BULLETIN DE LA S. M. F.

M. WEILL

Sur une classe de polygones de Poncelet

Bulletin de la S. M. F., tome 29 (1901), p. 199-208

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1901__29__199_1>

SUR UNE CLASSE DE POLYGONES DE PONCELET;

Par M. Mathieu Weill.

Considérons deux cercles, O, O′, se coupant aux points cycliques I, J, et en deux autres points A, B.

S'il existe des polygones de $2m$ côtés inscrits au cercle O et circonscrits au cercle O′, il existe une ligne polygonale formée de m tangentes au cercle O′, A étant le point de contact de la première tangente, B, I ou J étant le point de contact de la dernière, et dont les $(m+1)$ sommets sont sur le cercle O; réciproquement, s'il existe une pareille ligne, on peut inscrire au cercle O un polygone de $2m$ côtés qui soit circonscrit au cercle O′.

Deux cas peuvent se présenter : ou bien la ligne commençant en A se termine en B, et dans ce cas il y a aussi une ligne commençant en I et se terminant en J ; ou bien la ligne commençant en A se termine en I ou J ; ces deux cas correspondent à deux classes *absolument distinctes* de polygones.

PREMIÈRE PARTIE.

Nous nous occuperons d'abord des polygones de la première classe, et nous choisirons la ligne polygonale commençant en I et se terminant en J.

Les deux cercles auront pour équations

$$(1) \qquad (x-\delta)^2+y^2-\rho^2=0,$$

$$(2) \qquad x^2+y^2-R^2=0.$$

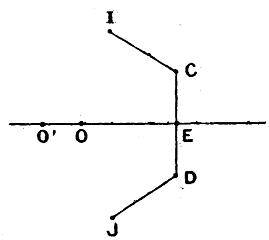
1° *Quadrilatère.* — La ligne est ici IMJ, M étant sur la ligne des centres, donc

$$\delta = R;$$

résultat bien connu, la seconde circonférence passe par le centre de la première.

2° *Hexagone.* — La ligne polygonale est ici ICDJ (*fig.* 1), CD étant perpendiculaire à la ligne des centres et coupée par

Fig. 1.



cette ligne en deux parties égales.

L'équation de IC est

$$y = i(x-\delta);$$

celle de CD est

$$x-\delta = \pm\rho;$$

prenons la première solution $x = \delta+\rho$; les coordonnées de C sont

$$\begin{cases} x = \delta + \rho, \\ y = i\rho. \end{cases}$$

Exprimons que ce point est sur la seconde circonférence; nous aurons la condition

$$\delta^2 + 2\delta\rho = R^2.$$

Avec la seconde solution, on trouve

$$\delta^2 - 2\delta\rho = R^2.$$

Une discussion facile montre que la première solution ne correspond à des polygones réels que si l'on a $\delta > \frac{\rho}{4}$, et alors les cercles sont sécants.

La seconde solution exige $\delta > 2\rho$, et les cercles sont alors extérieurs.

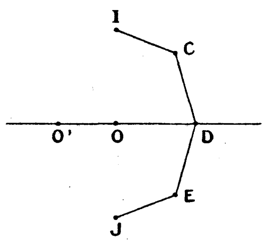
En particulier, les cercles sont égaux pour $\delta = R(\sqrt{2} + 1)$.

Pour $\delta = \frac{\rho}{2}$, on a $R = \rho\frac{\sqrt{5}}{2}$, la corde commune aux deux cercles est un diamètre du cercle de rayon ρ.

Pour $\delta = \frac{2\rho}{3}$, $R = \frac{4\rho}{3}$.

3° *Octogone.* — La ligne polygonale est ICDEJ (*fig.* 2), symé-

Fig. 2.



trique par rapport à la ligne des centres. Les équations de IC et CD sont

$$y = i(x - \delta), \qquad (x - \delta)\cos\varphi + y\sin\varphi - \rho = 0.$$

Les coordonnées du point C sont donc

$$x_1 = \delta + \rho(\cos\varphi - i\sin\varphi), \qquad y_1 = i\rho(\cos\varphi - i\sin\varphi).$$

