BULLETIN DE LA S. M. F.

L. LECORNU

Sur l'équilibre relatif d'un solide sollicité par la force centrifuge

Bulletin de la S. M. F., tome 27 (1899), p. 289-296
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1899__27__289_0>

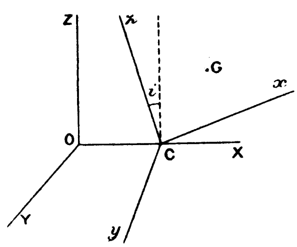
SUR L'ÉQUILIBRE RELATIF D'UN SOLIDE SOLLICITÉ PAR LA FORCE CENTRIFUGE;

Par M. L. Lecornu.

Lorsqu'un système matériel est entraîné, avec une vitesse angulaire ω, dans un mouvement uniforme de rotation autour d'un axe fixe, chaque élément, de masse m, placé à la distance r de cet axe, est repoussé par la force centrifuge $m\omega^2 r$ dont le travail, pour une variation dr de r, est $m\omega^2 r\,dr$. Il y a donc une fonction de forces qui est égale à $\frac{1}{2}\omega^2\Sigma(mr^2)$, c'est-à-dire à la demi-force vive du système, considéré comme lié à l'axe. D'après cela, les positions d'équilibre sont celles pour lesquelles le moment d'inertie $\Sigma(mr^2)$ est maximum ou minimum. L'équilibre est stable dans le cas du maximum, instable dans celui du minimum.

Appliquons d'abord ceci au cas d'un corps solide susceptible de tourner autour d'un axe relié invariablement au premier. Soient OZ l'axe d'entraînement et Cz l'axe autour duquel peut tourner le corps dans son mouvement relatif. Soit $\mathrm{OC} = h$ la plus courte

Fig 1.



distance de ces axes. Prenons trois axes de coordonnées rectangulaires OX, OY, OZ, dont le premier coïncide avec OC et le troisième avec l'axe d'entraînement. Considérons, en outre, trois autres axes rectangulaires Cx, Cy, Cz, liés au corps et issus de C, dont le troisième coïncide avec l'axe du mouvement relatif. En appelant a, b, c, a', b', c', a'', b'', c'' leurs cosinus directeurs par rapport à OX, OY, OZ, on a les formules de transformation

$$\begin{aligned} X &= h + ax + a'y + a''z, \\ Y &= \phantom{h +{}} bx + b'y + b''z, \\ Z &= \phantom{h +{}} cx + c'y + c''z. \end{aligned}$$

Remarquant que a'' est nul par hypothèse, on a, pour le moment d'inertie par rapport à OZ,

$$I = \Sigma m(X^2 + Y^2) = \Sigma m(h + ax + a'y)^2 + \Sigma m(bx + b'y + b''z)^2.$$

Soit M la masse totale. Choisissons le plan xCz de façon qu'il contienne le centre de gravité G, et appelons l la distance de G à Cz. Alors

$$\Sigma mx = Ml, \qquad \Sigma my = 0,$$

d'où

$$\begin{aligned} I = {} & Mh^2 + 2Mlha + (a^2 + b^2)\Sigma mx^2 + (a'^2 + b'^2)\Sigma my^2 \\ & + b''^2 \Sigma mz^2 + 2(aa' + bb')\Sigma mxy + 2bb''\Sigma mxz + 2b'b''\Sigma myz. \end{aligned}$$

Dans cette expression, les seules quantités variables sont les cosinus directeurs a, b, a', b', b'', liés par les équations

$$a^2 + a'^2 = 1, \qquad b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \qquad ab + a'b' = 0.$$

Soit i l'angle de Cz avec OZ. On a

$$b'' = \sin i.$$

Posons en outre $a = \cos\varphi$. Nous trouvons

$$\begin{aligned} a &= \cos\varphi, & b &= -\sin\varphi\cos i, \\ a' &= \sin\varphi, & b' &= \cos\varphi\cos i. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} I = {} & Mh^2 + 2(Mlh + \sin i \cos i\, \Sigma myz)\cos\varphi \\ & + (\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\cos^2 i)\Sigma mx^2 + (\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\cos^2 i)\Sigma my^2 \\ & + \sin^2 i\, \Sigma mz^2 + 2\sin\varphi\cos\varphi\sin^2 i\, \Sigma mxy - 2\sin i\cos i\sin\varphi\, \Sigma mxz, \end{aligned}$$

ou bien

$$\begin{aligned} I = {} & Mh^2 + \left(\frac{1 + \cos^2 i}{2}\right)(\Sigma mx^2 + \Sigma my^2) + \sin^2 i\, \Sigma mz^2 \\ & + (2Mlh + \sin 2i\, \Sigma myz)\cos\varphi - (\sin 2i\, \Sigma mxz)\sin\varphi \\ & + \frac{\sin^2 i}{2}(\Sigma mx^2 - \Sigma my^2)\cos 2\varphi + \sin^2 i\, \Sigma mxy \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Il faut chercher les maxima et les minima de cette valeur de quand φ varie de o à 2π. L'expression obtenue est de la forme

$$I = A + B\cos\varphi + C\sin\varphi + D\cos 2\varphi + E\sin 2\varphi,$$

en désignant par A, B, C, D, E cinq quantités indépendantes de φ.

