BULLETIN DE LA S. M. F.

J. HADAMARD

Sur l’intégrale résiduelle

Bulletin de la S. M. F., tome 28 (1900), p. 69-90

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__69_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1900, tous droits réservés.

L’accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l’accord avec les conditions générales d’utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d’une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR L'INTÉGRALE RÉSIDUELLE;

Par M. Hadamard.

1. La notion de ce que nous appellerons ([1]) l'*intégrale résiduelle* des équations aux dérivées partielles linéaires se rattache au principe d'Huygens.

Ce principe a été entendu de façons diverses par les auteurs qui l'ont étudié. $u(x_1, x_2, \ldots, x_n, t)$ étant une intégrale de l'équation $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u$ donnée par ses valeurs et celles de ses dérivées premières sur une certaine multiplicité M_n à n dimensions [par exemple la multiplicité $t=0$, ou la multiplicité $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$]: certains géomètres, tels que M. Volterra ([2]), font consister le principe d'Huygens dans l'expression de $u(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, t^0)$ (par une intégrale définie) en fonction des valeurs que prennent $u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}$ sur une certaine fonction P_n de M_n : à savoir, la région formée par les points de M_n qui satisfont à l'inégalité

$$a^2(t-t^0)^2 \geqq (x_1 - x_1^0)^2 + (x_1 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2.$$

Pour Kirchhoff, au contraire, de même que pour M. Poincaré, le principe d'Huygens dit encore autre chose : à savoir que, pour calculer $u(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, t^0)$, il n'est pas nécessaire de connaître les valeurs de u, $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ sur toute l'étendue de P_n, mais qu'il suffit de s'être donné ces valeurs sur la *frontière* de P_n, c'est-à-dire sur la multiplicité à $n-1$ dimensions, lieu des points de M_n qui vérifient l'*équation*

$$a^2(t-t^0)^2 = (x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \ldots + (x_n - x_n^0)^2.$$

([1]) *Cf.* Poincaré, *Propagation de la chaleur*, p. 155, 156; 1895.

([2]) *Rendic. Acc. Lincei*, 5ᵉ série, tome I, p. 161 et suiv., *ibid.*, 265 et suiv., 1892; *Acta mathematica*, tome XVIII, p. 161 et suiv.; 1894. — M. Duhem (*Hydrodynamique, élasticité, acoustique*, t. II) s'était déjà placé à un point de vue un peu analogue. *Voir* aussi Coulon, *Procès-verbaux de la Société des Sciences physiques et naturelles*, Bordeaux, 1898-1899, p. 85.

C'est ce dernier point de vue que nous adopterons. D'après cela, au lieu que les formules de M. Volterra [1] sont considérées par leur auteur comme démontrant le principe d'Huygens dans tous les cas, ces mêmes formules démontreront, pour nous, que ce principe est *vrai* pour n impair et *faux* pour n pair.

Au sens de M. Volterra, le principe d'Huygens semble être une propriété générale des équations linéaires aux dérivées partielles. Au sens où nous l'entendons, c'est, au contraire, un caractère très particulier de l'équation du son. L'équation des ondes cylindriques, l'équation des télégraphistes ne présentent pas ce caractère, comme on le sait : si un plan, dont les mouvements sont régis par l'équation [2]

$$\frac{\partial^2 u}{dt^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

est en repos pour $t = 0$, à l'exception des points d'une aire déterminée S, non seulement un point extérieur à S entrera en mouvement à partir du mouvement où il sera atteint par l'onde provenant du mouvement de S, mais encore *après* le passage de cette onde, il ne reviendra plus au repos. L'équation du nouveau mouvement que prennent ainsi les points successivement dépassés par l'onde est l'*intégrale résiduelle* de l'équation des ondes cylindriques. C'est cette intégrale résiduelle qui s'annule identiquement dans le cas des ondes sonores sphériques, d'après le principe d'Huygens.

Il serait intéressant de déterminer toutes les équations auxquelles le principe d'Huygens s'applique. J'ai jugé utile de commencer par l'étude de l'intégrale résiduelle dans le cas le plus simple possible, celui de deux variables indépendantes.

I.

2. Prenons l'équation linéaire à deux variables indépendantes et à caractéristiques réelles sous la forme

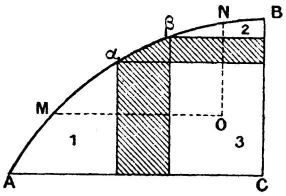
$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0. \tag{1}$$

(1) *Rendic. Acc. Lincei* [*loc. cit.*, p. 166-168, formules (A), (B), (D), (E), (A_a), (B_a), (D_a)].

(2) Il est bien entendu que, ici, nous supposons cette équation vérifiée *dans tout le plan et constamment*. *Voir* plus loin n° 8.

Les valeurs de z et de ses dérivées premières étant données sur un arc AB (*fig.* 1) qui n'est coupé en plus d'un point par aucune parallèle à l'axe des x ni par aucune parallèle à l'axe des y, la fonction z est déterminée, comme on sait, dans le triangle mixti-

Fig. 1.



ligne ABC formé par l'arc AB et les parallèles menées par le point A à l'axe des x, par le point B à l'axe des y.

Nous allons supposer qu'il existe sur AB deux points α, β (le second étant plus près de B que le premier) tels que les valeurs données de z et de ses dérivées soient nulles sur tout l'arc Aα et sur tout l'arc βB.

Sur l'arc $\alpha\beta$, au contraire, ces valeurs seront quelconques, sous la seule condition d'être nulles en α et β, afin que la continuité soit respectée aux dérivées du second ordre près.

Dès lors, si, par les points α, β, nous menons des parallèles aux axes, ces droites diviseront le triangle mixtiligne ABC en trois sortes de régions :

1° La région comprise entre les parallèles menées par α, β à l'axe des x, et celle qui est comprise entre les parallèles menées par les mêmes points à l'axe des y (régions ombrées sur la figure).

