \begin{cases} \omega'_1 \equiv \varpi_1\varpi_2 + \varpi_3\varpi_4 + \ldots + \varpi_{2h-1}\varpi_{2h} \\ \omega'_2 \equiv \chi_1\chi_2 + \chi_3\chi_4 + \ldots + \chi_{2k-1}\chi_{2k} \end{cases} \quad (\operatorname{mod} \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s),$$

où les ϖ et les χ sont $\rho = 2h + 2k$ expressions indépendantes. De plus, on peut toujours s'arranger pour que les équations

$$\varpi_1 = \chi_1 = 0$$

soient les équations d'un élément $H_{\rho-2}$ arbitraire.

32. Examinons maintenant le *second cas* où l'on a les formules (22). En raisonnant comme dans le premier cas, on arrive à la conclusion suivante : *Toute relation de la forme* (27)

$$(27)\quad \begin{cases} \lambda_1 \sum a_{1i}\chi_i + \ldots + \lambda_{\rho-4} \sum a_{\rho-4,i}\chi_i \\ \qquad + \mu_1 \sum b_{1i}\chi_i + \ldots + \mu_{\rho-4} \sum b_{\rho-4,i}\chi_i = 0 \end{cases}$$

entraîne les relations

$$(31)\quad \begin{cases} \mu_1 \sum a_{1i}\chi_i + \ldots + \mu_{\rho-4} \sum a_{\rho-4,i}\chi_i = 0, \\ \mu_1 a_1 + \ldots + \mu_{\rho-4} a_{\rho-4} = 0, \\ \lambda_1 a_1 + \ldots + \lambda_{\rho-4} a_{\rho-4} + \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_{\rho-4} b_{\rho-4} = 0. \end{cases}$$

Cela étant, supposons que l'on ait

$$\sum a_{ik}\chi_i\chi_k = \chi_1\chi_2 + \ldots + \chi_{2\alpha-1}\chi_{2\alpha};$$

alors la première des équations (31) montre que l'on a

$$\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{2\alpha} = 0,$$

de sorte que, si l'on considère ces premières équations (31) elles sont au nombre de $\rho - 4 - 2\alpha$ indépendantes *au plus;* elles sont aussi au nombre de 2α indépendantes *au moins;* car sinon, parmi les équations (27) il y en aurait *plus de* $\rho - 4 - 2\alpha$ pour lesquelles tous les μ seraient nuls, ce qui est impossible, car pour ces équations on a nécessairement

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_{2\alpha} = 0.$$

On voit donc déjà que

$$\rho - 4 - 2\alpha \geqq 2\alpha, \qquad \rho - 4 \geqq 4\alpha.$$

Il y a plus. Les expressions $\chi_{2\alpha+1}, \ldots, \chi_{\rho-4}$ ne pouvant figurer que dans

$$\sum b_{1i}\chi_i, \quad \sum b_{2i}\chi_i, \quad \ldots, \quad \sum b_{\rho-4,i}\chi_i,$$

ces $\rho - 4$ expressions, lorsqu'on y fait

$$\chi_1 = \chi_2 = \ldots = \chi_{2\alpha} = 0,$$

sont au nombre de $\rho - 4 - 2\alpha$ indépendantes; par suite, si l'on ne considère que les $\rho - 4 - 2\alpha$ dernières, elles sont au nombre de $\rho - 4 - 4\alpha$ indépendantes *au moins;* par suite, dans les équations (27) il y en a *au plus*

$$\rho - 4 - 2\alpha - (\rho - 4 - 4\alpha) = 2\alpha$$

indépendantes par rapport aux μ, et comme nous avons vu tout à l'heure qu'il y en avait 2α indépendantes *au moins,* il en résulte que ***parmi les premières équations*** (31) ***il y en a exactement*** 2α ***indépendantes.***

Les 2α équations (27) d'où elles résultent peuvent alors être supposées de la forme

$$\begin{gathered}
\sum b_{2\alpha+1,i}\chi_i = \chi_1, \\
\sum b_{2\alpha+2,i}\chi_i = \chi_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\sum b_{4\alpha,i}\;\chi_i = \chi_{2\alpha}.
\end{gathered}$$

Si l'on forme alors

$$\chi_1\chi_{2\alpha+1} + \ldots + \chi_{2\alpha}\chi_{4\alpha},$$

et qu'on retranche cette expression de ω'_2, on obtient une expression ne dépendant plus que de $\chi_1, \chi_{2\alpha}; \chi_{4\alpha+1}, \ldots, \chi_{\rho-4}$, et, en changeant au besoin $\chi_{2\alpha+1}, \ldots, \chi_{4\alpha}$, on peut faire en sorte que l'on ait

$$\left\{\begin{aligned}
\omega'_1 &\equiv \varpi_1\theta_1 \qquad\qquad + \varpi_2\sum a_i\chi_i + \chi_1\chi_2 \quad + \ldots + \chi_{2\alpha-1}\chi_{2\alpha}, \\
\omega'_2 &\equiv \varpi_1\theta_2 + \varpi_2\theta_1 + \varpi_2\sum b_i\chi_i + \chi_1\chi_{2\alpha+1} + \ldots + \chi_{2\alpha}\;\chi_{4\alpha} \\
&\qquad\qquad + \chi_{4\alpha+1}\chi_{4\alpha+2} + \ldots + \chi_{\rho-5}\chi_{\rho-4}.
\end{aligned}\right.$$

De plus, les relations (31) montrent que l'on a

$$a_{2\alpha+1} = a_{2\alpha+2} = \ldots = a_{4\alpha} = a_{4\alpha+1} = \ldots = a_{\rho-4} = 0,$$
$$a_2 + b_{2\alpha+1} = a_1 + b_{2\alpha+2} = \ldots = a_{2\alpha} + b_{4\alpha-1} = - a_{2\alpha-1} + b_{4\alpha} = 0;$$

mais en changeant convenablement $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{2\alpha}$ on peut faire en sorte que

$$b_{2\alpha+1} = \ldots = b_{4\alpha} = 0$$

(il suffit de prendre $\chi_1 + b_{2\alpha+1}\varpi_2, \ldots, \chi_{2\alpha} + b_{4\alpha}\varpi_2$ pour nouvelles expressions χ); alors on voit que tous les a deviennent nuls; en changeant ensuite $\chi_{2\alpha+1}, \ldots, \chi_{\rho-4}$, on peut annuler tous les b, de sorte que, finalement et en changeant les notations, on arrive aux formules réduites suivantes :

$$(32)\quad \left\{\begin{array}{l} \omega'_1 \equiv \varpi_1\varpi_2 + \ldots + \varpi_{2h-1}\varpi_{2h}, \\ \omega'_2 \equiv \varpi_1\chi_1 + \varpi_2\chi_2 + \ldots + \varpi_{2h}\chi_{2h} + \theta_1\theta_2 + \ldots + \theta_{2k-1}\theta_{2k} \\ \qquad\qquad\qquad (\text{mod } \omega_1, \ldots, \omega_s), \end{array}\right.$$

et l'on voit que l'on peut toujours supposer que les équations

$$\varpi_1 = \chi_2 = 0$$

représentent l'élément $H_{\rho-2}$.

33. En résumé, *si le système donné de caractère deux, sans élément caractéristique, est systatique, on se trouve dans l'un des deux cas suivants : ou bien on a*

$$(30)\quad \left\{\begin{array}{l} \omega'_1 \equiv \varpi_1\varpi_2 + \ldots + \varpi_{2h-1}\varpi_{2h} \\ \omega'_2 \equiv \chi_1\chi_2 + \ldots + \chi_{2k-1}\chi_{2k} \end{array}\right. \quad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s),$$

ou bien on a

$$(32)\quad \left\{\begin{array}{l} \omega'_1 \equiv \varpi_1\varpi_2 + \ldots + \varpi_{2h-1}\varpi_{2h}, \\ \omega'_2 \equiv \varpi_1\chi_1 + \ldots + \varpi_{2h}\chi_{2h} + \theta_1\theta_2 + \ldots + \theta_{2k-1}\theta_{2k} \\ \qquad\qquad\qquad (\text{mod } \omega_1, \ldots, \omega_s). \end{array}\right.$$

La réciproque est vraie et je ne m'arrête pas à la démontrer.

