BULLETIN DE LA S. M. F.

R. BRICARD

Sur les propriétés métriques d'une certaine correspondance $(1, 1)$ entre cubiques focales

Bulletin de la S. M. F., tome 28 (1900), p. 39-51
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__39_0>

SUR LES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES D'UNE CERTAINE CORRESPONDANCE (1,1) ENTRE CUBIQUES FOCALES;

Par M. R. Bricard.

I.

On sait qu'étant données deux cubiques planes, sans points doubles, la condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse établir entre ces courbes une correspondance (1, 1) est qu'elles possèdent même invariant absolu.

Quand il en est ainsi, les coordonnées de leurs points peuvent s'exprimer au moyen de fonctions elliptiques construites sur les mêmes périodes, et il existe *deux* infinités simples de transformation birationnelles changeant l'une des cubiques en l'autre, les arguments de deux points correspondants satisfaisant à l'une des relations

$$u = v + k, \qquad u + v = k',$$

où k et k' désignent des constantes arbitraires.

Nous dirons que les correspondances ainsi définies sont respectivement de *première espèce* et de *deuxième espèce*. Une correspondance d'espèce quelconque est définie par la donnée d'un couple de points homologues.

(Quand les fonctions elliptiques introduites admettent certaines multiplications complexes, on sait qu'il existe encore entre les deux courbes des correspondances (1, 1) ne dépendant d'aucun paramètre arbitraire, et que l'on peut combiner avec les précédentes. Nous laisserons de côté ce cas exceptionnel) [1].

Ces propriétés classiques étant rappelées, considérons deux cubiques C et C_1, ayant même invariant absolu, entre lesquelles nous établirons une correspondance (1, 1) en nous donnant un couple de points homologues, a et a_1, situés respectivement sur C et C_1. Soient ab, ac, ad, ae, les quatre tangentes que l'on peut mener à C par le point a, outre la tangente en a, et b, c, d, e,

---

[1] *Voir* Appell et Goursat, *Traité des fonctions algébriques*, p. 474-476.

leurs points de contact. Soient de même $a_1 b_1$, $a_1 c_1$, etc., les éléments analogues relatifs à C_1. Par hypothèse, les deux faisceaux $a(bcde)$, $a_1(b_1 c_1 d_1 e_1)$ ont même rapport anharmonique.

Opérons sur chacune des cubiques une transformation homographique (différente pour les deux), telle que les points d, e, ainsi que les points d_1, e_1, aillent se confondre avec les points cycliques. Nos deux cubiques deviennent ainsi des cubiques *focales*, c'est-à-dire des cubiques contenant leur foyer singulier. Ces deux cubiques focales ayant même invariant absolu, l'angle des deux tangentes non isotropes que l'on peut mener à l'une par son foyer singulier (*angle focal*) et l'angle analogue relatif à l'autre cubique sont égaux. Enfin, de la correspondance (1, 1) établie entre C et C_1 dérive entre les deux cubiques focales une correspondance (1, 1) telle que les foyers singuliers des deux courbes soient des points homologues.

C'est l'étude de cette correspondance particulière que nous nous proposons d'approfondir. Plusieurs des résultats que nous obtiendrons peuvent s'étendre, par homographie, aux correspondances (1, 1) les plus générales. Mais les plus intéressants ont un caractère métrique et s'énonceraient difficilement en langage projectif.

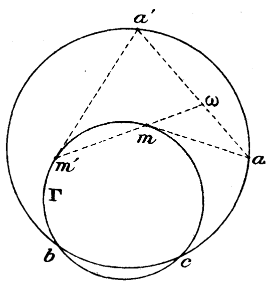
II.