2° Les régions extérieures aux premières, à savoir, celles qui comprennent respectivement les points A et B, et qui sont numérotées 1 et 2 sur la *fig.* 1. Dans ces régions, la fonction z est manifestement nulle.

3° La région comprise entre la parallèle à l'axe des x menée par α et la parallèle à l'axe des y menée par β, et telle qu'il soit impossible de passer de cette région à l'arc AB sans traverser les régions ombrées; région numérotée 3 sur la *fig.* 1, et que l'on peut considérer comme caractérisée par ce fait que, si de l'un quelconque O de ses points, on mène des parallèles OM, ON aux axes de coordonnées, jusqu'à rencontre en M, N avec AB, les deux points M et N comprennent entre eux l'arc $\alpha\beta$.

C'est la fonction z considérée dans cette dernière région qui constitue l'*intégrale résiduelle.*

3. Le type le plus simple de mouvement dans lequel le repos se rétablit après le passage de l'onde est évidemment fourni par le problème des cordes vibrantes, lequel se ramène à l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 0. \tag{2}$$

Il ne faudrait pas croire, cependant, que, dans ce cas, l'intégrale résiduelle soit identiquement nulle. *Pour l'équation* (2), *l'intégrale résiduelle est une constante,* en général différente de zéro [1]. Il suffit, pour le voir, de prendre l'intégrale générale sous la forme connue

$$z_0 = z_A + \int_A^N \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \int_A^M \frac{\partial z}{\partial y}\,dy$$

(où, bien entendu, M et N désignent, comme tout à l'heure, les points d'intersection de l'arc AB avec les parallèles aux axes menées par le point quelconque O). Si les points M et N comprennent entre eux le segment $\alpha\beta$ et que z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ soient nuls sur $A\alpha$, βB, la formule précédente se réduit à

$$z_0 = \int_\alpha^\beta \frac{\partial z}{\partial x}\,dx,$$

c'est-à-dire à $z_0 =$ const., comme nous l'avions annoncé. Cette constante n'est d'ailleurs évidemment pas nulle en général. Nous verrons d'ailleurs que l'intégrale résiduelle ne peut être identiquement nulle pour aucune équation de la forme (1).

4. Nous sommes dès lors amenés à chercher pour quelles équations l'intégrale résiduelle est de la forme

$$C_1V_1 + C_2V_2 + \ldots + C_pV_p, \tag{3}$$

V_1, V_2, ..., V_p étant seuls fonctions de x et de y, tandis que C_1,

---

[1] Sur cette contradiction apparente, *voir* plus loin, n° 13.

$C_2, \ldots, C_p$ dépendent uniquement de la distribution des valeurs données sur l'arc $\alpha\beta$.

Plus généralement encore, proposons-nous de trouver dans quels cas l'intégrale résiduelle satisfait à une ou plusieurs équations linéaires distinctes de l'équation proposée (1) et de ses dérivées. Cette question comprend évidemment la précédente comme cas particulier : car, étant donnée une expression du type (3), on peut toujours trouver un système d'équations linéaires aux dérivées partielles dont elle soit l'intégrale générale.

La réponse à une telle question est aisément fournie par la formule fondamentale [1]

$$(4)\quad \begin{cases} z_0 = z = \dfrac{z_M + z_N}{2} + \displaystyle\int_M^N \left[a_1 u z_1 + \frac{1}{2}\left(u\frac{\partial z_1}{\partial y_1} - z_1\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right] dy_1 \\ \qquad\qquad - \left[b_1 u z_1 + \dfrac{1}{2}\left(u\dfrac{\partial z_1}{\partial x_1} - z_1\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\right)\right] dx_1, \end{cases}$$

où $u(x, y, x_1, y_1)$ est la fonction de Riemann définie par les propriétés suivantes :

I. Considérée comme fonction des coordonnées x, y du point O, elle vérifie l'équation proposée;

II. Considérée comme fonction des coordonnées x_1, y_1 d'un point P (lequel, dans la formule précédente, décrit l'arc MN), elle vérifie l'équation adjointe;

III. Lorsque x est égal à x_1, on a

$$(5)\qquad u(x_1, y, x_1, y_1) = e^{-\int_y^{y_1} a(x_1, y)\,dy}$$

et, lorsque y est égal à y_1,

$$(6)\qquad u(x, y_1, x_1 y_1) = e^{-\int_x^{x_1} b(x, y_1)\,dx}.$$

---

(1) DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, Tome II, Liv. IV, Chap. IV, n° 358. Nous appelons ici x, y, x_1, y_1, respectivement, les quantités qui sont désignées, à l'endroit cité, par x_0, y_0, x, y. Quant à z_1, a_1, b_1, ils représentent les valeurs que prennent z, a, b, lorsqu'on remplace x, y par x_1, y_1.

Dans le cas de l'intégrale résiduelle, la formule (4) se réduit à

$$
(4') \quad \left\{ \begin{aligned} z_0 = \int_\alpha^\beta & \left[a_1 u z_1 + \frac{1}{2}\left(u \frac{\partial z_1}{\partial y_1} - z_1 \frac{\partial u}{\partial y_1} \right) \right] dy_1 \\ & - \left[b_1 u z_1 + \frac{1}{2}\left(u \frac{\partial z_1}{\partial x_1} - z_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) \right] dx_1. \end{aligned} \right.
$$

Nous avons à rechercher si la fonction ainsi obtenue de x, y vérifie une équation linéaire

$$
(7) \qquad \mathfrak{F}(z) = \sum A_{pq}(x,y) \frac{\partial^{p+q} z}{\partial x^p \partial y^q} = 0.
$$