34. Voyons maintenant quelles sont, dans chacun de ces deux cas, les valeurs des entiers $n, s_1, s_2, \ldots, s_n$.

Prenons d'abord le premier cas (form. 30). Nous pouvons toujours supposer

$$h \leqq k.$$

Alors, étant donné un élément linéaire intégral E_1, le lieu des éléments intégraux en involution avec E_1 est un élément $H_{\rho-2}$, dont les équations peuvent être supposées

$$\varpi_1 = \chi_1 = 0.$$

Les conditions pour que deux éléments de $H_{\rho-2}$ soient en involution sont alors fournies par les deux covariants

$$\overline{\omega}'_1 \equiv \varpi_3\varpi_4 + \ldots + \varpi_{2h-1}\varpi_{2h},$$
$$\overline{\omega}'_2 \equiv \chi_3\chi_4 + \ldots + \chi_{2k-1}\chi_{2k}.$$

Si h est égal à 1, le lieu des éléments de $H_{\rho-2}$ en involution avec un élément linéaire arbitraire de $H_{\rho-2}$ est un élément à $\rho - 3$ dimensions, et l'on a, par suite,

$$s_2 = 1;$$

si, au contraire, h est supérieur à 1, ce lieu est à $\rho - 4$ dimensions $H_{\rho-4}$, ce qui donne

$$s_2 = 2;$$

en continuant de proche en proche, on voit qu'on a

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_h = 2; \qquad s_{h+1} = \ldots = s_k = 1 \qquad (\text{si } k > h),$$

et la formule

$$\rho = s_1 + s_2 + \ldots + s_n + n$$

nous donne ici

$$2h + 2k = h + k + n,$$

c'est-à-dire

$$(33) \qquad n = h + k, \qquad \rho = 2n.$$

Donc on se trouve dans le cas où le nombre ρ *est égal à* $2n$, *les* h *premiers caractères sont égaux à* 2, *les suivants jusqu'au* $k^{\text{ième}}$ *sont égaux à l'unité*

$$n = h + k, \quad s_1 = \ldots = s_h = 2, \quad s_{h+1} = \ldots = s_k = 1, \quad s_{k+1} = \ldots = s_n = 0.$$

Prenons maintenant le second cas, caractérisé par les formules (32); k étant un entier positif ou nul. On peut supposer que les équations de $H_{\rho-2}$ sont

$$\varpi_1 = \chi_2 = 0,$$

de sorte que, pour les éléments situés dans $H_{\rho-2}$, on a

$$\omega'_1 = \varpi_3\varpi_4 + \ldots + \varpi_{2h-1}\varpi_{2h},$$
$$\omega'_2 = \varpi_3\chi_3 + \ldots + \varpi_{2h}\chi_{2h} + \theta_1\theta_2 + \ldots + \theta_{2k-1}\theta_{2k};$$

on est ramené à des formules analogues, mais où h est diminué d'une unité. Si h est égal à 1, on a

$$s_1 = 2, \qquad s_2 = \ldots = s_{k+1} = 1;$$

si, au contraire, h est supérieur à 2, s_2 est égal à 2. D'une manière générale, on voit que l'on a

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_h = 2, \qquad s_{h+1} = \ldots = s_{h+k} = 1, \qquad s_{h+k+1} = \ldots = s_n = 0,$$

et la formule

$$\rho = s_1 + \ldots + s_n + n$$

donne ici

$$4h + 2k = 2h + k + n$$

ou

$$(34) \qquad n = 2h + k, \qquad \rho = 2n.$$

On arrive donc au résultat suivant :

Théorème. — *Si un système de Pfaff de caractère deux, n'admettant aucun élément caractéristique, est systatique, l'excès* ρ *du nombre des variables sur le nombre des équations du système est égal au double* $2n$ *de la dimension de l'intégrale générale.*

La réciproque est d'ailleurs vraie, car, si ρ est égal à $2n$, l'élément $H_{\rho-2}$ admet un élément, caractéristique pour $H_{\rho-2}$, à

$$2n - (\rho - 2) = 2$$

dimensions au moins, et le système est systatique.

IX.

LES SYSTÈMES SINGULIERS DE CARACTÈRE *deux*.

35. En général, si les coefficients des équations d'un système de caractère *deux* ne sont pas particuliers, on a

$$s_1 = s_2 = \ldots = s_{n-1} = 2;$$

quant à s_n, il est égal à *zéro, un* ou *deux*, suivant le reste de la division de ρ par 3

$$\begin{aligned} s_n &= 0 \quad \text{si} \quad \rho = 3n - 2, \\ s_n &= 1 \quad \text{si} \quad \rho = 3n - 1, \\ s_n &= 2 \quad \text{si} \quad \rho = 3n; \end{aligned}$$

n se trouve être ainsi le quotient à une unité près par excès de la division de ρ par 3.

Nous dirons qu'un système de caractère deux est singulier si l'avant-dernier caractère est plus petit que deux. D'une manière générale, *si nous désignons par h le nombre des caractères égaux à deux, ce nombre h est au plus égal à* $n - 2$, *si le système est singulier.*

Nous ne nous occuperons plus maintenant que des systèmes singuliers sans caractéristiques.

Remarquons que, pour tout système singulier de caractère *deux* sans caractéristique, n est au moins égal à 3 et, par suite, ρ est au moins égal à 6.

Recherchons d'abord quels sont les systèmes systatiques singuliers. Si un système systatique n'est pas singulier, on a l'une des trois hypothèses

$$\rho = 3n - 2, \qquad 3n - 1 \quad \text{ou} \quad 3n.$$

Comme d'autre part ρ est égal à $2n$, cela n'est possible que si n est égal à 2, et dans ce cas d'ailleurs le système n'est certainement pas singulier.

Donc *tous les systèmes systatiques sont singuliers pour n au moins égal à* 3.

En nous reportant aux formules (30) et (32), on voit que *l'un des covariants* $u\omega'_1 + v\omega'_2$ *est de genre h* (ω'_1 avec les notations adoptées). On peut remarquer de plus que *l'un des covariants* $u\omega'_1 + v\omega'_2$ *est de genre au moins égal à* $h + 2$; il suffit de considérer $\omega'_1 + \omega'_2$ dans la formule (30), ω'_2 dans la formule (32) : dans les deux cas le genre est n.

Ce sont ces propriétés que nous allons étendre aux systèmes singuliers non systatiques.

36. Faisons d'abord une remarque générale. Considérons un système non systatique, sans élément caractéristique, et prenons l'élément $H_{\rho-2}$ lieu des éléments intégraux en involution avec un élément linéaire intégral arbitraire E_1. Soient

$$\varpi_1 = \varpi_2 = 0$$

les équations de $H_{\rho-2}$ et soient

$$\varpi_1 = \varpi_2 = \chi_1 = \ldots = \chi_{\rho-3} = 0$$

celles de E_1; soit enfin θ une expression de Pfaff indépendante de ϖ_1, ϖ_2, χ_1, ..., $\chi_{\rho-3}$ (et de ω_1, ..., ω_s). On verra facilement par un raisonnement déjà fait que l'on peut écrire

$$(35)\quad \begin{cases} \omega'_1 \equiv \varpi_1\theta + \varpi_1 \sum a_i\chi_i + \varpi_2 \sum a'_i\chi_i + \sum a_{ik}\chi_i\chi_k \\ \omega'_2 \equiv \varpi_2\theta + \varpi_1 \sum b_i\chi_i + \varpi_2 \sum b'_i\chi_i + \sum b_{ik}\chi_i\chi_k \\ \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1, \ldots, \omega_s). \end{cases}$$

Nous désignerons par $\overline{\omega}'_1$, $\overline{\omega}'_2$ les seconds membres de ces congruences où l'on a fait $\varpi_1 = \varpi_2 = 0$. Les équations

$$\overline{\omega}'_1 = \overline{\omega}'_2 = 0$$

déterminent les éléments intégraux situés dans $H_{\rho-2}$; par hypothèse, ces deux covariants $\overline{\omega}'_1$, $\overline{\omega}'_2$ ne peuvent pas s'exprimer au moyen de $\rho - 4$ seulement des expressions χ. On peut encore les regarder comme définissant un système d'éléments intégraux dans un élément plan à $\rho - 3$ dimensions, avec

$$h' = h - 1, \qquad n' = n - 1;$$

c'est donc encore un système *singulier* d'éléments intégraux.

37. Cela étant, considérons d'abord le cas où le seul caractère s_1 est égal à 2, ρ étant au moins égal à 6. Alors en appliquant les formules (35), les covariants $\overline{\omega}'_1$, $\overline{\omega}'_2$ définissent un système pour lequel h est nul; *donc* $\overline{\omega}'_1$, *par exemple, est identiquement nul.* De plus, le genre de $\overline{\omega}'_2$ est au moins égal à 2 (sans quoi $\rho - 3$ serait au plus égal à 2); par suite, *le genre de* ω'_2 *est au moins égal à* 3.