Exprimons que ce point est sur le cercle de rayon R; nous aurons

$$\delta^2 - R^2 + 2\delta\rho(\cos\varphi - i\sin\varphi) = 0.$$

Le point B a pour coordonnées

$$y = 0, \qquad x = \delta + \frac{0}{\cos\varphi}.$$

Exprimons qu'il est sur le cercle de rayon R; nous aurons

$$\delta + \frac{\rho}{\cos\varphi} = \pm R.$$

Posant

$$\cos\varphi - i\sin\varphi = a,$$

il vient

$$\cos\varphi + i\sin\varphi = \frac{1}{a},$$

et

$$\cos\varphi = \frac{a^2+1}{2a}, \qquad a = \frac{R^2-\delta^2}{2\delta\rho}, \qquad \delta \pm R + \frac{2a\rho}{a^2+1} = 0,$$

$$(\delta \pm R)[(R^2-\delta^2)^2 + 4\delta^2\rho^2] + 4\delta\rho^2(R^2-\delta^2) = 0.$$

On voit facilement qu'il faut prendre $(\delta - R)$ comme premier facteur, et l'on a la condition cherchée

$$\rho^2 = \frac{(R^2-\delta^2)^2}{4\delta R}.$$

On trouve, après discussion, qu'il faut prendre

$$3 - 2\sqrt{2} < \frac{\delta}{R} < 3 + 2\sqrt{2},$$

et les cercles sont alors sécants. Il n'y a pas d'autres cas de possibilité.

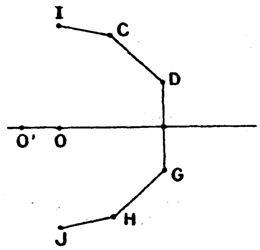
Exemples :

$$\delta = \frac{R}{4}, \qquad \rho = \frac{15R}{16},$$

$$\delta = 4R, \qquad \rho = \frac{15R}{4}.$$

4° *Décagone.* — La ligne polygonale est ici ICDGHJ (*fig.* 3), symétrique par rapport à la ligne des centres.

Fig. 3.



Les équations des droites IC, CD, DG sont respectivement

$$y = i(x - \delta),$$
$$(x - \delta)\cos\varphi + y\sin\varphi - \rho = 0,$$
$$x - \delta = \pm\rho.$$

Prenons la solution

$$x - \delta = \rho.$$

Exprimons que le point C est sur le cercle de rayon R; nous aurons

$$\frac{R^2 - \delta^2}{2\delta\rho} = \cos\varphi - i\sin\varphi = a, \qquad \cos\varphi = \frac{a^2+1}{2a}.$$

Opérant de même pour D, nous aurons

$$(\delta + \rho)^2 - R^2 + \rho^2\frac{1 - \cos\varphi}{1 + \cos\varphi} = 0,$$

ou

$$(\delta + \rho)^2 - R^2 - \rho^2\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2 = 0.$$

Remplaçons a par sa valeur; nous aurons la condition cherchée

$$(R^2 - \delta^2 - 2\delta\rho)(R^2 - \delta^2 + 2\delta\rho)^2 - 8\delta\rho^3(R^2 - \delta^2) = 0.$$

Prenons ensuite la solution $x - \delta = -\rho$; nous trouvons la condition

$$(R^2 - \delta^2 + 2\delta\rho)(R^2 - \delta^2 - 2\delta\rho)^2 + 8\delta\rho^3(R^2 - \delta^2) = 0.$$

Reprenons la première solution

$$R^2 - \delta^2 = 2a\delta\rho,$$

$$R^2 = \delta^2 + \rho^2 + 2\delta\rho - \rho^2\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2,$$

d'où

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\rho}{\delta} &= \frac{(a-1)(a+1)^2}{2a}, \\ \frac{R^2}{\delta^2} &= a(a^2+a-1). \end{aligned}\right.$$

Exemples :

$$a = \frac{-3}{2}, \qquad \rho = \frac{5\delta}{24}, \qquad R = \delta\sqrt{\frac{3}{8}},$$

les cercles sont extérieurs.

$$a = 2, \qquad \rho = \frac{9\delta}{4}, \qquad R = \delta\sqrt{10},$$

les cercles sont sécants.

Il faut d'abord, pour la réalité de la solution, que a soit compris entre $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et zéro, ou bien supérieur à 1. En exprimant que R est plus grand que ρ, on est amené à l'inégalité

$$a^6 - 2a^5 - 5a^4 - a^2 + 2a + 1 < 0.$$

Le polynome a deux racines négatives α et β, et deux racines positives γ et δ.