Si l'on observe que l'expression de $\mathfrak{F}(z)$ se déduit de la formule (4') par des différentiations sous le signe $\int$, il est clair que l'on aura

$$
(8) \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{F}(z) = \int_\alpha^\beta & \left[a \Phi z_1 + \frac{1}{2}\left(\Phi \frac{\partial z_1}{\partial y_1} - z_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1} \right) \right] dy_1 \\ & - \left[b \Phi z_1 + \frac{1}{2}\left(\Phi \frac{\partial z_1}{\partial x_1} - z_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} \right) \right] dx_1, \end{aligned} \right.
$$

en posant

$$
\Phi(x, y, x_1, y_1) = \mathfrak{F}(u).
$$

Or, sur l'arc $\alpha\beta$, — sous la simple condition de s'annuler aux extrémités, — z_1 et *l'une des deux dérivées* $\frac{\partial z_1}{\partial x_1}$, $\frac{dz_1}{\partial y_1}$ sont arbitraires. Donc l'équation (8) ne peut avoir lieu identiquement [1] que si l'on a, sur $\alpha\beta$,

$$
(9) \qquad \Phi = 0
$$

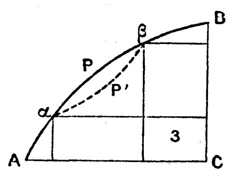
5. La condition précédente ne semble démontrée que pour les positions du point (x_1, y_1) situées sur l'arc $\alpha\beta$ [le point x, y étant quelconque dans la région (3)]. Mais il est aisé de voir qu'elle doit encore être remplie quelle que soit la position du point (x_1, y_1) dans le rectangle qui a ses côtés parallèles aux axes et dont deux sommets opposés sont en α, β.

---

[1] D'après des considérations classiques de calcul des variations, la conclusion subsisterait si l'on imposait à z_1 et à ses dérivées en α et en β, des conditions de continuité plus restrictives, telles que la continuité des dérivées jusqu'à un ordre quelconque p.

Remplaçons, en effet, l'arc considéré $A\alpha P\beta B$ par un autre arc $A\alpha P'\beta B$ (satisfaisant à la même condition de n'être rencontré qu'une fois par les parallèles aux axes) qui passe également aux points α, β (arc représenté en traits interrompus sur la *fig.* 2). Une fonction Z, solution de l'équation (1), différente de zéro sur

Fig. 2.



l'arc $\alpha P\beta$ et nulle sur le reste de l'arc $A\alpha P\beta B$, est aussi, d'après les théorèmes généraux, différente de zéro sur l'arc $\alpha P'\beta$ et nulle sur le reste de l'arc $A\alpha P'\beta B$, et inversement. Donc la condition (9) doit être vérifiée aussi bien sur l'arc $\alpha P'\beta$ que sur l'arc $\alpha P\beta$.

Il est d'ailleurs aisé de retrouver le même résultat directement : car pour entraîner la relation (8), il faut que l'on ait, pour toutes les positions du point P sur l'arc $\alpha\beta$, non seulement $\Phi = 0$, mais encore

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0.$$

Or Φ, considéré comme fonction de x_1, y_1, vérifie manifestement, aussi bien que u, l'adjointe de l'équation (1). Donc il est nul dans tout le rectangle que nous avons défini tout à l'heure.

Nous admettrons que la relation $\Phi = 0$ a lieu pour toutes les positions du point (x, y) comme du point (x_1, y_1) dans l'aire ABC. C'est ce qui arrive évidemment si les coefficients de l'équation donnée sont analytiques [1].

6. Nous avons donc à rechercher dans quelles conditions la fonction u peut être, quels que soient x, y, une intégrale de l'équation (7).

Or, il résulte des raisonnements présentés dans les *Leçons sur la théorie des surfaces* de M. Darboux [2] que, parmi les inté-

[1] Il est maintenant évident que l'intégrale résiduelle ne peut être identiquement nulle, sans quoi il en serait de même pour la fonction u, ce qui est absurde.

[2] Tome II, Liv. IV, Chap. VIII, n° 400, p. 173-176.

grales communes aux équations (1) et (7), il n'y en a qu'un nombre fini de linéairement indépendantes, à moins que la suite de Laplace relative à l'équation (1) ne soit limitée au moins dans un sens.

Les équations pour lesquelles la suite de Laplace est limitée dans un sens constituent une première solution du problème. Si, en effet, on prend une telle équation sous la forme

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial \log \mathrm{H}_{p-1}}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial \log \mathrm{H}_p}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial \log \mathrm{H}_p}{\partial x}\frac{\partial \log \mathrm{H}_{p-1}}{\partial y} z = 0,$$

et son intégrale générale sous la forme

$$(10) \quad z = \mathrm{D}_x\left(\theta, \alpha, \frac{\partial\alpha}{\partial y}, \ldots, \frac{\partial^{p-1}\alpha}{\partial y^{p-1}}\right) = \begin{vmatrix} 0 & \alpha & \dfrac{\partial\alpha}{\partial y} & \ldots & \dfrac{\partial^{p-1}\alpha}{\partial y^{p-1}} \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial x} & \dfrac{\partial\alpha}{\partial x} & \dfrac{\partial^2\alpha}{\partial x\,\partial y} & \ldots & \dfrac{\partial^p\alpha}{\partial x\,\partial y^{p-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{\partial^p\theta}{\partial x^p} & \dfrac{\partial^p\alpha}{\partial x^p} & \dfrac{\partial^{p+1}\alpha}{\partial x^p\,\partial y} & \ldots & \dfrac{\partial^{2p-1}\alpha}{\partial x^p\,\partial y^{p-1}} \end{vmatrix},$$

$$(11) \quad \theta = \mathrm{X} + \int \mathrm{Y}\alpha\, dy,$$

les notations étant celles du n° 380 (t. II, p. 127) de l'Ouvrage cité de M. Darboux, on verra que l'intégrale u de Riemann s'obtient en prenant pour Y la valeur zéro et, pour X, une combinaison linéaire (à coefficients indépendants de x) des fonctions

$$\alpha(x, y_1), \quad \frac{\partial\alpha(x, y_1)}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial^2\alpha(x, y_1)}{\partial y_1^2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial^p(x, y_1)}{\partial y^p},$$

telle que X et ses $p-1$ premières dérivées s'annulent pour $x = x_1$, la $p^{\text{ième}}$ dérivée étant égale à $\dfrac{1}{\mathrm{H}_{p-1}(x_1, y_1)}$.