Considérons donc deux cubiques focales C et C′ ayant le même angle focal. En transformant par similitude la cubique C′, nous pouvons évidemment faire en sorte que les points de contact des tangentes non isotropes, menées à cette cubique par son foyer non singulier, viennent se confondre avec les points analogues relatifs à la cubique C : nous supposerons que les deux courbes sont dans cette situation relative. Soient a et a' leurs foyers singuliers, b et c les points de contact des tangentes non isotropes menées par a à C, ou par a' à C′. Les angles bac et $ba'c$ étant égaux, les quatre points a, a', b, c sont sur un cercle.

C *est le lieu des points de contact des tangentes menées du point a aux cercles qui passent par les points b et c.* Rappelons en deux mots la démonstration de cette propriété connue : on voit immédiatement que le lieu en question est une cubique qui passe au point a, aux points b et c et aux points cycliques, les tangentes en ces quatre derniers points passant par le point a. Cette cubique se confond donc nécessairement avec C. C′ peut être définie d'une façon analogue.

Soient alors (*fig.* 1) Γ un cercle quelconque passant aux points b

Fig. 1.



et c, m et m' les points de contact de deux tangentes à Γ menées respectivement par les points a et a'.

Les points m et m' appartiennent respectivement aux cubiques C et C′. Je dis que si l'on fait varier le cercle Γ, *la droite* mm' *passe par un point fixe*. Considérons, en effet, les deux cercles (am) et $(a'm')$ ayant respectivement pour centres a et a', et pour rayons am et am'. Ces deux cercles sont coupés orthogonalement aux points m et m' par le cercle Γ. Les points m et m' sont donc antihomologues sur les cercles (am) et $(a'm')$, et la droite mm' passe par l'un des centres de similitude ω de ces deux cercles. Or le point ω divise le segment aa' dans un rapport égal à $\frac{am}{a'm'}$, et, d'après une propriété bien connue des cercles passant par deux points fixes, *ce rapport est constant quand on fait varier le cercle* Γ. Le point ω est donc fixe, comme nous l'avions annoncé. On peut remarquer que c'est le point de contact avec aa' de l'un des deux cercles Γ qui sont tangents à cette droite.

Il est clair d'après cela que les points m et m' sont en correspondance (1, 1). Si l'on amène le cercle Γ à se confondre avec le cercle $(aa'bc)$, on voit que les points a et a' sont homologues.

Nous obtenons une correspondance analogue en remplaçant le point ω par ω', point de contact de l'autre cercle Γ tangent à la droite aa'. Les points a et a' sont encore homologues. Nous avons donc obtenu, nécessairement, les deux correspondances

(1, 1), respectivement de première espèce et de deuxième espèce, entre les cubiques C et C′, et telles que les points a et a' soient homologues.

Il n'y a évidemment pas lieu de chercher à distinguer l'espèce de chacune de ces correspondances, tant qu'on ne précise pas la représentation des points des cubiques au moyen des fonctions elliptiques : on peut, en effet, changer le signe de l'argument correspondant à un point de l'une des deux courbes. Une correspondance de première espèce devient ainsi de seconde espèce, et inversement.

Nous avons déjà remarqué que le rapport $\frac{am}{a'm'}$ est constant. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Étant données deux cubiques focales ayant le même angle focal, si l'on établit entre ces deux courbes l'une des deux correspondances (1, 1) *telles que les foyers singuliers a et a' soient homologues, on a, en désignant par m et m' deux points homologues quelconques, la relation*

$$\frac{am}{a'm'} = \text{const.}$$

III.

Nous allons établir une autre propriété métrique remarquable de la même correspondance.

Rappelons d'abord que, étant donnée une cubique quelconque, on appelle *couple steinérien* un couple de points appartenant à cette courbe, tels que les tangentes en ces points aillent de nouveau rencontrer la cubique au même point. Les arguments elliptiques des deux points d'un couple steinérien diffèrent d'une demi-période, et, comme il y a *trois* demi-périodes ω_1, ω_2 et ω_3, on peut distinguer sur une cubique *trois familles de couples steinériens*.

Sur une cubique focale, les points cycliques forment un couple steinérien. Nous ne considérerons que les couples steinériens appartenant à la même famille que les points cycliques.