Une discussion détaillée conduit aux conclusions suivantes : il faut et il suffit, pour que la solution soit réelle, que a soit compris entre α et β, ou bien entre 1 et $(2+\sqrt{5})$. (La racine α est comprise entre $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et -1, et la racine β entre $2-\sqrt{5}$ et 0.)

Théorie générale. — Considérons toujours la ligne polygonale en I (*fig.* 4) et formée par des tangentes du cercle O'.

Le premier côté a pour équation

$$y = i(x - \delta).$$

Le second, CD, a pour équation

$$(x-\delta)(1-t^2) + 2ty - \rho(1+t^2) = 0. \tag{1}$$

Le point C a pour coordonnées

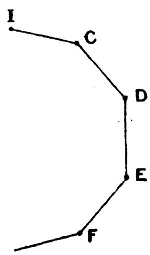
$$x_1 = \frac{R^2+\delta^2}{2\delta}, \qquad y_1 = i\frac{R^2-\delta^2}{2\delta}.$$

On a donc, en formant le produit des racines de (1),

$$t_1 i = \frac{x_1 - \delta - \rho}{\delta - x_1 - \rho} = \frac{R^2 - \delta^2 - 2\delta\rho}{\delta^2 - R^2 - 2\delta\rho}.$$

Nous avons ainsi les premiers éléments de la ligne polygonale;

Fig. 4.



cherchons une loi de récurrence qui lie les valeurs de t correspondant aux divers côtés de la ligne polygonale; l'équation (1) nous donne

$$tt' = \frac{x - \delta - \rho}{\delta - x - \rho}, \qquad t + t' \frac{-2y}{\delta - x - \rho};$$

exprimons que le point (x, y) est sur le cercle O, il vient

$$(t^2 + t'^2)\rho^2 + 2tt'(\delta^2 - R^2) + t^2 t'^2[(\delta - \rho)^2 - R^2] + (\delta + \rho)^2 - R^2 = 0,$$

d'où résulte la loi de récurrence cherchée

$$t_{n-1}\, t_{n+1} = \frac{t_n^2 + \alpha}{\beta t_n^2 + 1},$$

en posant

$$\frac{(\delta + \rho)^2 - R^2}{\rho^2} = \alpha, \qquad \frac{(\delta - \rho)^2 - R^2}{\rho^2} = \beta.$$

On a ainsi la suite des formules

$$\begin{aligned}
t_0 \quad\quad &= i, \\
t_1 i \quad\quad &= -\frac{\alpha - 1}{\beta - 1}, \\
t_2 i \quad\quad &= \frac{t_1^2 + \alpha}{\beta t_1^2 + 1}, \\
t_1 \quad t_3 &= \frac{t_2^2 + \alpha}{\beta t_2^2 + 1}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
t_{n-1}\, t_{n+1} &= \frac{t_n^2 + \alpha}{\beta t_n^2 + 1}.
\end{aligned}$$

Ceci posé, cherchons la condition relative à un polygone de $4p$ côtés; il suffit d'exprimer que l'extrémité du côté correspondant à t_{p-1} est sur la ligne des centres des deux cercles, d'où

$$p\frac{t_{p-1}^2+1}{t_{p-1}^2-1}=+\delta\pm R.$$

Pour avoir la condition relative à un polygone de $(4p+2)$ côtés, il suffit d'écrire que le côté correspondant à t_p est perpendiculaire à la ligne des centres, c'est-à-dire que l'on a

$$t_{p-1}^2+\alpha=0,$$

ou bien

$$\beta t_{p-1}^2+1=0.$$

Ces résultats sont d'une simplicité remarquable.

Comme application, proposons-nous de trouver la condition relative à un polygone de *quatorze côtés;* nous aurons une première solution en écrivant

$$t_2^2=-\alpha,$$

d'où

$$\alpha=\frac{\left[\alpha-\left(\frac{\alpha-1}{\beta-1}\right)^2\right]^2}{\left[1-\beta\left(\frac{\alpha-1}{\beta-1}\right)^2\right]^2}.$$

Comme seconde solution, nous écrivons

$$t_2^2=\frac{-1}{\beta},$$

c'est-à-dire

$$-\frac{1}{\beta}=\frac{\left[\alpha-\left(\frac{\alpha-1}{\beta-1}\right)^2\right]^2}{\left[1-\beta\left(\frac{\alpha-1}{\beta-1}\right)^2\right]^2}.$$

SECONDE PARTIE.