Dès lors, u est de la forme $\mathrm{AX} + \mathrm{BX}' + \ldots + \mathrm{LX}^{(p)}$, où A, B, …, L sont des fonctions parfaitement déterminées de x et de y : il satisfait, par conséquent, quels que soient x_1, y_1, à une équation de la forme

$$\lambda u + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial y} + \ldots + \lambda_{p+1}\frac{\partial^{p+1} u}{\partial y^{p+1}} = 0,$$

où λ, λ_1, …, λ_{p+1} sont des fonctions de x, y.

7. Ce premier cas écarté, nous savons que toutes les intégrales communes aux équations (1) et (7) doivent être des combinaisons linéaires d'un nombre fini d'entre elles et que, par conséquent, la fonction u est de type (3), C_1, C_2, ..., C_p étant des fonctions de x_1, y_1.

C'est ce qui a lieu pour *les équations à suite de Laplace se terminant dans les deux sens*. Si, en effet, dans les formules du numéro précédent, on prend [1]

$$\alpha = X_1\eta_1 + X_2\eta_2 + \ldots + X_m\eta_m,$$

X_1, X_2, ..., X_m étant des fonctions de x, pendant que η_1, η_2, ..., η_m sont des fonctions de y, il est clair que θ devient une combinaison linéaire de X_1, X_2, ..., X_m, les coefficients étant fonctions de x_1, y_1. Donc u est une combinaison linéaire [2] des intégrales que l'on obtient en remplaçant, dans la formule (10), θ successivement par X_1, X_2, ..., X_m.

Je dis que *ces équations sont les seules qui répondent à la question.*

---

(1) Darboux, *loc. cit.*, n° 382. Nous avons remplacé les lettres x_1, x_2, ..., x_m par X_1, X_2, ..., X_m et, de même, nous remplaçons ci-dessous, les lettres y_1, y_2, ..., y_m par Y_1, Y_2, ..., Y_m.

(2) Si nous partons de l'expression

$$z = M \begin{vmatrix} X & X' & \ldots & X^{(i)} & Y & Y' & \ldots & Y^{(j)} \\ X_1 & X'_1 & \ldots & X_1^{(i)} & Y_1 & Y'_1 & \ldots & Y_1^{(j)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ X_m & X'_m & \ldots & X_m^{(i)} & Y_m & Y'_m & \ldots & Y_m^{(j)} \end{vmatrix}$$

de l'intégrale générale (Darboux, *loc. cit.*, n° 340, formule 65, p. 48), la fonction u s'obtient en remplaçant X par $\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \ldots + \lambda_m X_m$ et Y par o, ou, ce qui revient au même, X par o et Y par $-(\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \ldots + \lambda_m Y_m)$; les λ étant déterminés par les conditions

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 X_1 \quad + \ldots + \lambda_m X_m \quad = 0 \\ \lambda_1 X'_1 \quad + \ldots + \lambda_m X'_m \quad = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 X_1^{(i-1)} + \ldots + \lambda_m X_m^{(i-1)} = 0 \end{array}\right\} \text{pour } x = x_1,$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 Y_1 \quad + \ldots + \lambda_m Y_m \quad = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda_1 Y_1^{(j-1)} + \ldots + \lambda_m Y_m^{(j-1)} = 0 \end{array}\right\} \text{pour } y = y_1$$

et par l'équation qui exprime que $u = 1$ pour $x = x_1$, $y = y_1$.

C'est ce que l'on démontrera en substituant l'expression (3) dans les équations (5) et (6). La première donne

$$C_1(x_1,y_1)V_1(x_1,y)+C_2(x_1,y_1)V_2(x_1,y)+\ldots$$
$$+C_p(x_1,y_1)V_p(x_1,y)=e^{-\int_y^{y_1} a(x_1,y)\,dy}.$$

Le second membre étant évidemment le produit d'une fonction de x_1, y par une fonction de x_1, y_1, cette équation prouve qu'il existe une relation à coefficients indépendants de y entre les fonctions V_1, V_2, ..., V_p et $e^{\int a\,dy}$. Il en existe même, en général [1], plus d'une, de sorte que l'on peut éliminer l'exponentielle et écrire, entre les intégrales V_1, V_2, ..., V_p la relation

$$X_1V_1(x,y)+X_2V_2+\ldots+X_pV_p=0, \tag{12}$$

où les X_i sont des fonctions de x. De même, l'équation (6) nous donnera la relation

$$Y_1V_1(x,y)+Y_2V_2+\ldots+Y_pV_p=0, \tag{13}$$

à coefficients constants de y.

Or, d'après un théorème de M. Goursat [2], la relation (12) entraîne la limitation de la suite de Laplace dans un sens, et l'équation (13), la limitation de la même suite dans le sens opposé.

La question que nous nous étions posée est donc complètement résolue : la réponse est fournie par les équations pour lesquelles la suite de Laplace se termine, soit dans un sens, soit dans les deux.

II.

8. Le problème de la propagation du son dans un milieu *limité* est différent de celui dont nous venons de parler, et le principe d'Huygens, sous la forme considérée dans ce qui précède, ne s'y applique pas.

Considérons, par exemple, une sphère solide plongée dans un

---

(1) Le seul cas d'exception est celui où les rapports mutuels des C_i seraient fonctions de x_1 seul. Il se traiterait par les mêmes considérations et ne conduirait à rien de nouveau.

