E. GOURSAT

Sur une transformation de l'équation $s^2 = 4\lambda(x,y)pq$

Bulletin de la S. M. F., tome 28 (1900), p. 1-6

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1900__28__1_0>

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR UNE TRANSFORMATION DE L'ÉQUATION $s^2 = 4\lambda(x, y)pq$;

Par M. E. Goursat.

1. Je me suis déjà occupé, à diverses reprises, de l'équation aux dérivées partielles du second ordre (¹)

$$\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 4\lambda(x, y)\frac{\partial\theta}{\partial x}\frac{\partial\theta}{\partial y}; \tag{1}$$

en posant $\frac{\partial\theta}{\partial x} = z^2$, on ramène l'équation (1) à une équation linéaire

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} - \frac{1}{2}\frac{\partial \log\lambda}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} - \lambda z = 0, \tag{2}$$

et, à toute solution z de l'équation (2) correspond une intégrale de l'équation (1) qui est complètement déterminée, à une con-

(¹) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXV, p. 36-48; 1897.
Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, t. II, p. 252.

stante additive près,

$$\theta = \int z^2\,dx + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 dy. \tag{3}$$

Les invariants h et k de l'équation (2) ont les valeurs suivantes

$$h = \lambda, \qquad k = \lambda - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial x\,\partial y},$$

et ceux de l'équation que l'on en déduit par l'application de la première transformation de Laplace ont les valeurs

$$h_1 = 2h - k - \frac{\partial^2 \log h}{\partial x\,\partial y} = k, \qquad k_1 = h;$$

ils sont précisément les mêmes que ceux de l'équation adjointe. Cela posé, imaginons la suite de Laplace relative à l'équation (2), suite qui est, en général, illimitée dans les deux sens

$$\ldots,\quad (E_{-i}),\quad \ldots,\quad (E_{-1}),\quad (E),\quad (E_1),\quad (E_2),\quad \ldots,\quad (E_i),\quad (E_{i+1}),\quad \ldots;$$

les invariants des deux équations (E) et (E_1), d'après ce que nous venons de voir, sont les mêmes et disposés dans l'ordre inverse. Il résulte de la loi de récurrence qu'il en sera de même des équations (E_{-1}) et (E_2), (E_{-2}) et (E_3), ..., (E_{-i}) et (E_{i+1}). Si donc la suite de Laplace se termine d'un côté, vers la droite, par exemple, à l'équation (E_{i+1}), elle se terminera vers la gauche à l'équation (E_{-i}), et l'on aura une suite de $2i+2$ équations telles que deux équations à égale distance des extrêmes aient les mêmes invariants disposés dans l'ordre inverse. Lorsqu'une équation à invariants égaux $s = \lambda z$ est intégrable par la méthode de Laplace, elle donne naissance à une suite de $2i+1$ équations jouissant de la même propriété; la seule différence entre les deux cas, c'est qu'on a, dans le second cas, un nombre impair d'équations et, dans le premier cas, un nombre pair.

La propriété précédente rapproche les équations linéaires de la forme (2) et, par suite, l'équation (1) des équations à invariants égaux. On est ainsi conduit à se demander s'il ne serait pas possible de trouver, pour les équations (1) et (2), un théorème analogue au beau théorème de M. Moutard sur les équations à invariants égaux [1]. C'est en effet ce qui a lieu, comme on va voir.

2. Posons, pour abréger,

$$\mathfrak{F}(\theta) = \frac{\left(\dfrac{\partial^2 \theta}{\partial x\, \partial y}\right)^2}{4\dfrac{\partial\theta}{\partial x}\dfrac{\partial\theta}{\partial y}};$$

l'équation (1) est alors

$$\mathfrak{F}(\theta) = \lambda(x, y),$$

ou encore, en désignant par θ_1 une intégrale particulière,

$$\mathfrak{F}(\theta) = \mathfrak{F}(\theta_1). \tag{5}$$

A toute fonction θ_1 des deux variables x, y correspond une fonction $\lambda(x, y)$ bien déterminée; si l'on remplace λ par cette fonction dans l'équation (2), on a une équation linéaire que nous appellerons $E(z, \theta_1)$, admettant l'intégrale particulière $z_1 = \sqrt{\dfrac{\partial\theta_1}{\partial x}}$.