Considérons (*fig.* 5) une ligne polygonale commençant en I et se terminant en $A(x_1\, y_1)$; soient $\theta_0, \theta_1, \ldots,$ les paramètres définissant les côtés AK, KL, LM, ..., nous aurons

$$\theta_0 = \frac{-y_1}{\delta - x_1 - \rho},$$

$$x' x_1 = \frac{[\rho(1+\theta_0^2)+\delta(1-\theta_0^2)]^2 - 4R^2\theta_0^2}{(1+\theta_0^2)^2},$$

$$\theta_0 \quad \theta_1 \quad = \frac{x' - \delta - \rho}{\delta - x - \rho},$$

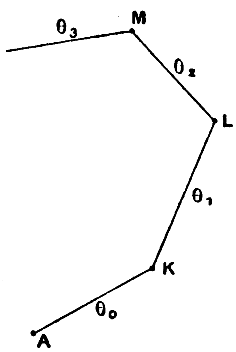
$$\theta_0 \quad \theta_2 \quad = \frac{\theta_1^2 + \alpha}{\beta\theta_1^2 + 1},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\theta_{n-1}\theta_{n+1} = \frac{\theta_n^2 + \alpha}{\beta\theta_n^2 + 1}.$$

Dans ces formules, $x_1\, y_1$ sont les coordonnées d'un point A

Fig. 5.



(autre que les points cycliques) commun aux deux cercles; x' est l'abscisse du point k, où la tangente en A au cercle de rayon ρ rencontre le cercle de rayon R.

Ceci posé, cherchons, par exemple, la ligne de quatre côtés commençant en I et se terminant en A, c'est-à-dire l'octogone de seconde espèce; on peut écrire

$$t_3 = \theta_0;$$

on peut aussi écrire

$$t_2 = \theta_1.$$

De même cherchons la ligne de cinq côtés, commençant en I et se terminant en A; nous écrirons, ou bien

$$t_4 = \theta_0,$$

ou bien

$$t_3 = \theta_1,$$

ou bien

$$t_2 = \theta_2.$$

Les résultats sont, comme on le voit, beaucoup moins simples que pour les polygones de première espèce.

Pour l'hexagone de seconde espèce, nous écrirons

$$t_2 = \theta_0,$$

ou

$$\frac{-iy_1}{\delta - x_1 - \rho} = \frac{\alpha + t_1^2}{\beta t_1^2 + 1},$$

ou

$$\frac{x_1^2 - R^2}{(\delta - x_1 - \rho)^2} = \frac{\left[\alpha - \left(\frac{\alpha - 1}{\beta - 1}\right)^2\right]^2}{\left[1 - \beta\left(\frac{\alpha - 1}{\beta - 1}\right)^2\right]^2}.$$

avec

$$x_1 = \frac{\delta^2 - \rho^2 + R^2}{2\delta}, \qquad \alpha = \frac{(\delta + \rho)^2 - R^2}{\rho^2}, \qquad \beta = \frac{(\delta - \rho)^2 - R^2}{\rho^2}.$$

On voit, par cet exemple, combien les formules relatives aux polygones de seconde espèce sont, de leur nature, compliquées; il faut préférer, à la méthode générale, l'étude de chacun des cas particuliers, étude qui, seule, peut conduire aux simplifications possibles; c'est ainsi que nous avons obtenu les formules relatives à l'hexagone de seconde espèce :

$$\frac{R^2}{\rho^2} = \frac{\lambda(\lambda - 1)^2(2 - 3\lambda)}{(1 - 2\lambda)^2},$$

$$\frac{\delta^2}{\rho^2} = \frac{\lambda^2(1 - 3\lambda)(\lambda - 1)}{(1 - 2\lambda)^2},$$

λ désignant un paramètre arbitraire.

Nous reviendrons prochainement sur toutes ces questions, sur l'étude des polygones d'un nombre impair de côtés, et l'extension aux coniques de la méthode exposée pour deux cercles.