Si maintenant le genre de ω'_1 n'était pas égal à 1, il serait manifestement égal à 2, et tout covariant $u\omega'_1 + v\omega'_2$ voisin de ω'_1 serait de genre au moins égal à 3. Par suite, tout élément $H'_{\rho-2}$ voisin de $H_{\rho-2}$ ne pouvant diminuer que de deux unités au plus le genre d'un quelconque des covariants $u\omega'_1 + v\omega'_2$, diminuerait nécessairement de deux unités le genre de ω'_1. Mais si alors, ce qu'on peut toujours supposer, on a

$$\omega'_1 \equiv \varpi_1\theta + \varpi_2\chi_1 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1, \ldots, \omega_s)$$

les deux équations de $H'_{\rho-2}$ ne devraient dépendre que de ϖ_1, ϖ_2,

θ, χ_1 (mod $\omega_1, \ldots, \omega_s$); par suite, ω'_2 *ne pourrait contenir que* $\varpi_1, \varpi_2, \theta, \chi_1$ (¹) et l'on aurait $\rho = 4$, contrairement à l'hypothèse.

Il résulte donc de là que le covariant ω'_1 est de genre 1, le covariant ω'_2 étant de genre au moins égal à 3.

38. Nous allons maintenant démontrer le théorème général suivant :

Théorème. — *Si un système singulier de caractère* deux, *sans élément caractéristique, possède* h *caractères et* h *seulement égaux* à 2 ($h \leqq n-2$), *l'un des covariants* $u\omega'_1 + v\omega'_2$, *soit* ω'_1, *est de genre* h, *tandis que pour des valeurs arbitraires de* u *et de* v *ce genre est au moins égal à* $h+2$.

Ce théorème est vrai pour les systèmes systatiques, d'après une remarque faite plus haut. Il est vrai aussi pour les systèmes non systatiques, lorsque h est égal à 1. Supposons-le vrai pour une certaine valeur de h et démontrons-le pour la valeur suivante $h+1$.

Conservons aux formules (35) leur signification de tout à l'heure; nous supposons, par hypothèse, que $\overline{\omega}'_1$ est de genre h et que $\overline{\omega}'_2$, par exemple, est de genre au moins égal à $h+2$. Il résulte déjà de là que ω'_2 est de genre au moins égal à $h+3$, ce qui démontre la dernière partie du théorème.

D'autre part, ω'_1 est de genre au moins égal à $h+1$. Si ω'_1 était de genre $h+2$, $\omega'_1 + v\omega'_2$ étant au moins de genre $h+3$ pour des valeurs suffisamment petites de v et tout élément $H'_{\rho-2}$ suffisamment voisin de $H_{\rho-2}$ devant réduire à h le genre de l'un des covariants $\omega'_1 + v\omega'_2$, il en résulte que, pour un élément $H'_{\rho-2}$ arbitraire, c'est le genre de ω'_1 qui doit être réduit à h. Mais, d'après un raisonnement déjà fait pour $h=1$, il en résulterait que ρ serait égal à $2h+4$, ce qui est incompatible avec l'hypothèse faite sur le genre de ω'_2.

Le théorème est donc démontré dans toute sa généralité.

On peut ajouter qu'*il n'y a pas de covariant* $u\omega'_1 + v\omega'_2$ *dont le genre* k *soit inférieur à* h, parce qu'alors, pour l'élément $H_{\rho-2}$

(¹) Au covariant ω'_2 correspond une des équations de $H_{\rho-2}$ et cette équation, si $H_{\rho-2}$ est arbitraire, contient nécessairement *toutes* les variables dont dépend ω'_2.

lieu des éléments intégraux en involution avec un élément linéaire intégral arbitraire E_1, le genre du covariant serait au plus $k-1$; pour le lieu des éléments en involution avec un élément intégral arbitraire E_2, il serait au plus égal à $k-2$ et ainsi de suite, de sorte qu'au bout de k opérations il serait nul et l'on aurait

$$s_{k+1}=2,$$

ce qui est impossible.

Cette remarque est d'ailleurs valable, que le système soit singulier ou non.

X.

DÉTERMINATION DES CARACTÈRES D'UN SYSTÈME SINGULIER.

39. Voici d'abord comment on peut procéder pour reconnaître si un système donné, n'admettant pas d'élément caractéristique, est singulier ou non.

On déterminera le genre minimum k du covariant $u\omega'_1+v\omega'_2$, en recherchant successivement si l'un de ces covariants est de genre 1, 2, ... Pour exprimer que $u\omega'_1+v\omega'_2$ est de genre 1,

$$(u\omega'_1+v\omega'_2)^2=0 \qquad (\operatorname{mod} \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s),$$

il y a, par exemple, à écrire que les coefficients de tous les termes

$$\varpi_1\varpi_2\varpi_i\varpi_j \qquad (i, j=3, \ldots, \rho)$$

sont nuls (en supposant que le terme en $\varpi_1\varpi_2$ de $u\omega'_1+v\omega'_2$ ne soit pas nul), ce qui fait $\frac{(\rho-2)(\rho-3)}{2}$ équations du second degré en $\frac{v}{u}$; ces équations devront avoir une racine commune si k est égal à 1; ce qui donne

$$\frac{(\rho-2)(\rho-3)}{2}-1=\frac{(\rho-1)(\rho-4)}{2}$$

équation de condition entre les coefficients de ω'_1 et ω'_2. De même pour exprimer que k est égal à 2, il y a

$$\frac{(\rho-3)(\rho-6)}{2}$$

équation de condition, et ainsi de suite.

Une fois l'entier k trouvé, trois cas peuvent se présenter :

1° $\rho \leqq 3k+1$; alors le système n'est certainement pas singulier, car, s'il l'était, k serait égal à h, n serait au moins égal à $k+2$ et ρ serait au moins égal à $2h+n$, c'est-à-dire à $3k+2$;

2° $\rho \geqq 3k+3$; alors le système est certainement singulier, car, s'il ne l'était pas, h serait au plus égal à k, et n au plus égal à $h+1$, de sorte que ρ serait au plus égal à $3k+2$;

3° $\rho = 3k+2$; dans ce cas le système peut être singulier, mais il peut aussi ne pas l'être; mais, dans tous les cas, h est égal à k, sinon ρ serait au plus égal à $3k-1$. Nous verrons plus loin comment on distingue les deux cas l'un de l'autre.

40. La question qui se pose maintenant est la suivante :

Le système étant singulier et connaissant la valeur de k (c'est-à-dire de h), trouver la valeur de l'entier n. Il est clair que, si l'on connaît n, on en déduira les valeurs de tous les caractères; si, en effet, il y a l caractères égaux à l'unité, on aura

$$\rho = 2h + l + n,$$

c'est-à-dire

$$l = \rho - 2h - n.$$

Plus généralement, supposons que nous ayons un système pour lequel on connaît l'entier k et tel que ρ soit au moins égal à $3k$; alors on voit facilement que h est ici égal à k. Cherchons la valeur de n.

Nous supposerons que le covariant ω'_1 de genre h puisse s'exprimer au moyen des $2h$ expressions $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{2h}$ indépendantes entre elles (et indépendantes de $\omega_1, \ldots, \omega_s$). Considérons alors ω'_2 et supposons qu'en y faisant $\varpi_1 = \ldots = \varpi_{2h} = 0$, le genre de ω'_2 se réduise à β, de sorte que ω'_2 peut alors s'exprimer au moyen de 2β expressions $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{2\beta}$ indépendantes de $\varpi_1, \ldots, \varpi_{2h}$ (β pouvant d'ailleurs être nul). Enfin il se peut que ρ soit supérieur à $2h + 2\beta$, soit

$$\rho = 2h + 2\beta + \alpha;$$

nous désignerons alors par $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\alpha$, α nouvelles expressions indépendantes des précédentes. Le covariant ω'_2 se présente alors sous la forme

$$\omega'_2 \equiv \sum b_{ij}\varpi_i\varpi_j + \sum c_{ij}\varpi_i\theta_j + \sum d_{ij}\varpi_i\chi_j + \chi_1\chi_2 + \ldots + \chi_{2\beta-1}\chi_{2\beta}.$$

On peut maintenant s'arranger de manière que tous les d_{ij}

soient nuls en ajoutant à chacune des expressions χ une combinaison linéaire convenable des ϖ. De plus, les α coefficients de $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_\alpha$ sont nécessairement des formes linéaires indépendantes de $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_{2h}$, sinon ω'_2 ne dépendrait des θ que par l'intermédiaire de moins de α formes indépendantes et il y aurait des éléments caractéristiques. On peut donc supposer que les coefficients de $\theta_1, \ldots, \theta_\alpha$ sont précisément $\varpi_1, \ldots, \varpi_\alpha$. Enfin on peut supposer également que dans les coefficients b_{ij} les indices i et j ne prennent que les valeurs $\alpha+1, \ldots, 2h$ (en ajoutant à chaque θ une combinaison linéaire convenable des ϖ).