(2) *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, tome II, pages 21-28.

gaz indéfini et dont le rayon est soumis à des oscillations très petites pendant que le centre ne varie pas. S'il y avait repos jusqu'à l'origine des temps, et que, après l'instant $t = \theta$, la sphère revienne au repos pour y rester indéfiniment, on sait ([1]) que, après le passage des ondes émises pendant les intervalles de temps compris entre o et θ, il s'établit un mouvement résiduel en général différent de zéro.

Il n'y a là aucune contradiction avec les remarques que nous avons rappelées en commençant : il faut tenir compte, en effet, d'une part, de ce que l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u \tag{14}$$

n'est vérifiée, cette fois, que dans une partie de l'espace, à savoir celle qui est extérieure à la sphère pulsante ; d'autre part, que, sur la surface limite, les conditions données ne sont pas celles que suppose la formule de Kirchhoff.

Celle-ci, en effet, est relative au cas où l'on considère une fonction u satisfaisant à l'équation (14) dans un domaine sur la frontière duquel on se donne les valeurs de u et celles de ses dérivées premières, en même temps qu'on se donne les mêmes quantités à l'origine des temps.

Or, dans le problème des petits mouvements d'un gaz limité par des parois solides mobiles, ce n'est point ainsi que les choses se passent. La fonction u (potentiel des vitesses) est bien donnée, ainsi que ses dérivées, dans tout le domaine considéré D, pour $t = 0$; mais on ne donne que sa dérivée normale, sur la frontière de D, pour $t > 0$.

En fait, si l'on se donne, pour $t = 0$, les valeurs d'une intégrale u de l'équation (14) ainsi que celles de sa dérivée par rapport à t, on ne peut plus donner arbitrairement, sur la frontière F de D, pour $t > 0$, que les valeurs de la fonction u elle-même ou celles de sa dérivée normale.

Que le problème ainsi posé ne puisse admettre plus d'une solution, autrement dit, que l'on trouve nécessairement $u = 0$ lorsque

---

([1]) *Voir* DUHEM, *Hydrodynamique, élasticité, acoustique*, tome I, Ch. XII, pages 235-237.

les données initiales et limites dont nous venons de parler sont nulles, c'est ce que l'on voit aisément en considérant l'intégrale

$$\iiint_{\mathrm{D}} \left\{ a^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right\} dx\, dy\, dz,$$

dont la dérivée par rapport à t est

$$2\iiint \left[a^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y \partial t} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} \right) + \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\partial^2 u}{\partial t} \right] dx\, dy\, dz$$
$$= -2 \iint_{\mathrm{F}} a^2 \frac{\partial u}{\partial t} \frac{du}{dn}\, d\sigma - 2 \iiint_{\mathrm{D}} \frac{\partial u}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t^2} - a^2 \Delta u \right) dx\, dy\, dz,$$

et qui, par conséquent, est constamment nulle si elle est nulle initialement et si l'on a, sur la frontière, l'une des deux conditions

$$u = 0, \qquad \text{ou} \qquad \frac{du}{dn} = 0.$$

C'est également ce qui résulte de l'introduction des fonctions fondamentales (¹) U_i ($i = 1, 2, \ldots, \infty$) telles que l'on ait

$$\Delta U_i + k_i U_i = 0 \text{ dans D}, \qquad U_i = 0 \text{ sur F},$$

car alors, moyennant la condition $u = 0$ (sur F), l'intégrale

$$I_i = \iiint_{\mathrm{D}} u U_i \, dx\, dy\, dz$$

satisfait à l'équation

$$\frac{d^2 I_i}{dt^2} = -k_i a^2 I_i$$

et, par conséquent (en vertu des conditions initiales), est constamment nulle, quel que soit i; ce qui ne peut se faire que pour $u = 0$.

Pareil raisonnement s'appliquera d'ailleurs évidemment si la donnée à la frontière est $\frac{du}{dn} = 0$.

On voit que, dans ces deux questions, on retrouve une analogie partielle avec ce qui se passe dans le cas des équations à caractéristiques imaginaires. Une conséquence de cette analogie est que

---

(¹) POINCARÉ, *Leçons sur la propagation de la chaleur;* LE ROY, *Thèse*, 3ᵉ Partie, Chap. II.

la solution de ces questions est, sans aucun doute, beaucoup plus difficile que celle des problèmes où l'on peut se donner la fonction u et ses dérivées. En effet, au lieu que cette dernière solution peut, comme le montrent la formule de Kirchhoff et la formule précédemment rappelée de Riemann, se développer indépendamment de la forme des domaines considérés, l'étude des questions dont il vient d'être parlé doit dépendre essentiellement de la forme du domaine D.

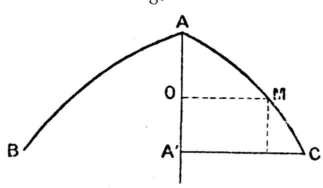
9. Les circonstances signalées au numéro précédent tiennent manifestement à ce que, dans l'espace à quatre dimensions lieu du point (x, y, z, t), le domaine $(D, t = 0)$ et le domaine $(F, t > 0)$ peuvent être coupés par une *même* droite parallèle à une génératrice du cône

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 t^2.$$

Pareil fait se présente, dans les équations à deux variables indépendantes, lorsque la courbe le long de laquelle on entend se donner l'inconnue et ses dérivées est coupée en plus d'un point par des caractéristiques. On sait ([1]) que, dans ce cas, on ne peut pas prendre arbitrairement ces différentes données tout le long de la courbe.

Par contre, il est aisé de voir que si A est le point [point anguleux (*fig.* 3) ou point à tangente caractéristique] qui divise la

Fig. 3.



courbe en deux parties AB, AC telles que chacune d'elles ne soit rencontrée qu'en un point par les caractéristiques, on peut se donner la fonction inconnue z ainsi qu'une dérivée partielle sur l'*un* des arcs AB, AC, et z *seul* sur l'autre ([2]).

([1]) Picard, *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XXIII, p. 150.