Cela posé, nous énoncerons le théorème suivant, en conservant les désignations du paragraphe précédent :

Soient m et μ deux points fixes constituant un couple steinérien sur la cubique C, m' et μ' *leurs homologues sur la cubique* C', *et enfin p et p' deux points homologues quelconques sur les deux cubiques. On a la relation*

$$\frac{pm}{p\mu} = \frac{p'm'}{p'\mu'}.$$

Pour établir cette propriété, nous emploierons la considération des points *associés,* due à M. Darboux ([1]) : si m et μ sont deux points quelconques, on appelle *points associés* des précédents les deux points n et ν, centres des cercles de rayon nul passant par les points m et μ. La propriété fondamentale des points associés est la suivante : p étant un point quelconque du plan, on a l'égalité

$$\frac{pm}{p\mu} = e^{i\widehat{np\nu}}.$$

L'énoncé de la proposition à démontrer peut donc être transformé ainsi qu'il suit :

Soient n et ν les deux points associés à m, μ, *et* n', ν' *les deux points associés à* m', μ'. *On a*

$$\widehat{np\nu} = \widehat{n'p'\nu'}.$$

Supposons, pour fixer les idées, que la correspondance (1, 1) établie entre les deux cubiques soit de première espèce. Une démonstration toute pareille à celle que nous allons donner s'appliquera au cas de la correspondance de seconde espèce.

Nous supposerons aussi les fonctions elliptiques, introduites pour la représentation paramétrique des deux cubiques, telles que la collinéation de trois points de l'une d'elles s'exprime en égalant à *zéro* la somme de leurs arguments (il en est ainsi, par exemple, lorsqu'on exprime les coordonnées d'un point en fonctions rationnelles de pu et $p'u$ par la méthode classique). Enfin, nous désignerons l'argument d'un point par la lettre même qui sert à désigner ce point.

([1]) Darboux, *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques,* p. 61 et suiv.

On a ainsi, k désignant une constante :

$$a' = a + k, \qquad p' = p + k,$$
$$m' = m + k, \qquad \mu' = \mu + k,$$

et aussi les égalités exprimant que (m, μ) et (m', μ') forment deux couples steinériens, respectivement sur C et C' :

$$\mu = m + \omega_1, \qquad \mu' = m' + \omega_1.$$

Les arguments des points cycliques sur la cubique C s'obtiennent immédiatement si l'on écrit que les tangentes en ces points passent au point a et qu'ils constituent un couple steinérien de la même famille que (m, μ). On trouve ainsi les valeurs

$$-\frac{a}{2}, \qquad -\frac{a}{2} + \omega_1.$$

(On pourrait prendre aussi $-\frac{a}{2} + \omega_2$ et $-\frac{a}{2} + \omega_3$; cela ne changerait rien au raisonnement.)

De même, sur la cubique C', les points cycliques ont pour arguments respectifs

$$-\frac{a}{2} - \frac{k}{2}, \qquad -\frac{a}{2} - \frac{k}{2} + \omega_1.$$

Joignons le point m au point cyclique $\left(-\frac{a}{2}\right)$, et le point μ au point cyclique $\left(-\frac{a}{2} + \omega_1\right)$. Ces deux droites rencontrent C en un même point ayant pour argument

$$n = \frac{a}{2} - m \equiv \frac{a}{2} - \omega_1 - (m + \omega_1), \qquad (\text{mod } 2\omega_1).$$

De même, les deux droites $\left(m, -\frac{a}{2} + \omega_1\right)$ et $\left(\mu, -\frac{a}{2}\right)$ se coupent sur C, au point d'argument

$$\nu = \frac{a}{2} - m + \omega_1.$$

Ainsi, les points n et ν, associés des points m et μ, appartiennent à C et y constituent un couple steinérien. On a un fait analogue pour les points n' et ν', dont les arguments sur C' sont

$$n' = \frac{a}{2} - \frac{k}{2} - m, \qquad \nu' = \frac{a}{2} - \frac{k}{2} - m + \omega_1,$$

