

# BULLETIN DE LA S. M. F.

G. A. MILLER

## Sur plusieurs groupes simples

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 28 (1900), p. 266-267

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1900\\_\\_28\\_\\_266\\_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__266_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1900, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

SUR PLUSIEURS GROUPES SIMPLES;

Par M. G.-A. MILLER.

Mathieu a établi l'existence d'une fonction cinq fois transitive de 24 éléments ayant  $19! : 48$  valeurs <sup>(1)</sup>. L'objet de cette Note est de prouver que *le groupe ( $G^{24}$ ) de cette fonction et chacun de ses sous-groupes maxima de degrés 21, 22, 23 ( $G^{21}$ ,  $G^{22}$ ,  $G^{23}$ ) sont des groupes simples.*

Le groupe  $G^{24}$  contient un sous-groupe intransitif d'ordre 48, les systèmes d'intransitivité étant 16 et 3; ce sous-groupe est composé de 32 substitutions de degré 18 et d'ordre 3, 15 substitutions de degré 16 et d'ordre 2 et de la substitution identique <sup>(2)</sup>. Puisque ce groupe d'ordre 48 ne peut contenir plus de deux substitutions qui transforment en lui-même un sous-groupe d'ordre 5 et de degré 20, un sous-groupe maximum  $G^{20}$ , de degré 20, contenu dans  $G^{24}$  devra renfermer précisément 96 sous-groupes d'ordre 5 et 160 sous-groupes d'ordre 3. Il suit de là qu'aucun sous-groupe de  $G^{20}$  ne peut posséder toutes ses substitutions d'ordre 3 ou toutes ses substitutions d'ordre 5. Par conséquent  $G^{20}$  ne peut avoir d'autre sous-groupe invariant que la substitution identique et, peut-être, un sous-groupe d'ordre 16. Il existe effectivement un sous-groupe invariant d'ordre 16 et le groupe  $G^{20}$  est, par rapport à ce sous-groupe, isomorphe au groupe de l'icosaèdre; mais nous n'utiliserons pas ce fait dans notre démonstration.

Passons à la considération des sous-groupes de degré supérieur contenus dans  $G^{24}$ . Supposons que  $G^{24}$  contienne un sous-groupe invariant  $K$  ne se réduisant pas à la substitution identique. Puisque  $G^{24}$  est primitif,  $K$  doit être transitif; il doit donc contenir tous les sous-groupes d'ordre 7 de  $G^{24}$ . Le plus grand sous-groupe de  $G^{24}$  qui appartient à  $G^{20}$  est d'ailleurs un sous-groupe invariant de  $G^{20}$ ; nous concluons de là que  $K$  est d'ordre 21 ou d'ordre 16. 21.

---

<sup>(1)</sup> *Journal de Liouville*, t. 18, p. 25; 1873. Mathieu déclare avoir trouvé cette fonction antérieurement; *Ibid.*, t. 6, p. 241; 1861. Cf aussi JORDAN, *Comptes rendus*, t. LXXIX, p. 1150.

<sup>(2)</sup> *Journal de Liouville*, t. 18, p. 39; 1873.

Mais aucun de ces ordres n'est admissible, puisque  $G^{2^4}$  ne peut contenir plus de 6.6.7 substitutions qui transforment l'un de ses sous-groupes d'ordre 7 en lui-même (le nombre effectif de ces substitutions est 21), ce qui exige qu'il renferme plus de 16.21 substitutions d'ordre 7. Il en résulte donc que  $G^{2^4}$  est simple.

Il est intéressant de faire observer que  $G^{2^4}$  est un groupe simple du même ordre que le groupe alterné de degré 8. Ces deux groupes ne peuvent être isomorphes, car  $G^{2^4}$  renferme un sous-groupe d'ordre 960, et le groupe alterné de degré 8 ne possède aucun sous-groupe de cet ordre <sup>(1)</sup>.

Supposons maintenant  $G^{2^2}$  composé, il contiendra un sous-groupe invariant régulier, puisque  $G^{2^4}$  est simple et transitif. Ce sous-groupe régulier devra renfermer toutes les substitutions d'ordre 11 appartenant à  $G^{2^2}$ , et, comme ceci est manifestement impossible,  $G^{2^2}$  est simple. Il est maintenant évident qu'il en sera de même de  $G^{2^3}$  <sup>(2)</sup>.

Passons à l'examen de  $G^{2^4}$ . S'il est composé, il renfermera un sous-groupe invariant régulier; mais ceci est impossible, puisque chaque groupe d'ordre 24 contient au moins un sous-groupe caractéristique, la substitution identique <sup>(3)</sup>. Le groupe  $G^{2^4}$  est donc simple.

Je ferai remarquer, en terminant, que la liste des groupes simples connus donnée par M. Dickson (*Bulletin of the American Mathematical Society*, juillet 1899) ne contient aucun groupe simple de même ordre que les groupes considérés  $G^{2^2}$ ,  $G^{2^3}$ ,  $G^{2^4}$ . Il y a, par conséquent, une erreur dans ma Note : *Sur la fonction cinq fois transitive de 24 éléments et de 19! : 48 valeurs* (*Messenger of Mathematics*, avril 1898). Chacune des substitutions d'ordre 2 et de degré 16 qui y sont données est transformée en elle-même par 16 substitutions de  $G^{2^4}$ , qui ne change aucun de ses systèmes d'intransitivité, et non pas par 2 substitutions comme il est supposé dans le raisonnement, p. 190 de cette Note.

Cornell University, Février 1900.

---

<sup>(1)</sup> *American Journal of Mathematics*, vol. XXI, p. 335; 1899. Cf aussi *Bulletin of the American Mathematical Society*, vol. V, p. 235; 1899.

<sup>(2)</sup> *Proceedings of the London Mathematical Society*, vol. XXI, p. 148; 1899.

<sup>(3)</sup> *Quarterly Journal of Mathematics*, vol. XXVIII, p. 274; 1896.