([2]) On suppose, bien entendu, que les valeurs de z au point A concordent entre elles ainsi que les deux valeurs de sa dérivée suivant l'arc AC.

Car, l'équation étant supposée prise sous la forme (1) et la direction des caractéristiques qui rencontrent à la fois AB et AC étant celle de l'axe des x (*fig.* 3), la donnée de z et de ses dérivées sur AB fait connaître z sur la parallèle AA′ menée à l'axe des y par le point A. On est donc ramené à trouver l'intégrale qui prend, sur AA′ et sur AC, des valeurs données. M. Picard a démontré [1] que ce problème est possible.

La solution est d'ailleurs unique. C'est ce que l'on peut voir de la manière suivante : Soit z une intégrale qui s'annule sur AA′ et sur AC. Il s'agit de démontrer que z est identiquement nul dans le triangle mixtiligne AA′C formé par les deux lignes précédentes et la parallèle à l'axe des x menée par le point C (*fig.* 3).

Prenons pour origine des coordonnées le point A, et soit φ_1 la série des valeurs de $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial z_1}{\partial y_1} - \frac{dx_1}{dy_1}\frac{\partial z_1}{\partial x_1}\right)$ sur l'arc AC [2] $\left(\text{ou, ce qui revient au même, la série des valeurs de } \frac{\partial z_1}{\partial y_1}, \text{ puisque, sur cet arc, } dz_1 = 0\right)$. La formule (4) donne ici

$$z = \int_{M}^{N} u\varphi_1 \, dy_1; \tag{15}$$

et, puisque z est nul sur AA′, on a, pour toute valeur de y comprise entre 0 et la valeur de y_0 qui correspond au point A′,

$$0 = \int_0^y u(0, y, x_1, y_1)\varphi_1 \, dy_1.$$

Multiplions par $\psi(y)\,dy$ et intégrons de 0 à y_0 ; il vient

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} 0 &= \int_0^{y_0} \psi(y)\,dy \int_0^{y} u(0, y, x_1, y_1)\varphi_1\,dy_1 \\ &= \int_0^{y_0} \varphi_1\,dy_1 \int_{y_1}^{y_0} \psi(y)\,u(0, y, x_1, y_1)\,dy. \end{aligned}\right.$$

---

(1) Note *Sur les méthodes d'approximations successives dans la théorie des équations différentielles*, n° 5, in DARBOUX, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. IV, pages 361, 362.

(2) x_1 est ici une fonction de y_1 donnée par l'équation de la courbe.

Or nous pouvons nous arranger de manière que la quantité

$$(17) \qquad \int_{y_1}^{y_0} \psi(y) u(o, y, x_1, y_1) dy$$

soit une fonction donnée quelconque F de y_1 [pourvu que $F(y_0)$ soit nul]. En effet, nous savons qu'il existe *au moins* une solution v de l'équation adjointe qui s'annule sur A'C et prend en chaque point $M(x_1, y_1)$ de l'arc AC la valeur $F(y_1)$. Pour cette fonction v, considérée dans le rectangle à côtés parallèles aux axes qui a pour sommets opposés A', M, la formule (16) du Livre IV, Ch. IV (t. II, p. 80) des *Leçons* de M. Darboux devient évidemment

$$F(y_1) = -\int_{y_1}^{y_0} u(o, y, x_1, y_1)\left(\frac{\partial v}{\partial y} - a v\right) dy,$$

ce qui montre que l'intégrale (17) est égale à $F(y_1)$ lorsqu'on prend

$$\psi(y) = -\left(\frac{\partial v}{\partial y} - a v\right).$$

Dès lors l'équation (16) n'est possible (puisque F est arbitraire) que pour $\varphi_1 = 0$. La formule (15) donne bien alors

$$z = 0.$$

Notre conclusion est donc démontrée. Le raisonnement précédent montre même que, *une fois connue, la solution du problème pour la courbe* AC, *la droite* A'C *et l'équation adjointe, on peut en déduire la solution du même problème pour la courbe* AC, *la droite* AA' *et l'équation proposée.* Car il résulte de ce nous avons dit tout à l'heure que ce problème se réduit à déterminer la fonction φ_1 par la condition que l'intégrale

$$\int_0^y u(o, y, x_1, y_1) \varphi_1 \, dy_1$$

soit une fonction donnée de y. Or, si nous savons résoudre le problème pour la courbe AC, la droite A'C et l'équation adjointe, nous pourrons (ainsi que nous venons de le voir également) calculer, à l'aide de cette condition, l'intégrale

$$\int_0^{y_0} \varphi_1 F(y_1)\, dy_1,$$

quelle que soit la fonction F, pourvu qu'elle soit nulle en C. Il suffira alors, pour déterminer φ_1 en un point quelconque (x'_1, y'_1) de l'arc AC, de remplacer F par $\mu F e^{-\mu^2(y_1-y'_1)^2}$ et de passer à la limite pour $\mu = \infty$. On aura ainsi la valeur de $\sqrt{\pi}F(y'_1)\varphi_1(y'_1)$.

10. Nous avons dit que la solution du problème ainsi posé devait dépendre de la forme des domaines où on l'étudie. C'est ce que l'on vérifie aisément, pour le cas de deux variables indépendantes, en considérant les équations les plus simples, par exemple les équations pour lesquelles la suite de Laplace se termine dans les deux sens et dont l'intégrale générale est, par conséquent, de la forme

$$z = AX + A_1X' + \ldots + A_iX^{(i)} + B_1Y + B_1Y' + \ldots + B_jY^{(j)}$$

X et Y étant des fonctions arbitraires, l'une de x, l'autre de y, tandis que les A et les B sont des fonctions déterminées de x et de y.