Finalement nous arrivons aux formules suivantes :

$$(36)\qquad \begin{cases} \omega'_1 \equiv \displaystyle\sum_{i,j}^{1,\ldots,2h} a_{ij}\varpi_i\varpi_j, \\ \omega'_2 \equiv \displaystyle\sum_{i,j}^{\alpha+1,\ldots,2h} b_{ij}\varpi_i\varpi_j + \varpi_1\theta_1 + \ldots + \varpi_\alpha\theta_\alpha \\ \qquad\qquad + \chi_1\chi_2 + \ldots + \chi_{2\beta-1}\chi_{2\beta}. \end{cases}$$

Les entiers α et β se trouvent immédiatement une fois qu'on connaît k; par suite, la réduction (36) est toujours facile à effectuer.

Ces entiers α et β satisfont d'ailleurs aux inégalités

$$(37)\qquad \begin{cases} \alpha \leqq 2h, \\ \alpha + 2\beta \geqq h, \end{cases}$$

la dernière résultant de l'hypothèse d'après laquelle ρ est au moins égal à $3h$.

41. Avant de passer à la détermination du nombre n, nous ferons la remarque suivante : Pour tout élément annulant ω'_1, les $2h$ expressions $\varpi_1, \ldots, \varpi_{2h}$ doivent être liées par *au moins* h relations; autrement dit, tout élément annulant ω'_1 est *au plus* à $\rho - h$ dimensions. De plus, si l'on considère h quelconques (ou un moindre nombre) des expressions $\varpi_1, \ldots, \varpi_{2h}$, *ces* h *expressions restent indépendantes* pour un élément arbitraire $E_{\rho-h}$ annulant ω'_1. C'est une proposition que je laisse au lecteur le soin de démontrer.

Cela étant, considérons d'abord le cas où α *est inférieur à* h. Il est clair que tout élément intégral E_n est contenu dans l'un des éléments $E_{\rho-h}$ qui annulent ω'_1. Cherchons d'abord la dimension maxima des éléments intégraux contenus dans un élément $E_{\rho-h}$ *arbitraire*.

On peut d'abord, d'après la remarque faite plus haut, supposer que les $\alpha < h$ expressions $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_\alpha$ sont indépendantes pour l'élément considéré $E_{\rho-h}$, de sorte que cet élément sera, par exemple, défini en se donnant d'une manière convenable $\varpi_{h+1}, \ldots, \varpi_{2h}$ en fonctions linéaires de $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_h$. En substituant dans ω'_2, on obtient une expression de la forme suivante :

$$(38)\quad \overline{\omega}'_2 = \sum_{i,j}^{\alpha+1,\ldots,h} \beta_{ij}\varpi_i\varpi_j + \varpi_1\theta'_1 + \ldots + \varpi_\alpha\theta'_\alpha + \chi_1\chi_2 + \ldots + \chi_{2\beta-1}\chi_{2\beta},$$

où θ'_i se déduit de θ_i par addition d'une combinaison linéaire convenable de $\varpi_1, \ldots, \varpi_h$. Soit alors σ le genre de l'expression

$$\sum_{i,j}^{\alpha+1,\ldots,h} \beta_{ij}\varpi_i\varpi_j;$$

on peut remarquer que l'entier σ satisfait à l'inégalité

$$(39)\qquad \sigma \leqq \frac{h-\alpha}{2}$$

et aussi, en vertu de la deuxième inégalité (37), à

$$(40)\qquad \sigma \leqq \beta.$$

Cela étant, le genre de $\overline{\omega}'_2$ est égal à $\sigma + \alpha + \beta$, de sorte qu'il faut au moins $\sigma + \alpha + \beta$ relations entre les ϖ, les θ et les χ pour annuler $\overline{\omega}'_2$. Finalement la dimension maxima des éléments intégraux contenus dans $E_{\rho-h}$ est égale à

$$(41)\qquad \rho - h - (\sigma + \alpha + \beta) = h + \beta - \sigma.$$

Je dis maintenant que ce nombre $h + \beta - \sigma$ est précisément égal à n. Remarquons, en effet, que pour un élément intégral *arbitraire* $E_{h+\beta-\sigma}$, contenu dans l'élément *arbitraire* $E_{\rho-h}$, les h expressions $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_h$ sont indépendantes, car le nombre $\alpha + 2\sigma$ de celles de ces expressions dont dépend $\overline{\omega}'_2$ est au plus égal au genre $\alpha + \beta + \sigma$ de $\overline{\omega}'_2$, à cause de (40). Par suite, pour l'élément intégral $E_{h+\beta-\sigma}$ les $2h$ expressions $\varpi_1, \ldots, \varpi_{2h}$ sont liées exactement par les h relations qui définissent $E_{\rho-h}$. Autrement dit, $E_{h+\beta-\sigma}$ *est contenu dans un seul élément* $E_{\rho-h}$. Par suite, si n était supérieur à $h+\beta-\sigma$, par l'élément intégral $E_{h+\beta-\sigma}$ passerait au moins un élément intégral E_n, et cet élément devrait être contenu dans un élément à $\rho-h$ dimensions annulant ω'_1 et qui ne pourrait être, par suite, que l'élément *donné* $E_{\rho-h}$. Or, par hypothèse, cet élément $E_{\rho-h}$ ne contient pas d'élément intégral à plus de $h+\beta-\sigma$ dimensions. On a donc nécessairement

$$n = h+\beta-\sigma, \tag{42}$$

avec les inégalités

$$\beta+\frac{h+\alpha}{2} \leqq n \leqq \beta+h \tag{43}$$

résultant de (39) et (40).

On a de plus le théorème :

Tout élément intégral E_n *est contenu dans un et un seul des éléments* $E_{\rho-h}$ *obtenus en annulant le covariant* ω'_1, *et réciproquement chacun de ces éléments* $E_{\rho-h}$ *contient une infinité d'éléments intégraux* E_n, *obtenus au moyen du covariant* ω'_2, *réduit en tenant compte des relations qui définissent* $E_{\rho-h}$.

Enfin, la relation fondamentale

$$\rho = s_1+s_2+\ldots+s_n+n$$

donne les valeurs suivantes des caractères

$$\left\{\begin{aligned} s_1 &= \ldots = s_h = 2,\\ s_{h+1} &= \ldots = s_{\alpha+\beta+\sigma} = 1,\\ s_{\alpha+\beta+\sigma+1} &= \ldots = s_{h+\beta-\sigma} = 0,\end{aligned}\right. \tag{44}$$

ce qui exige encore les inégalités

$$\sigma \geqq h-\alpha-\beta, \qquad n \leqq \alpha+2\beta. \tag{45}$$

42. Considérons maintenant le cas où α *est supérieur ou égal à* h. Le raisonnement est tout à fait analogue. Si l'on considère un élément *arbitraire* $E_{\rho-h}$ annulant ω'_1, on peut supposer que, pour cet élément, les h expressions $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_h$ sont indépendantes. En portant alors dans ω'_2 les valeurs de $\varpi_{h+1}, \ldots, \varpi_{2h}$, il vient une expression de la forme

$$\varpi'_2 = \varpi_1\theta'_1 + \ldots + \varpi_h\theta'_h + \chi_1\chi_2 + \ldots + \chi_{2\beta-1}\chi_{2\beta},$$

où θ'_i se déduit de θ_i par addition d'une combinaison linéaire convenable de $\theta_{h+1}, \ldots, \theta_\alpha, \varpi_1, \ldots, \varpi_h$. Le genre de $\overline{\omega}'_2$ est alors égal à $h+\beta$, de sorte que tout élément intégral contenu dans $E_{\rho-h}$ est obtenu par $h+\beta$ relations au moins entre $\varpi_1, \ldots, \varpi_h$, $\theta'_1, \ldots, \theta'_h, \chi_1, \ldots, \chi_{2\beta}$. La dimension maxima des éléments intégraux contenus dans $E_{\rho-h}$ est alors

$$\rho - h - (h+\beta) = \alpha + \beta,$$

et l'on démontre, comme dans le premier cas, que ce nombre représente la valeur de n. Le théorème énoncé dans ce premier cas est encore valable ici, et l'on a facilement les égalités

$$n = \alpha + \beta, \tag{46}$$

$$s_1 = \ldots = s_h = 2, \quad s_{h+1} = \ldots = s_{h+\beta} = 1, \quad s_{\beta+h+1} = \ldots = s_{\beta+\alpha} = 0. \tag{47}$$

43. Ces résultats nous permettent de décider, dans le cas resté douteux où l'on a

$$\rho = 3h + 2$$

si le système est singulier ou non. Si d'abord α est inférieur à h, l'égalité

$$\alpha + 2\beta = h + 2 \tag{48}$$

ou

$$h - \alpha = 2(\beta - 1)$$

donne pour σ les inégalités

$$\sigma \leqq \beta - 1, \qquad \sigma \geqq \beta - 2;$$

il n'y a donc pour σ que les deux valeurs possibles $\beta - 2$ et $\beta - 1$; à la première correspond pour n la valeur $h+2$, à la seconde la valeur $h+1$. Pour que le système soit singulier, il faut donc que σ soit égal à $\beta - 2$, ce qui exige d'ailleurs $\beta \geqq 2$.