En résumé, si l'on appelle r et ρ les arguments des points cycliques sur C, r' et ρ' leurs arguments sur C', on a les égalités

$$r' = r - \frac{k}{2}, \qquad \rho' = r - \frac{k}{2},$$

$$n' = n - \frac{k}{2}, \qquad \nu' = \nu - \frac{k}{2}.$$

Or, si l'on considère deux points u et u' décrivant respectivement les cubiques C et C', leurs arguments étant reliés par la relation

$$u' = u - \frac{k}{2},$$

les droites pu et $p'u'$ *engendrent deux faisceaux homographiques.*

En effet, donnons-nous la droite pu, elle rencontre C aux deux points u et

$$u_1 = -p - u.$$

A ces points correspondent sur la cubique C' les deux points

$$u' = u - \frac{k}{2}, \qquad u'_1 = -p - u - \frac{k}{2},$$

qui sont en ligne droite avec le point p', en vertu de la relation

$$\left(u - \frac{k}{2}\right) + \left(-p - u - \frac{k}{2}\right) + (p + k) = 0.$$

Ainsi, à une droite pu ne correspond qu'une droite $p'u'$, et réciproquement, ce qui établit l'homographie des faisceaux engendrés par ces deux droites.

En appliquant cette remarque, on voit que

$$p(n\nu r\rho) = p'(n'\nu' r'\rho'),$$

ou bien

$$\widehat{np\nu} = \widehat{n'p'\nu'}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

IV.

Nous passons maintenant à l'étude d'une liaison remarquable qui existe entre la théorie des cubiques focales et celle du quadrilatère articulé.

Soient encore C et C' deux cubiques focales ayant même angle focal, mais non semblables; m, μ et p, ϖ, deux couples steinériens sur la cubique C; m', p' et p', ϖ', les points homologues des précédents dans l'une des correspondances (1, 1) établies entre les deux courbes et telles que les foyers singuliers soient homologues.

D'après ce que nous avons démontré, on a

$$\frac{mp}{m'p'} = \frac{m\varpi}{m'\varpi'} = \frac{\mu p}{\mu' p'} = \frac{\mu\varpi}{\mu'\varpi'}.$$

Les deux quadrilatères $mp\mu\varpi$ et $m'p'\mu'\varpi'$ ont donc leurs côtés proportionnels, mais ils ne sont pas semblables, sans quoi les deux cubiques C et C_1 le seraient aussi (1).

Si donc on fait varier la forme de la cubique C', en lui conservant toujours le même angle focal, *le quadrilatère $m'p'\mu'\varpi'$ prendra toutes les formes possibles d'un quadrilatère dont les quatre côtés sont assujettis seulement à conserver un rapport constant.*

On peut donc énoncer la réciproque suivante :

Si deux quadrilatères ont leurs côtés proportionnels, les deux cubiques focales, lieux des foyers des coniques inscrites dans chacun de ces quadrilatères, ont même angle focal, c'est-à-dire même invariant absolu.

En particulier, on peut supposer que les quadrilatères ont leurs côtés égaux, et l'on a une propriété remarquable du quadrilatère articulé.

On voit donc que les propriétés des cubiques focales se relient intimement à celles du quadrilatère articulé, ainsi que nous le disions plus haut.

C'est un fait que nous allons préciser davantage dans le paragraphe suivant.

V.

Considérons toujours la représentation paramétrique de la cu-

---

(1) En effet, le quadrilatère $mp\mu\varpi$ définit sans ambiguïté la cubique C, qui est, comme l'on sait, le lieu des foyers des coniques inscrites à ce quadrilatère.

bique C au moyen des fonctions elliptiques (il est inutile d'écrire des formules explicites).

Proposons-nous d'abord d'exprimer la distance d'un point m quelconque de cette courbe au foyer singulier a.