Supposons z donné ainsi que ses dérivées sur l'arc AB (*fig.* 3). Alors X et Y seront connus [1] pour les valeurs des arguments qui correspondent à des points de cet arc, et, par conséquent, Y sera également connu sur l'arc AC. Dès lors, si l'on donne les valeurs de z sur cet arc, X sera terminé par une équation linéaire de la forme

$$AX + A_1X' + \ldots + A_iX^{(i)} = f(x),$$

mais pour l'intégration de cette équation, *il faut imaginer que, dans chacun des coefficients* $A(x, y)$, $A_1(x, y)$, *etc., on ait remplacé* y *par sa valeur en fonction de* x, *tirée de l'équation de* AC. Il est, dès lors, bien clair que l'équation différentielle obtenue dépend essentiellement de la forme de celle-ci.

11. Relativement à ce nouveau problème, l'*intégrale rési-*

---

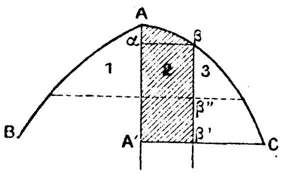
(1) Ils le sont, du moins, à des quantités près qui ne changent pas la valeur des intégrales et qui, par suite, ne peuvent modifier la suite du raisonnement.

duelle devra, pour maintenir l'analogie avec la question rappelée au n° 8, être définie de la façon suivante :

z et ses dérivées seront nuls sur l'arc AB. Les valeurs de z seront ensuite données différentes de zéro sur une partie Aβ de l'arc AC, puis nulles sur l'arc βC.

Les parallèles AA′, $\beta\beta'$ menées par A, β à l'axe des y détermineront trois régions : la région 1 (*fig.* 4), comprise entre AB

Fig. 4.



et AA′ et où z sera manifestement nul; la région 2, comprise entre Aβ, AA′ et $\beta\beta'$; enfin la région 3, comprise entre $\beta\beta'$ et βC. C'est l'intégrale considérée dans cette dernière région qui est l'intégrale résiduelle.

Soit α la projection de β sur AA′. Nous pourrons remplacer l'arc Aβ par le segment $\alpha\beta$: l'intégrale z sera définie comme étant nulle sur αA′, prenant sur $\alpha\beta$ des valeurs quelconques (sous la seule restriction d'être nulle ainsi que sa dérivée en α et d'être nulle en β, de manière que sa dérivée, suivant la direction βC, soit également nulle) et étant nulle sur βC.

Sur $\beta\beta'$, d'après une formule rappelée tout à l'heure [Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, Liv. IV, Chap. IV, n° 359, formule (16)], les valeurs de l'intégrale seront données par l'expression

$$z(\xi, y) = \int_0^\xi u(\xi, y, x_1, \eta)\left(\frac{\partial z_1}{\partial x} + b_1 z_1\right) dx_1, \tag{18}$$

où ξ, η sont les coordonnées du point β, les notations z_1, b_1 désignant respectivement les quantités $z(x_1, \eta)$ et $b(x_1, \eta)$.

12. Cherchons à quelles conditions l'intégrale résiduelle sera du type (3). D'après ce qui a été dit au n° 10, nous supposerons que l'arc βC et la droite $\beta\beta'$ aient des positions *déterminées*.

Il est, dès lors, manifestement nécessaire et suffisant que, sur

$\beta\beta'$, les valeurs de z soient de la forme

$$C_1 V_1(\xi, y) + C_2 V_2(\xi, y) + \ldots + C_p V_p(\xi, y),$$

et, par conséquent, qu'elles vérifient une certaine équation linéaire

$$(19) \quad F(z) = a_0(\xi, y) \frac{\partial^p z}{\partial y^p} + a_1(\xi, y) \frac{\partial^{p-1} z}{\partial y^{p-1}} + \ldots + a_p(\xi, y) z = 0.$$

Or on a, d'après la formule (18),

$$F(z) = \int_0^\xi \Phi \left(\frac{\partial z_1}{\partial x_1} + b_1 z_1 \right) dx_1,$$

en posant, comme précédemment, $\Phi = F(u)$.

Pour que $F(z)$ soit nul, quelles que soient les valeurs de z_1 [pourvu que z_1 s'annule en α et en β dans les conditions indiquées (¹)], il faut et il suffit que l'on ait

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1} - b_1 \Phi = 0,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$F\left(\frac{\partial u}{\partial x_1} - b_1 u \right) = 0.$$

Cette condition est évidemment réalisée lorsque $u(x, y, x_1, y_1)$ est de la forme $A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots + A_p X_p$ (où $A_1, A_2, \ldots A_p$ sont des fonctions déterminées de x, y, et X_1, X_2, ..., X_p des fonctions de x, x_1, y_1); par conséquent, elle est vérifiée par les équations pour lesquelles la suite de Laplace se termine dans un

---

(¹) La condition qui exprime que la dérivée de z_1 suivant la ligne βC est nulle est de la forme $\frac{\partial z_1}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial z_1}{\partial y_1} = 0$, où λ est le coefficient angulaire de la tangente à cette ligne, et où $\frac{\partial z_1}{\partial y_1}$ doit être remplacé, ainsi qu'on le sait, par

$$- e^{-\int_0^\xi b_1 \, dx_1} \int_0^\xi \left(a \frac{\partial z_1}{\partial x_1} + c z_1 \right) e^{-\int_0^{x_1} b_1 \, dx_1} \, dx_1.$$

Les principes du calcul des variations montrent que cette condition n'a pas d'influence sur la conclusion finale.

seul sens, alors que, pour ces équations, l'intégrale résiduelle relative au problème précédemment étudié ne satisfaisait qu'à *une seule* équation linéaire distincte de (1).

13. Mais il y a plus : dans la question actuelle, *l'intégrale résiduelle peut être identiquement nulle :* c'est ce qui arrive toutes les fois que l'invariant $\frac{\partial a}{\partial x}+ab-c$ est nul. Car alors, l'intégrale générale étant de la forme

$$z = \mathrm{M}\left(\mathrm{X}+\int \alpha \mathrm{Y}\, dy\right)$$

(X et Y étant les fonctions arbitraires), la fonction Y doit être nulle pour toutes les valeurs considérées de y [puisque z est identiquement nul dans la région (1)], et la fonction X, nulle pour toutes les valeurs de x supérieures à ξ (puisque z est nul sur l'arc βC).