Si, au contraire, α est supérieur ou égal à h, on doit avoir $n = h + 2$, c'est-à-dire

$$\alpha + \beta = h + 2,$$

ce qui, joint à (48), donne pour β la valeur zéro. Il faut donc et il suffit que β soit nul.

Enfin remarquons, comme vérification, que si l'on a

$$\alpha = 0, \qquad \sigma = 0$$

ou

$$\alpha = 2h,$$

on obtient

$$\rho = 2n,$$

ce qui concorde avec les résultats trouvés directement pour les systèmes systatiques.

CHAPITRE IV.

INTÉGRATION DES SYSTÈMES SINGULIERS DE CARACTÈRE *deux*.

XI.

LES SYSTÈMES SINGULIERS POUR LESQUELS LE SYSTÈME DÉRIVÉ N'EST PAS COMPLÈTEMENT INTÉGRABLE.

44. Dans l'étude des systèmes de caractère *un*, nous avons trouvé deux cas essentiellement distincts : celui où le système dérivé était complètement intégrable et celui où il ne l'était pas. Cette distinction se présente ici aussi pour les systèmes de caractère *deux*, singuliers ou non. Mais comme notre but n'est d'étudier l'intégration que des systèmes singuliers sans élément caractéristique, nous nous bornerons à ceux-là.

Supposons donc d'abord que le système dérivé ne soit pas complètement intégrable. Si

$$(1) \qquad \omega_3 = \ldots = \omega_s = 0$$

sont les équations du système dérivé et si $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_\rho$ constituent avec $\omega_1, \ldots, \omega_s$ un système de r expressions de Pfaff indépendantes, on peut réduire ω'_1 et ω'_2 à des expressions du second degré en $\varpi_1, \ldots, \varpi_\rho$ (mod $\omega_1, \ldots, \omega_s$).

Enfin, d'après les résultats du Chapitre précédent, on peut supposer que ω'_1 est de genre h, en conservant toujours à cet entier sa même signification, et que ω'_2 est au moins de genre $h+2$.

Cela étant, on aura des congruences de la forme suivante :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \omega'_3 \equiv \omega_1 \chi_3 + \omega_2 \theta_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \omega'_s \equiv \omega_1 \chi_s + \omega_2 \theta_s \end{array} \right. \qquad (\text{mod } \omega_3, \ldots, \omega_s),$$

où les χ et les θ désignent des combinaisons linéaires de $\varpi_1, \ldots, \varpi_\rho, \omega_1, \omega_2$.

Si nous dérivons les deux membres de la première des congruences (2), nous obtenons

$$\omega'_1 \chi_3 + \omega'_2 \theta_3 - \omega_1 \chi'_3 - \omega_2 \theta'_3 \equiv 0, \qquad (\text{mod } \omega_3, \ldots, \omega_s; \omega'_3, \ldots, \omega'_s)$$

et, *a fortiori,*

$$(3) \qquad \omega'_1 \chi_3 + \omega'_2 \theta_3 \equiv 0 \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s).$$

Cela étant, d'abord χ_3 et θ_3 ne peuvent pas être indépendantes entre elles et indépendantes de ω_1, ω_2; car, s'il en était ainsi, on aurait en particulier (n° 14)

$$\omega'_2 \theta_3 \chi_3 \equiv 0 \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s),$$

ce qui exigerait

$$\omega'^3_2 \equiv 0 \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s);$$

le genre de ω'_2 serait donc au plus égal à 2, ce qui est contraire à l'hypothèse d'après laquelle ce genre est au moins égal à $h + 2$.

Si maintenant il y a une relation et une seule entre $\chi_3, \theta_3, \omega_1, \omega_2$, soit

$$\theta_3 \equiv l \chi_3 \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2),$$

la congruence (3) entraîne

$$(\omega'_1 + l\omega'_2)^2 \equiv 0 \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s);$$

l'un au moins des covariants $u\omega'_1 + v\omega'_2$ est donc de genre 1; donc on a nécessairement

$$h = 1;$$

d'ailleurs ce covariant ne peut être que ω'_1, car si un covariant différent de ω'_1 était aussi de genre 1, ρ serait au plus égal à 4 et le système ne serait pas singulier. Donc la deuxième hypothèse considérée exige

$$h = 1, \qquad l = 0;$$

autrement dit θ_3 dépend linéairement de ω_1 et ω_2 et on voit facilement qu'on peut le supposer nul en changeant au besoin χ_3. Quant à χ_3, c'est une combinaison linéaire de ω_2 et des deux expressions ϖ au moyen desquelles peut s'exprimer ω'_1.

Enfin, supposons que χ_3 et θ_3 dépendent tous les deux de ω_1 et ω_2 et qu'il en soit de même pour $\chi_4, \theta_4, \ldots, \chi_s, \theta_s$. Pour que le système dérivé ne soit pas complètement intégrable, il faut que l'un des covariants, par exemple ω'_3, soit de la forme

$$\omega'_3 \equiv l\omega_1\omega_2 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_3, \ldots, \omega_s);$$

mais alors le système adjoint du système dérivé serait précisément le système donné, et ce système n'est pas complètement intégrable.

45. Nous arrivons donc au théorème suivant :

Théorème. — *Si un système singulier de caractère deux, et sans élément caractéristique, admet un système dérivé non complètement intégrable, le deuxième caractère s_2 est inférieur à deux et l'un des covariants, par exemple ω'_1, est réductible à la forme $\varpi_1\varpi_2$. De plus, on a des formules telles que*

$$(4) \qquad \left\{\begin{array}{l} \omega'_3 \equiv \omega_1\chi_3 \\ \ldots\ldots\ldots \\ \omega'_s = \omega_1\chi_s \end{array}\right. \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_3, \ldots, \omega_s),$$

les χ dépendant linéairement de ϖ_1, ϖ_2, ω_2.

On peut ajouter que les équations du système adjoint du système dérivé n'entraînent pas l'équation

$$\omega_2 = 0,$$

car sinon l'on aurait

$$\omega'_2 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s, \varpi_1, \varpi_2),$$

ce qui exigerait

$$\omega_2'^3 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s),$$

contrairement à l'hypothèse, le genre de ω'_2 étant au moins égal à 3.

Par suite, *on peut toujours choisir ϖ_1, ϖ_2 de manière que $\chi_3, \ldots, \chi_s$ ne dépendent que de ϖ_1 et ϖ_2.*

46. Cela étant, remarquons que le système dérivé (1) du système donné est aussi le système dérivé du système

$$(5) \qquad \omega_1 = \omega_3 = \ldots = \omega_s = 0,$$

et ce dernier système est de caractère *un*. Il en résulte (n° 20) que le covariant ω'_1 est de genre 1 (mod $\omega_1, \omega_3, \ldots, \omega_s$), sinon le système dérivé serait complètement intégrable.

On a donc encore une congruence de la forme

$$(6) \qquad \omega_1 \equiv \varpi_1 \varpi_2 \qquad (\text{mod } \omega_1, \omega_3, \ldots, \omega_s);$$

il suffit, pour cela, conformément d'ailleurs à ce qui a été fait plus haut, de choisir ϖ_1 et ϖ_2 de manière que le système adjoint du système (5) soit

$$(7) \qquad \omega_1 = \omega_3 = \ldots = \omega_s = \varpi_1 = \varpi_2 = 0.]$$

47. Finalement, *si un système de Pfaff singulier de caractère deux, sans élément caractéristique, a un système dérivé non complètement intégrable, on peut trouver $s - 1$ équations du système formant un sous-système de caractère un et admettant des caractéristiques à $r - s - 1$ dimensions.*

De plus, d'après les résultats du Chapitre III, tout élément intégral du système donné est situé dans un élément intégral arbitraire du sous-système. Par suite, pour avoir l'intégrale générale du système donné, on prendra une multiplicité intégrale arbitraire M_{r-s} du sous-système

$$(5) \qquad \omega_1 = \omega_3 = \ldots = \omega_s = 0,$$

et l'on cherchera les multiplicités intégrales de l'équation

$$\omega_2 = 0$$

contenues dans M_{r-s}. Ces multiplicités M_{r-s} dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument et sont engendrées par des caractéristiques à $r - s - 1$ dimensions données par les équations complètement intégrables

$$(7) \qquad \omega_1 = \omega_3 = \ldots = \omega_s = \varpi_1 = \varpi_2 = 0.$$