Le carré de cette distance, $\overline{am}^2$, est une fonction elliptique de l'argument m. Déterminons l'ordre de cette fonction elliptique : à cet effet, cherchons le nombre des points m de la cubique tels que l'on ait

$$\overline{am}^2 = R^2,$$

R étant une longueur donnée. Cela revient à chercher le nombre des points d'intersection *variables avec* R de la cubique et d'un cercle ayant pour centre a et pour rayon R. Or un tel cercle est tangent à la cubique en chacun des points cycliques et coupe cette courbe en deux autres points. Ainsi la fonction elliptique $\overline{am}^2$ est du second ordre.

Cette fonction a évidemment un zéro double en a, et un pôle double en $a + \omega_1$. On en conclut immédiatement son expression

$$\overline{am}^2 = \frac{A^2}{\wp(m-a) - e_1} = A^2 \sigma_{01}^2(m-a),$$

A désignant une longueur qui dépend de la cubique C.

On peut extraire les racines carrées, ce qui donne

$$am = A\sigma_{01}(m-a). \tag{1}$$

On est ainsi conduit à attribuer un signe à la distance am.

Remarquons en passant que cette formule conduit immédiatement au théorème énoncé à la fin du § II. On a en effet, en conservant les notations de ce paragraphe,

$$a'm' = A'\sigma_{01}(m'-a'),$$

A' étant une nouvelle longueur constante. Mais, par hypothèse,

$$m' - a' = m - a.$$

On a donc bien

$$\frac{a'm'}{am} = \frac{A'}{A} = \text{const.}$$

Prenons maintenant deux points m et n sur la cubique C, *et cherchons à évaluer l'angle man.*

Appelons toujours r et ρ les points cycliques, situés respectivement sur les droites isotropes de coefficients angulaires $+i$ et $-i$, et désignons pour un instant par (pq) le coefficient angulaire d'une droite pq. On a, par la formule de Laguerre,

$$e^{2i\widehat{man}} = a(mnr\rho) = \frac{(an)-(ar)}{(an)-(a\rho)}\,\frac{(am)-(a\rho)}{(am)-(ar)},$$

en explicitant le rapport anharmonique.

Si, les points a et m restant fixes, on fait varier le point n sur la cubique, ce rapport anharmonique, que nous désignerons par t, est une fonction elliptique de l'argument n. Cette fonction est encore du second ordre : en effet, t étant donné, le point n se trouve à l'intersection de la cubique et d'une droite donnée passant par le point a.

Il suffit d'examiner l'expression développée de t pour avoir les zéros et les pôles de cette fonction elliptique : il y a un zéro double, $-\frac{a}{2}$, et un pôle double, $-\frac{a}{2}+\omega_1$. On en conclut immédiatement

$$t = \frac{k_m}{p\left(n+\frac{a}{2}\right)-e_1} = k_m\sigma_{01}^2\left(n+\frac{a}{2}\right),$$

k_m étant fonction de m seulement. Pour obtenir l'expression de k_m, remarquons que t doit se réduire à l'unité pour $n=m$, quel que soit m.

On trouve ainsi

$$t = e^{2i\widehat{man}} = \frac{\sigma_{01}^2\left(n+\frac{a}{2}\right)}{\sigma_{01}^2\left(m+\frac{a}{2}\right)}.$$

Ici encore, on peut extraire les racines carrées, et l'on a finalement

$$e^{i\widehat{man}} = \frac{\sigma_{01}\left(n+\frac{a}{2}\right)}{\sigma_{01}\left(m+\frac{a}{2}\right)},$$

d'où

$$(2)\qquad 2\cos\widehat{man} = \frac{\sigma_{01}\left(n+\frac{a}{2}\right)}{\sigma_{01}\left(m+\frac{a}{2}\right)} + \frac{\sigma_{01}\left(m+\frac{a}{2}\right)}{\sigma_{01}\left(n+\frac{a}{2}\right)}.$$