Rappelons encore les propriétés suivantes. Étant donnée une équation linéaire

$$s + ap + bq + cz = 0,$$

cette équation peut s'obtenir d'une infinité de manières par l'élimination de u entre les deux équations

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \gamma \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{z_1}\right), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \delta_1 \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{z_1}\right);$$

il suffit de connaître une intégrale particulière z_1 de l'équation proposée et une intégrale particulière v_1 de l'équation adjointe, et l'on a γ et δ_1 par une quadrature [2]

$$\gamma = \int z_1\left(bv_1 - \frac{\partial v_1}{\partial x}\right)dx - v_1(q_1 + az_1)\,dy, \qquad \delta_1 = \gamma + v_1 z_1.$$

---

[1] MOUTARD, *Sur la construction des equations de la forme*

$$\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \lambda(x, y),$$

qui admettent une intégrale générale explicite (*Journal de l'École Polytechnique*, XLV^e Cahier, p. 1; 1878).

Voir aussi le Chapitre VII du Livre IV, dans le Tome II de la *Théorie générale des surfaces*, de M. DARBOUX.

[2] *Voir*, par exemple, le Tome II des *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, p. 277.

Dans le cas où nous nous plaçons, l'équation adjointe de l'équation $E(z, \theta_1)$ a les mêmes invariants que celle qu'on déduit de $E(z, \theta_1)$ par la première transformation de Laplace. On vérifie en effet facilement que l'on passe de l'équation (2) à son adjointe

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial \log\lambda}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \left(\frac{1}{2}\frac{\partial^2 \log\lambda}{\partial x\,\partial y} - \lambda\right) v = 0,$$

en posant $v = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial z_1}{\partial y}$.

Cela posé, à l'intégrale z_1 de l'équation $E(z, \theta_1)$ correspond l'intégrale particulière $v_1 = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial z_1}{\partial y}$ de l'équation adjointe; en prenant pour z_1 et v_1 les valeurs précédentes, on trouve, en tenant compte de l'équation (2) elle-même,

$$\gamma = -\int z_1^2\,dx + \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)^2 dy = -\theta_1, \qquad \delta_1 = -\theta_1 + \frac{z_1}{\lambda}\frac{\partial z_1}{\partial y},$$

et les formules de transformation s'écrivent, en changeant z en $-z$,

$$(6)\qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \theta_1 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{z_1}\right), \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\theta_1 - \frac{z_1}{\lambda}\frac{\partial z_1}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{z_1}\right).$$

Il est aisé de vérifier que l'élimination de u conduit bien à l'équation (2). Des relations $\frac{\partial\theta_1}{\partial x} = z_1^2$, $\left(\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x\,\partial y}\right)^2 = 4\lambda\frac{\partial\theta_1}{\partial x}\frac{\partial\theta_1}{\partial y}$, on tire

$$2 z_1 \frac{\partial z_1}{\partial y} = \frac{\partial^2\theta_1}{\partial x\,\partial y},$$

$$\frac{1}{\lambda} z_1 \frac{\partial z_1}{\partial y} = \frac{2\frac{\partial\theta_1}{\partial x}\frac{\partial\theta_1}{\partial y}}{\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x\,\partial y}},$$

$$\theta_1 - \frac{1}{\lambda} z_1 \frac{\partial z_1}{\partial y} = \theta_1 - \frac{2\frac{\partial\theta_1}{\partial x}\frac{\partial\theta_1}{\partial y}}{\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x\,\partial y}} = -\frac{\theta_1^3 \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{1}{\theta_1}\right)}{\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x\,\partial y}},$$