La propagation des ondes planes infiniment petites dans un gaz primitivement au repos, sous l'action d'un piston dont le mouvement est donné, dépend de la question que nous étudions en ce moment pour l'équation $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}=0$. Le fait qu'il n'y a pas, pour un tel gaz, de mouvement résiduel après le passage de l'onde est donc d'accord avec notre conclusion actuelle.

14. Les équations pour lesquelles $\frac{\partial a}{\partial x}+ab-c$ est nul sont d'ailleurs les seules pour lesquelles cette conclusion subsiste, quelles que soient les lignes $\beta\beta'$ et βC; elles sont même les seules pour lesquelles elle subsiste, quel que soit le point β, la ligne AC étant donnée une fois pour toutes.

En effet, il résulte de ce qui a été dit au n° **12** que, si l'on veut que l'intégrale résiduelle relative à la courbe donnée βC et à la droite donnée $\beta\beta'$ soit toujours nulle, il faut que l'on ait, pour $y_1=\eta$,

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}-b_1 u=0.$$

Or, si nous posons

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}-b_1 u=v(x,y,x_1,y_1),$$

on voit aisément, à l'aide de la définition de u, que l'on a (β'' étant un point quelconque de $\beta\beta'$, point dont l'ordonnée est y)

$$(20) \qquad v(\beta'', \beta) = e^{\int_{\beta''}^{\beta} a\,dy} \int_{\beta''}^{\beta} \left(\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c\right) dy.$$

On devra donc avoir, dans les hypothèses actuelles et quel que soit le point β'',

$$\int_{\beta''}^{\beta} \left(\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c\right) dy = 0,$$

ce qui exige que $\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c$ soit nul, quel que soit y, pour $x = \xi$.

Si donc le fait doit avoir lieu, quel que soit ξ, l'invariant $\frac{\partial a}{\partial x} + ab - c$ doit être identiquement nul, comme nous l'avions annoncé.

15. Ainsi l'intégrale résiduelle des équations linéaires à deux variables indépendantes est beaucoup plus particulière dans le problème qui fait l'objet des nos 9 et suivants que dans celui que nous avions traité aux nos 2 à 7. Il est remarquable que ce soit précisément l'inverse qui se produit dans le problème des ondes sphériques, puisque l'intégrale résiduelle de ce problème est nulle dans le cas où l'on se donne u et ses dérivées pour $t = 0$, quels que soient x, y, z, et différente de zéro, si les données sont celles du n° 8.

Lorsque la sphère de rayon R, à l'extérieur de laquelle on considère le mouvement, pulse uniformément en tous ses points, de sorte qu'elle reste sphérique et que son rayon seul varie, l'intégrale résiduelle est déterminée à un facteur constant près [1], et vérifie, par conséquent, des équations linéaires distinctes de l'équation (14).

Il ne semble pas en être de même si les différents points de la surface sphérique ont des mouvements normaux différents. On peut, en effet, dans ce cas, former l'intégrale générale et l'intégrale résiduelle par le procédé suivant :

---

[1] *Voir* Duhem, *loc. cit.*

Une intégrale u de l'équation (14) peut évidemment, en dehors de la sphère qui a l'origine pour centre et R pour rayon, être développée en série de la forme

$$(21) \qquad u = \sum P_p u_p,$$

où P_p est un polynome sphérique de degré p, et u_p une fonction de r et de t. L'équation qui détermine u_p est alors

$$(22) \qquad \frac{\partial^2 u_p}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{(p+1)\partial u_p}{\partial r} = \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u_p}{\partial t^2},$$

autrement dit celle qui détermine les solutions de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \sum_{i=1}^{2p+3} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},$$

qui sont fonctions des seules variables t et $r = \sqrt{\Sigma x_i^2}$.

L'intégrale générale de cette équation (22) est connue : elle peut se mettre sous la forme

$$(23) \qquad u_p = D^p \left[\frac{f(r-at) + \varphi(r+at)}{2}\right],$$

où D désigne l'opération $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}$;

Ou encore [1] (à un facteur numérique près)

$$u_{p-1} = \sum_{h=1}^{p} (-2)^{h-1} \frac{(2p-h-1)!}{(p-h)!\,(h-1)!} \frac{f^{(h-1)}(r-at) + \varphi^{(h-1)}(r+at)}{r^{2p-h}}$$

(les symboles $f^{(h-1)}$ et $\varphi^{(h-1)}$ représentent les dérivées successives de f, φ).

L'hypothèse que u et, par suite, u_{p-1} sont identiquement nuls pour $t \leqq 1$, $r \geqq R$ montre que chacune des fonctions φ peut être prise nulle. Si maintenant on demande que $\frac{\partial u_{p-1}}{\partial r}$ [lequel, en

(1) VOLTERRA, *Rendic. Acc. Lincei : loc. cit.*, p. 167.

vertu de la formule (23), est de même forme générale que ru_p] soit égal à zéro pour $r = R$, $t \geqq \theta$, on voit que la fonction f devra être (lorsque son argument est inférieur à $R - a\theta$) une solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants, autrement dit, une somme de termes exponentiels de la forme $Ae^{s(r-at)}$, les s étant racines de l'équation

$$\sum_{h=1}^{p+1} (-2)^{h-1} \frac{(2p-h+1)!}{(p+1-h)!\,(h-1)!} (Rs)^h = 0.$$

Les racines de ces équations ne paraissent offrir aucune propriété simple, et une somme d'exponentielles de l'espèce précédente, divisées par des puissances de r, ne paraît vérifier aucune équation linéaire distincte de l'équation (14).