Des formules (1) et (2), qui sont d'une simplicité remarquable, nous allons déduire le théorème suivant :

Considérons une cubique focale C *qui varie en conservant le même angle focal. Entre cette cubique et une cubique focale fixe* C_0, *ayant aussi le même angle focal, établissons une correspondance* (1, 1) *telle que les foyers singuliers des deux courbes soient homologues. Si* m, n, p *sont trois points de* C, *homologues de trois points fixes de* C_0, *les distances mutuelles de ces points satisfont à une relation*

$$(3)\qquad \alpha\,\overline{mn}^2 + \beta\,\overline{nl}^2 + \gamma\,\overline{lm}^2 = 0,$$

où α, β, γ *sont des constantes.*

Écrivons en effet l'expression de $\overline{mn}^2$:

$$\overline{mn}^2 = \overline{am}^2 + \overline{an}^2 - 2\,am.an\cos\widehat{man},$$

ou, d'après les formules (1) et (2),

$$\overline{mn}^2 = A^2\left\{\sigma_{01}^2(m-a)+\sigma_{01}^2(n-a) - \sigma_{01}(m-a)\sigma_{01}(n-a)\left[\frac{\sigma_{01}\left(n+\frac{a}{2}\right)}{\sigma_{01}\left(m+\frac{a}{2}\right)} + \frac{\sigma_{01}\left(m+\frac{a}{2}\right)}{\sigma_{01}\left(n+\frac{a}{2}\right)}\right]\right\}.$$

(On évite toute difficulté relative aux signes, en remarquant que $\overline{mn}^2$ doit s'annuler pour $n=m$.) On a de même les expressions de $\overline{nl}^2$ et de $\overline{lm}^2$.

Quand la cubique C varie dans les conditions indiquées, les différences

$$l-a=\lambda,\qquad m-a=\mu,\qquad n-a=\nu$$

restent constantes. Remplaçons dans les expressions de $\overline{mn}^2$,

$\overline{nl}^2$, $\overline{lm}^2$, l par $a+\lambda$, etc., et posons

$$\frac{3a}{2}=x.$$

Il vient ainsi

$$\overline{mn}^2 = \mathrm{A}^2\left\{\sigma_{01}^2\mu+\sigma_{01}^2\nu-\sigma_{01}\mu\sigma_{01}\nu\left[\frac{\sigma_{01}(\nu+x)}{\sigma_{01}(\mu+x)}+\frac{\sigma_{01}(\mu+x)}{\sigma_{01}(\nu+x)}\right]\right\},$$

$$\overline{nl}^2 = \mathrm{A}^2\left\{\sigma_{01}^2\nu+\sigma_{01}^2\lambda-\sigma_{01}\nu\sigma_{01}\lambda\left[\frac{\sigma_{01}(\lambda+x)}{\sigma_{01}(\nu+x)}+\frac{\sigma_{01}(\nu+x)}{\sigma_{01}(\lambda+x)}\right]\right\},$$

$$\overline{lm}^2 = \mathrm{A}^2\left\{\sigma_{01}^2\lambda+\sigma_{01}^2\mu-\sigma_{01}\lambda\sigma_{01}\mu\left[\frac{\sigma_{01}(\mu+x)}{\sigma_{01}(\lambda+x)}+\frac{\sigma_{01}(\lambda+x)}{\sigma_{01}(\mu+x)}\right]\right\}.$$

On voit que $\dfrac{\overline{mn}^2}{\mathrm{A}^2}$, $\dfrac{\overline{nl}^2}{\mathrm{A}^2}$, $\dfrac{\overline{lm}^2}{\mathrm{A}^2}$ sont des fonctions elliptiques de x, aux périodes $2\omega_1$ et $2\omega_2$. Il en est de même de l'expression

$$\varphi(x)=\alpha\frac{\overline{mn}^2}{\mathrm{A}^2}+\beta\frac{\overline{nl}^2}{\mathrm{A}^2}+\gamma\frac{\overline{lm}^2}{\mathrm{A}^2},$$

α, β, γ étant des constantes. Cherchons s'il est possible de choisir les coefficients de telle manière que $\varphi(x)$ se réduise à une constante : Pour cela, il faut et il suffit que $\varphi(x)$ ne puisse devenir infini.