48. On peut préciser davantage les propriétés des multiplicités intégrales. Une discussion facile montre que trois cas peuvent se présenter relativement à la forme de ω'_2 ; ils sont caractérisés par les formules suivantes :

$$(8) \quad \begin{cases} \omega'_1 \equiv \varpi_1 \varpi_2 & (\text{mod } \omega_1, \omega_3, \ldots, \omega_s), \\ \omega'_2 \equiv \varpi_3 \varpi_4 + \ldots + \varpi_{2n-1} \varpi_{2n} & (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \varpi_s), \end{cases}$$

$$(9) \quad \begin{cases} \omega'_1 \equiv \varpi_1 \varpi_2 & (\text{mod } \omega_1, \omega_3, \ldots, \omega_s), \\ \omega'_2 \equiv \varpi_1 \varpi_4 + \varpi_2 \varpi_3 + \varpi_5 \varpi_6 + \ldots + \varpi_{2n-1} \varpi_{2n} & (\text{mod } \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s) \end{cases}$$

et

$$(10)\quad \begin{cases} \omega'_1 \equiv \varpi_1\varpi_2 & (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega_3, \ldots, \omega_s), \\ \omega'_2 \equiv \varpi_1\varpi_3 + \varpi_4\varpi_5 + \ldots + \varpi_{2n}\varpi_{2n+1} & (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s). \end{cases}$$

Dans les trois cas, n désigne la dimension maxima de l'intégrale générale.

Dans le premier cas, la recherche des multiplicités intégrales contenues dans une multiplicité M_{r-s} exige l'intégration d'une équation de Pfaff qui admet des caractéristiques à une dimension

$$\omega_2 = \varpi_3 = \varpi_4 = \ldots = \varpi_{2n} = 0;$$

dans le second cas, il en est de même; seulement, si la relation entre ϖ_1 et ϖ_2 qui caractérise M_{r-s} est

$$\varpi_2 = a\varpi_1,$$

les caractéristiques à une dimension de l'équation de Pfaff qui reste à intégrer sont

$$\omega_2 = \varpi_1 = \varpi_4 + a\varpi_3 = \varpi_5 = \ldots = \varpi_{2n} = 0;$$

enfin, dans le troisième cas, l'équation de Pfaff à intégrer n'admet plus de caractéristique.

Les deux premiers cas correspondent à des systèmes systatiques

$$s_1 = 2, \qquad s_2 = \ldots = s_{n-1} = 1, \qquad s_n = 0;$$

le troisième, à un système non systatique

$$s_1 = 2, \qquad s_2 = \ldots = s_{n-1} = s_n = 1.$$

49. Nous arrivons maintenant à une notion nouvelle : celle de *caractéristiques* d'une nouvelle nature, que nous désignerons sous le nom de *caractéristiques de Monge* pour les distinguer des caractéristiques considérées jusqu'à présent et que nous appellerons dorénavant *caractéristiques de Cauchy*. Ces dernières engendrent les multiplicités intégrales à n dimensions, et par chaque point de l'espace il en passe une, et une seule, de sorte que toutes les multiplicités intégrales M_n qui passent par un point donné ont en commun la caractéristique issue de ce point. *La première propriété seule, d'être des génératrices pour les multiplicités intégrales, se conserve pour les caractéristiques de Monge.*

Considérons une quelconque des multiplicités intégrales de l'un des systèmes dont nous nous occupons.

L'équation de Pfaff

$$(11) \qquad \varpi_1 = 0$$

est pour cette intégrale une équation aux différentielles totales par rapport aux n variables indépendantes choisies ; mais on est sûr d'avance qu'elle entraîne les équations

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_s = \varpi_2 = 0;$$

or, le système

$$(7) \qquad \omega_1 = \omega_3 = \ldots = \omega_s = \varpi_1 = \varpi_2 = 0$$

est déjà par lui-même complètement intégrable quand les r variables primitives sont regardées comme indépendantes; donc, *a fortiori*, sur la multiplicité intégrale considérée M_n la seule équation (11) à laquelle ce système se réduit est-elle complètement intégrable. Par suite, elle définit sur M_n une famille de multiplicités à $n-1$ dimensions dépendant de n paramètres arbitraires engendrant M_n, et telles que par chaque point de M_n il en passe une, et une seule. Ce sont des *caractéristiques de Monge*. Si l'on change la multiplicité intégrale M_n, ces caractéristiques à $n-1$ dimensions satisfont toujours au système suivant :

$$(12) \qquad \omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_s = \varpi_1 = \varpi_2 = 0;$$

c'est le système différentiel des caractéristiques. Remarquons que l'on a, pour ce système, suivant les cas,

$$(13) \qquad \begin{cases} \omega'_1 \equiv \omega'_3 \equiv \ldots \equiv \omega'_s \equiv \varpi'_1 \equiv \varpi'_2 \equiv 0 \\ \omega'_2 \equiv \varpi_3\varpi_4 + \ldots + \varpi_{2n-1}\varpi_{2n} \end{cases} \qquad (\bmod\ \omega_1, \ldots, \varpi_2),$$

$$(14) \qquad \begin{cases} \omega'_1 \equiv \omega'_3 \equiv \ldots \equiv \omega'_s \equiv \varpi'_1 \equiv \varpi'_2 \equiv 0 \\ \omega'_2 \equiv \varpi_5\varpi_6 + \ldots + \varpi_{2n-1}\varpi_{2n} \end{cases} \qquad (\bmod\ \omega_1, \ldots, \varpi_2),$$

$$(15) \qquad \begin{cases} \omega'_1 \equiv \omega'_3 \equiv \ldots \equiv \omega'_s \equiv \varpi'_1 \equiv \varpi'_2 \equiv 0 \\ \omega'_2 \equiv \varpi_4\varpi_5 + \ldots + \varpi_{2n}\varpi_{2n+1} \end{cases} \qquad (\bmod\ \omega_1, \ldots, \varpi_2).$$

Elles sont données par l'intégration d'un système de caractère *un*. Dans le premier cas, elles dépendent d'une fonction arbitraire de $n-1$ arguments; dans le second cas, ce sont toutes les multiplicités à $n-1$ dimensions, situées dans des multiplicités à n dimensions dépendant d'une fonction arbitraire de $n-2$ arguments et engendrées par des multiplicités caractéristiques de Cauchy à deux dimensions, à savoir

$$(16)\qquad \omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_s = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_5 = \varpi_6 = \ldots = \varpi_{2n} = 0;$$

dans le troisième cas, ce sont encore toutes les multiplicités à $n-1$ dimensions, situées dans des multiplicités à n dimensions dépendant d'une fonction arbitraire de $n-1$ arguments et engendrées par des multiplicités caractéristiques de Cauchy à une dimension, à savoir

$$(17)\qquad \omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_s = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_4 = \varpi_5 = \ldots = \varpi_{2n+1} = 0.$$

Enfin, dans les trois cas, elles sont situées dans des multiplicités à $r-s-1$ dimensions dépendant de $s+1$ constantes arbitraires, à savoir

$$\omega_1 = \omega_3 = \ldots = \omega_s = \varpi_1 = \varpi_2 = 0.$$

50. Enfin, dans les deux premiers cas ($\rho = 2n$), il existe aussi des *multiplicités caractéristiques de Monge à une dimension*. Dans le premier cas, défini par les formules (8), ces multiplicités caractéristiques sont définies par les équations

$$\omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_s = \varpi_3 = \varpi_4 = \ldots = \varpi_{2n} = 0;$$

elles dépendent d'une fonction arbitraire d'un argument, car on a, par exemple,

$$\omega'_2 \equiv \varpi_1 \varpi_2 \qquad (\operatorname{mod} \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s, \varpi_3, \ldots, \varpi_{2n});$$

par chaque point d'une multiplicité intégrale M_n il en passe une et une seule; elle n'est d'ailleurs pas contenue dans la multiplicité caractéristique à $n-1$ dimensions qui passe par ce point.

Dans le second cas, défini par les formules (9), les caractéristiques à une dimension sont définies par les équations

$$(16)\qquad \omega_1 = \omega_2 = \ldots = \omega_s = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_5 = \ldots = \varpi_{2n} = 0;$$

elles sont contenues dans les multiplicités caractéristiques à $n-1$ dimensions; ce sont d'ailleurs toutes les multiplicités à une dimension contenues dans les multiplicités à deux dimensions définies par le système complètement intégrable (16).

XII.