et les formules qui définissent la transformation peuvent encore s'écrire, en remplaçant u par $\dfrac{\omega}{\sqrt{\dfrac{\partial\left(\frac{1}{\theta_1}\right)}{\partial x}}}$,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\omega}{\sqrt{\dfrac{\partial\left(\frac{1}{\theta_1}\right)}{\partial x}}}\right] = \theta_1\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{z}{\sqrt{\dfrac{\partial\theta_1}{\partial x}}}\right),\\ &\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\omega}{\sqrt{\dfrac{\partial\left(\frac{1}{\theta_1}\right)}{\partial x}}}\right] = -\frac{\theta_1^3\dfrac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left(\dfrac{1}{\theta_1}\right)}{\dfrac{\partial^2\theta_1}{\partial x\,\partial y}}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{\sqrt{\dfrac{\partial\theta_1}{\partial x}}}\right).\end{aligned}\right.$$

Ces formules ne changent pas quand on permute z et ω, pourvu qu'on change en même temps θ_1 en $\frac{1}{\theta_1}$; donc, si l'élimination de ω conduit à l'équation linéaire $E(z, \theta_1)$, il s'ensuit que l'élimination de z doit conduire à une équation de même forme $E\left(\omega, \frac{1}{\theta_1}\right)$, et nous pouvons énoncer la proposition suivante :

De toute intégrale de l'équation linéaire $E(z, \theta_1)$ *on peut déduire, par une quadrature, une intégrale de l'équation de même forme* $E\left(z, \frac{1}{\theta_1}\right)$.

Puisque l'intégration de l'équatiou $\mathcal{F}(\theta) = \mathcal{F}(\theta_1)$ se ramène à celle de l'équation $E(z, \theta_1)$, on a aussi le théorème suivant :

De toute intégrale de l'équation $\mathcal{F}(\theta) = \mathcal{F}(\theta_1)$, *on peut déduire, par des quadratures, une intégrale de l'équation*

$$\mathcal{F}(\theta) = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\theta_1}\right).$$

Les conséquences sont analogues à celles que l'on déduit du théorème de M. Moutard, relativement aux équations aux invariants égaux. De toute équation intégrable de la forme (2) on pourra déduire, en répétant l'opération précédente, toute une suite indéfinie d'équations intégrables de la même espèce. Ainsi, on pourra, en partant de l'équation

$$s+\frac{q}{x+y}-\frac{z}{(x+y)^2}=0,$$

dont l'intégrale générale est

$$z=\mathrm{X}'+\frac{\mathrm{Y}-\mathrm{X}}{x+y},$$

obtenir toutes les équations linéaires de l'espèce considérée ici, qui sont intégrables par la méthode de Laplace.

Remarque. — On déduit des formules (6)

$$du=\theta_1 d\left(\frac{z}{z_1}\right)-\frac{z_1}{\lambda}\frac{\partial z_1}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{z}{z_1}\right)=d\left(\theta_1\frac{z}{z_1}\right)-\left(zz_1\,dx+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z_1}{\partial y}dy\right),$$

et, par suite,

$$u=\theta_1\frac{z}{z_1}-\int zz_1\,dx+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z_1}{\partial y}dy. \tag{8}$$

La transformation définie par les formules (6) est donc équivalente à l'ensemble des deux transformations suivantes. Posons

$$w=\int zz_1\,dx+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial z_1}{\partial y}dy; \tag{9}$$

w satisfait à l'équation linéaire

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}-\frac{\partial\log z_1}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}-\lambda\frac{z_1}{\frac{\partial z_1}{\partial y}}\frac{\partial w}{\partial y}=0, \tag{10}$$

qui admet l'intégrale particulière $w_1=\theta_1$, et u peut s'écrire

$$u=w_1\frac{zz_1}{z_1^2}-w=\frac{w_1\frac{\partial w}{\partial x}-w\frac{\partial w_1}{\partial x}}{\frac{\partial w_1}{\partial x}}.$$

On peut remarquer que la fonction w satisfait, quelles que soient les intégrales z et z_1, à une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre qu'il serait facile de former.