Or $\varphi(x)$ a six pôles de premier ordre, donnés par

$$x=-\lambda,\quad -\mu,\quad -\nu,\quad -\lambda+\omega_1,\quad -\lambda+\omega_2,\quad -\lambda+\omega_3.$$

Égalons à zéro les parties principales de $\varphi(x)$ pour $x=-\lambda$ et pour $x=-\lambda+\omega_1$. On a

$$-\beta\sigma_{01}\nu\sigma_{01}\lambda\sigma_{01}(\nu-\lambda)-\gamma\sigma_{01}\lambda\sigma_{01}\mu\sigma_{01}(\mu-\lambda)=0,$$

et

$$-\frac{\beta\sigma_{01}\nu\sigma_{01}\lambda}{\sigma_{01}(\nu-\lambda+\omega_1)}-\frac{\gamma\sigma_{01}\lambda\sigma_{01}\mu}{\sigma_{01}(\mu-\lambda+\omega_1)}=0,$$

égalité qui se confond avec la précédente, en vertu de la relation connue

$$\sigma_{01}u\sigma_{01}(u+\omega_1)=\sqrt{(e_2-e_1)(e_3-e_1)}.$$

On écrira de même deux égalités analogues, exprimant que les parties principales de $\varphi(x)$ en ses autres pôles sont nulles aussi. Les trois conditions obtenues se réduisent à deux, et l'on a finalement le résultat suivant :

Si l'on donne à α, β, γ les valeurs

$$\alpha = \frac{\sigma_{01}\lambda}{\sigma_{01}(\mu-\nu)}, \qquad \beta = \frac{\sigma_{01}\mu}{\sigma_{01}(\nu-\lambda)}, \qquad \gamma = \frac{\sigma_{01}\nu}{\sigma_{01}(\lambda-\mu)},$$

la fonction $\varphi(x)$ se réduit à une constante, qui est nulle, comme on le voit en faisant $x = 0$.

La relation (3) est donc démontrée.

On peut retrouver, au moyen de cette relation, un système articulé, découvert par M. Hart, et dont l'étude a été approfondie par MM. Kempe et Darboux ([1]).

Supposons que la cubique C varie en conservant le même angle focal, son paramètre de grandeur étant tel à chaque instant que les côtés du quadrilatère $mp\mu\varpi$ (notations du § IV) aient des longueurs constantes.

Soit s un quatrième point de la cubique C, homologue d'un point fixe s_0 de la cubique C_0. On a, d'après ce qui précède, la relation à coefficients constants

$$\alpha \overline{sm}^2 + \beta \overline{sp}^2 + \gamma \overline{mp}^2 = 0,$$

ou

$$\alpha \overline{sm}^2 + \beta \overline{sp}^2 = \text{const.},$$

ce qui montre (théorème de Stewart) que le point s reste à distance invariable d'un certain point du côté mp, fixe sur ce côté.

La même chose peut se répéter des autres côtés du quadrilatère $mp\mu\varpi$. Ainsi :

Étant donné un quadrilatère $mp\mu\varpi$, et s étant un point de la cubique, lieu du foyer des coniques inscrites à ce quadrilatère, on peut relier ce point par des tiges de longueurs invariables à des points convenablement choisis sur les côtés du quadrilatère, et fixes sur ces côtés; on forme ainsi un système déformable.

C'est là le système étudié par les géomètres cités plus haut, qui d'ailleurs l'ont généralisé comme on peut le voir en se reportant aux Mémoires de M. Darboux.

([1]) *Voir* le Mémoire de M. Darboux dans le t. III, 2e série, du *Bulletin des Sciences mathématiques*.