LES SYSTÈMES SINGULIERS POUR LESQUELS LE SYSTÈME DÉRIVÉ EST COMPLÈTEMENT INTÉGRABLE.

51. Si le système dérivé est complètement intégrable, nous pouvons le supposer intégré, de sorte que nous sommes ramenés au cas où le système ne contient que deux équations.

Si h désigne alors le nombre des caractères égaux à 2, on peut supposer que le covariant ω'_1 est de genre h (mod ω_1, ω_2) avec

$$n \geqq h + 2, \qquad \rho \geqq 3h + 2;$$

soit

$$(18) \qquad \omega'_1 \equiv \sum_{i,j}^{1,\ldots,2h} a_{ij}\varpi_i\varpi_j \qquad (\operatorname{mod} \omega_1, \omega_2).$$

Nous conserverons les notations du Chapitre III (form. 36) et nous supposerons choisies les expressions $\varpi_1, \ldots, \varpi_{2h}, \theta_1, \ldots, \theta_\alpha, \chi_1, \ldots, \chi_{2\beta}$ de manière à avoir

$$(19) \qquad \left\{\begin{aligned} \omega'_1 &\equiv \sum_{i,j}^{1,\ldots,2h} a_{ij}\varpi_i\varpi_j \\ \omega'_2 &\equiv \sum_{i,j}^{\alpha+1,\ldots,2h} b_{ij}\varpi_i\varpi_j + \varpi_1\theta_1 + \ldots + \varpi_\alpha\theta_\alpha \\ &\qquad + \chi_1\chi_2 + \ldots + \chi_{2\beta-1}\chi_{2\beta} \end{aligned}\right. \qquad (\operatorname{mod} \omega_1, \omega_2).$$

Nous allons d'abord examiner dans quel cas ω'_1 est de genre $h+1$ (mod ω_1), c'est-à-dire dans quel cas on a une congruence de la forme

$$(20) \qquad \omega'_1 \equiv \sum_{i,j}^{1,\ldots,2h} a_{ij}\varpi_i\varpi_j + \omega_2\psi \qquad (\operatorname{mod} \omega_1),$$

ψ désignant une expression de Pfaff convenablement choisie, *indépendante de* $\omega_1, \omega_2, \varpi_1, \ldots, \varpi_{2h}$.

Pour qu'une congruence telle que (20) soit possible, il faut d'abord que l'on ait

$$(21) \qquad \omega'_2 \equiv 0 \qquad (\operatorname{mod} \omega_1, \omega_2, \varpi_1, \ldots, \varpi_{2h}, \psi),$$

car le système adjoint de l'équation $\omega_1 = 0$ est

$$\omega_1 = \omega_2 = \varpi_1 = \ldots = \varpi_{2h} = \psi = 0,$$

et ce système est complètement intégrable. Mais la congruence (21) n'est évidemment possible que si l'on a

$$\omega_2'^2 \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega_2, \varpi_1, \ldots, \varpi_{2h}),$$

c'est-à-dire *si l'entier* β *est nul ou égal à l'unité.*

52. 1° $\beta = 0$. — Si β est nul, on peut évidemment supposer que ψ est une combinaison linéaire de $\theta_1, \ldots, \theta_\alpha$; de plus, α est un entier au moins égal à $h+2$.

En raisonnant comme nous l'avons fait au Chapitre III pour établir les formules (38), nous verrons qu'on peut mettre ω_1' sous la forme

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} \omega_1' \equiv\ & \varpi_1 \varpi_{\alpha+1} + \ldots + \varpi_\gamma \varpi_{\alpha+\gamma} \\ & + \varpi_{\gamma+1} \varpi_{\gamma+2} + \ldots + \varpi_{\alpha-1} \varpi_\alpha \\ & + \varpi_{\alpha+\gamma+1} \varpi_{\alpha+\gamma+2} + \ldots + \varpi_{2h-1} \varpi_{2h} + \varpi_2 \psi \end{aligned}\right. \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1),$$

en désignant par γ un entier qui peut être nul, mais au plus égal à α et, de plus, de même parité que α.

Cela étant, on aura, en prenant les dérivées des deux membres de la congruence (22),

$$\begin{aligned} & \varpi_1' \varpi_{\alpha+1} + \ldots + \varpi_\gamma' \varpi_{\alpha+\gamma} - (\varpi_1 \varpi_{\alpha+1}' + \ldots + \varpi_\gamma \varpi_{\alpha+\gamma}') \\ & \quad + \varpi_{\gamma+1}' \varpi_{\gamma+2} - \varpi_{\gamma+2}' \varpi_{\gamma-1} + \ldots + \varpi_{\alpha-1}' \varpi_\alpha - \varpi_\alpha' \varpi_{\alpha-1} \\ & \quad + \varpi_{\alpha+\gamma+1}' \varpi_{\alpha+\gamma+2} + \ldots - \varpi_{2h-1} \varpi_{2h}' + \omega_2' \psi - \omega_2 \psi' \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega_1'). \end{aligned}$$

Désignons par $\overline{\varpi}_1', \overline{\varpi}_2', \ldots, \overline{\varpi}_{2h}'$ ce que deviennent $\varpi_1', \varpi_2', \ldots, \varpi_{2h}'$ lorsqu'on y fait

$$\omega_1 = \omega_2 = \varpi_1 = \ldots = \varpi_{2h} = 0;$$

on a alors l'identité

$$\begin{aligned} & \overline{\varpi}_1' \varpi_{\alpha+1} + \ldots + \overline{\varpi}_\gamma' \varpi_{\alpha+\gamma} - \left(\varpi_1 \overline{\varpi}_{\alpha+1}' + \ldots + \varpi_\gamma \overline{\varpi}_{\alpha+\gamma}'\right) \\ & \quad + \overline{\varpi}_{\gamma+1}' \varpi_{\gamma+2} - \overline{\varpi}_{\gamma+2}' \varpi_{\gamma+1} + \ldots - \overline{\varpi}_\alpha' \varpi_{\alpha-1} \\ & \quad + \overline{\varpi}_{\alpha+\gamma+1}' \varpi_{\alpha+\gamma+2} + \ldots - \overline{\varpi}_{2h}' \varpi_{2h-1} + (\varpi_1 \theta_1 + \ldots + \varpi_\alpha \theta_\alpha) \psi = 0. \end{aligned}$$

Par suite, en égalant à zéro les coefficients de $\varpi_1, \ldots, \varpi_{2h}$ dans le premier membre de cette identité, il vient

$$(23)\quad \left\{\begin{array}{llll} \overline{\varpi}_1' = \ldots = \overline{\varpi}_\gamma' = 0, & & & \\ \overline{\varpi}_{\gamma+1}' = -\theta_{\gamma+2}\psi, & \overline{\varpi}_{\gamma+2}' = \theta_{\gamma+1}\psi, & \ldots, & \overline{\varpi}_\alpha' = \theta_{\alpha-1}\psi, \\ \overline{\varpi}_{\alpha+1}' = \theta_1\psi, & \ldots, & \overline{\varpi}_{\alpha+\gamma}' = \theta_\gamma\psi, & \\ \overline{\varpi}_{\alpha+\gamma+1}' = \ldots = \overline{\varpi}_{2h}' = 0. & & & \end{array}\right.$$

Enfin, en prenant les dérivées des deux membres de la deuxième congruence (19) et y faisant $\varpi_1 = \ldots = \varpi_{2h} = 0$, il vient l'identité

$$(24) \qquad -2(\theta_{\gamma+1}\theta_{\gamma+2} + \ldots + \theta_{\alpha-1}\theta_\alpha)\psi = 0.$$

Cette identité exige que γ soit égal à $\alpha - 2$ ou à α. Mais, d'autre part, on a

$$\gamma \leqq \alpha; \qquad \gamma + \alpha \leqq 2h, \qquad \alpha \geqq h + 2,$$

et la deuxième de ces inégalités est incompatible avec la troisième si γ est égal à $\alpha - 2$ ou à α.

Donc *le premier cas est impossible.*

53. 2° $\beta = 1$. — Dans ce cas, $n = \alpha + 1$ est au moins égal à $h + 2$. Donc α *est au moins égal à* $h + 1$.

On a toujours la congruence (20), mais ici ψ dépend nécessairement de χ_1, χ_2 et, de plus, en prenant les dérivées des deux membres de cette congruence, on trouve facilement

$$\chi_1\chi_2\psi \equiv 0 \qquad (\mathrm{mod}\ \omega_1, \omega'_1, \varpi_1, \ldots, \varpi_{2h}),$$

ce qui permet de prendre $\psi = \chi_1$.

Ici le système peut être mis sous une forme assez simple. Le covariant ω'_1 étant de genre $h + 1$ (mod ω_1), la première équation du système peut toujours s'écrire

$$dz - p_1\, dx_1 - p_2\, dx_2 - \ldots - p_{h+1}\, dx_{h+1} = 0;$$

de plus, le système adjoint de cette équation étant

$$\omega_1 = \omega'_2 = \varpi_1 = \ldots = \varpi_{2h} = \psi = 0,$$

le premier membre ω_2 de la seconde équation est une combinaison linéaire de $dz, dx_1, \ldots, dp_{h+1}$; par suite, on peut supposer le système mis sous la forme

$$(25) \quad \begin{cases} dz - p_1\, dx_1 - \ldots - p_{h+1}\, dx_{h+1} = 0, \\ dp_{h+1} + u_1\, dp_1 + \ldots + u_h\, dp_h - v_1\, dx_1 - \ldots - v_{h+1}\, dx_{h+1} = 0, \end{cases}$$

et parmi les $2h + 1$ fonctions u et v, il y en a $\alpha + 1$ indépendantes entre elles et indépendantes des x, z et p; ou, si l'on préfère, il existe $2h - \alpha$ relationsı ndépendantes entre les $4h + 4$ variables x, z, p, u, v.

Cela étant, il est facile de voir que pour toute multiplicité intégrale du système, les $2h+3$ variables x, z, u, p sont liées par $h+2$ relations seulement, les $h+1$ expressions $\varpi_1, \ldots, \varpi_h$, ψ étant en effet indépendantes pour un élément intégral E_n. Il résulte de là que, pour avoir l'intégrale générale du système (25), il suffit de prendre l'intégrale générale de la première équation du système

$$(26) \quad \begin{cases} z = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_{h+1}), \\ p_1 = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \qquad \ldots, \qquad p_{h+1} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_{h+1}}, \end{cases}$$

en portant dans la deuxième équation on obtient, $x_1, \ldots, x_{h+1}$ devant rester indépendants,

$$(27) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{h+1}\,\partial x_1} + u_1 \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \ldots + u_h \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_h\,\partial x_1} = v_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_{h+1}\,\partial x_{h+1}} + u_1 \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1\,\partial x_{h+1}} + \ldots + u_h \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_h\,\partial x_{h+1}} = v_{h+1}. \end{cases}$$

Ces équations, jointes aux $2h-\alpha$ relations qui doivent exister entre les variables x, z, p, u, v, permettent d'exprimer toutes les variables en fonctions de $x_1, \ldots, x_{h+1}$ et de $\alpha - h$ des variables u, ce qui donne bien des multiplicités intégrales à $\alpha+1$ dimensions.

La réduction du système donné à la forme (25) exige $h+2$ opérations d'ordres

$$2h+3, \quad 2h+1, \quad \ldots, \quad 3, \quad 1.$$

54. Ces systèmes nous fournissent un exemple de *caractéristiques* d'une nouvelle espèce. Considérons les équations

$$(28) \qquad \omega_1 = \omega_2 = \varpi_1 = \ldots = \varpi_{2h} = 0,$$

appliquées à une multiplicité intégrale; elles se réduisent à h seulement; mais on peut ici appliquer les formules (23), et elles montrent que parmi les covariants ω'_1, ω'_2, ϖ'_1, $\ldots$, ϖ'_{2h} il y a toutes les expressions

$$\theta_1\chi_1, \quad \theta_2\chi_1, \quad \ldots, \quad \theta_\alpha\chi_1, \quad \chi_1\chi_2;$$

or, pour une multiplicité intégrale, $\theta_{h+1}, \ldots, \theta_\alpha$, χ_1, par exemple, sont indépendants; donc *le système considéré de h équations de Pfaff à $n=\alpha+1$ variables n'admet que des intégrales à une dimension*, puisqu'on a nécessairement, pour élément intégral de ce système

$$\varpi_1 = \varpi_2 = \ldots = \varpi_h = 0,$$
$$\theta_{h+1} = a_{h+1}\psi, \quad \ldots, \quad \theta_\alpha = a_\alpha \psi.$$

Ces intégrales dépendent de $\alpha - h$ fonctions arbitraires d'un argument. De plus, les caractéristiques dans leur ensemble dépendent de $\alpha + 1 = n$ fonctions arbitraires d'un argument.

Ainsi, les équations (28) définissent des caractéristiques à une dimension; mais, *tandis que les caractéristiques de Cauchy dépendent, dans leur ensemble, seulement de constantes arbitraires, tandis que les caractéristiques de Monge dépendent, dans leur ensemble, de fonctions arbitraires, celles d'entre elles qui sont situées sur une multiplicité intégrale ne dépendant néanmoins que de constantes arbitraires, ici les caractéristiques définies par* (28) *ne jouissent même plus de cette dernière propriété, celles de ces caractéristiques qui sont situées sur une multiplicité intégrale donnée dépendant de fonctions arbitraires.*

Le système étant mis sous la forme (25), les équations différentielles des caractéristiques sont d'ailleurs

$$(29)\left\{\begin{aligned} &\frac{dx_1}{u_1} = \frac{dx_2}{u_2} = \ldots = \frac{dx_h}{u_h} = \frac{dx_{h+1}}{1} \\ &= \frac{dp_1}{v_1} = \ldots = \frac{dp_h}{v_h} = \frac{dp_{h+1}}{v_{h+1}} = \frac{dz}{p_{h+1} + u_1 p_1 + \ldots + u_h p_h}; \end{aligned}\right.$$

il suffit, pour s'en rendre compte, de remarquer que l'on a

$$\begin{aligned} \omega'_1 \equiv (dx_1 - u_1\, dx_{h+1})(dp_1 - v_1\, dx_{h+1}) + \ldots \\ + (dx_h - u_h\, dx_{h+1})(dp_h - v_h\, dx_{h+1}) \qquad (\operatorname{mod} \omega_1, \omega_2). \end{aligned}$$

55. Il ne reste plus maintenant qu'à examiner le cas où ω'_1 est de genre h (mod ω_1). Alors, d'après ce qui a été montré au Chapitre III, pour avoir l'intégrale générale il suffira de chercher l'intégrale générale de l'équation

$$\omega_1 = 0,$$

ce qui donne une multiplicité à $r - h - 1$ dimensions et, en portant dans la deuxième équation du système, de chercher l'intégrale la plus générale contenue dans cette multiplicité. *On est ainsi ramené à l'intégration successive de deux équations de Pfaff.*

Il y a ici des caractéristiques de Monge à $n - h$ dimensions, définies par les équations

$$\omega_1 = \omega_2 = \varpi_1 = \ldots = \varpi_{2h} = 0, \tag{28}$$

mais ici l'on a évidemment [d'après (19)]

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega'_1 \equiv \varpi'_1 \equiv \ldots \equiv \varpi'_{2h} \equiv 0 \\ \omega'_2 \equiv \chi_1\chi_2 + \ldots + \chi_{2\beta-1}\chi_{2\beta} \end{array} \right. \quad (\bmod\ \omega_1, \omega_2, \varpi_1, \ldots, \varpi_{2h}); \tag{30}$$

ce sont toutes les multiplicités à $n - h$ dimensions contenues dans des multiplicités à $\alpha + \beta$ dimensions, engendrées par des caractéristiques de Cauchy à α dimensions et dépendant d'une fonction arbitraire de β arguments. Sur chaque multiplicité intégrale il y en a une infinité dépendant de h constantes arbitraires.

Dans certains cas il peut y avoir naturellement d'autres caractéristiques que les précédentes; par exemple, sous certaines conditions, le système

$$\omega_1 = \omega_2 = \varpi_1 = \ldots = \varpi_\alpha = \chi_1 = \ldots = \chi_{2\beta} = 0$$

peut aussi définir des caractéristiques; mais je laisse de côté ce sujet, qu'il n'est pas dans mon intention de traiter.

56. En résumé, nous voyons que *les systèmes singuliers de caractère deux n'admettant pas de caractéristiques de Cauchy jouissent tous de la propriété très remarquable que leur intégrale générale peut être obtenue par l'intégration de systèmes d'équations différentielles ordinaires.* Cela ne veut pas dire, bien entendu, que pour ces systèmes le problème de Cauchy puisse être résolu au moyen d'équations différentielles ordinaires; *cette conclusion est néanmoins exacte pour les systèmes singuliers dont le système dérivé n'est pas complètement intégrable;* car, en conservant les notations employées dans l'étude de ce cas, la connaissance d'une multiplicité intégrale à une dimension par laquelle doit passer la multiplicité intégrale cherchée permet de déterminer la fonction arbitraire dont dépend la multiplicité M_{r-s}; cette multiplicité étant connue, on est ramené à résoudre le problème de Cauchy pour une seule équation de Pfaff.