Si l'on introduit les notations

$$B = P\cos\alpha, \qquad D = Q\cos 2\beta,$$
$$C = P\sin\alpha, \qquad E = Q\sin 2\beta,$$

l'on a

$$I = A + P\cos(\varphi - \alpha) + Q\cos 2(\varphi - \beta).$$

Les valeurs limites correspondent aux angles φ vérifiant l'équation

$$P\sin(\varphi - \alpha) + 2Q\sin 2(\varphi - \beta) = 0,$$

ou bien

$$\sin 2\psi = p\sin(\psi - \gamma),$$

en posant

$$\frac{P}{2Q} = -p, \qquad \varphi - \beta = \psi, \qquad \alpha - \beta = \gamma.$$

On est ainsi conduit à chercher les points d'intersection de deux sinusoïdes dont les périodes sont dans le rapport $\frac{1}{2}$, et une discussion facile montre que, pour φ compris entre zéro et 2π, on a deux ou quatre solutions réelles suivant que p est, en valeur absolue, supérieur ou inférieur à l'unité. Dans le premier cas, il y a un maximum et un minimum de I. Dans le second cas, il y a deux maxima et deux minima. D'après cela, si $B^2 + C^2$ est supérieur à $4(D^2 + E^2)$, le corps a une position d'équilibre stable et une position d'équilibre instable. Dans le cas contraire, il y a deux positions d'équilibre stable et deux positions d'équilibre instable.

Quand les deux axes sont parallèles, i est nul, et il en est de même des quantités C, D, E, tandis que B se réduit à $2Mlh$. La valeur de I est alors $I = A + B\cos\varphi$, et la seule position d'équilibre stable est celle pour laquelle $\varphi = 0$, à moins que l'une des longueurs l ou h ne s'annule, auquel cas I serait indépendant de φ et l'équilibre deviendrait indifférent.

Quand les deux axes sont perpendiculaires, $i = \frac{\pi}{2}$, ce qui annule C et, par conséquent, α. Si, en même temps, $\Sigma mxy = 0$, c'est-à-dire si Cx, Cy sont les axes de l'ellipse formant l'intersection du plan des xy avec l'ellipsoïde d'inertie, la constante E est nulle, et il en est de même de l'angle β. L'équation déterminant φ se décompose alors en deux, savoir

$$\sin\varphi = 0 \quad \text{et} \quad \cos\varphi = \frac{p}{2}.$$

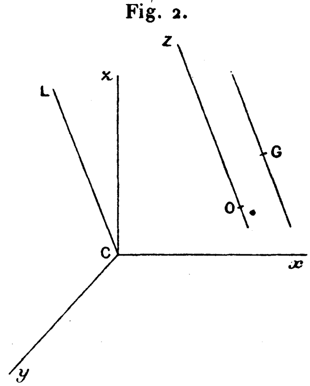
D'après cela, il y a deux positions d'équilibre, l'une stable, l'autre instable, pour lesquelles le centre de gravité se place dans le plan XOY, et il y a en outre deux positions d'équilibre, l'une stable, l'autre instable, pour lesquelles le centre de gravité est en dehors du plan XOY; ces dernières n'existent réellement que si p est inférieur à 2, c'est-à-dire si Mlh est inférieur à $\Sigma m(x^2 - y^2)$.

Ces résultats peuvent trouver leur application dans la théorie des régulateurs à force centrifuge; il faut, en effet, se garder de disposer les masses mobiles de telle façon qu'elles se trouvent dans le voisinage d'une pareille position d'équilibre, sans quoi le régulateur deviendrait à peu près insensible aux variations de la force centrifuge.

Sans insister davantage sur l'examen des cas particuliers, je vais maintenant rechercher les positions d'équilibre d'un solide susceptible de tourner autour d'un centre C lié à un axe d'entraînement.

Rapportons le solide aux axes principaux d'inertie Cx, Cy, Cz

Fig. 2.



relatifs au centre C. Par rapport à ces axes, l'axe d'entraînement OZ est susceptible d'occuper toutes les positions situées à une même distance h de C, et il s'agit de trouver, parmi ces positions, celles pour lesquelles le moment d'inertie du corps devient maximum ou minimum.

Considérons d'abord les positions de OZ parallèles à une même direction CL. Elles forment un cylindre de révolution autour de CL. Le moment d'inertie par rapport à l'une d'elles s'obtient en calculant d'abord le moment d'inertie I_g relatif à une droite de même direction menée par le centre de gravité G, et ajoutant le produit de la masse M par le carré de la distance de G à OZ. Il y a donc, pour l'ensemble de ces droites parallèles, un maximum et un minimum, correspondant aux deux positions situées dans le plan GCL. Si k est la distance de G à CL, le maximum est $I_g + M(k+h)^2$ et le minimum est $I_g + M(k-h)^2$. D'ailleurs, si I_0 est le moment d'inertie par rapport à CL, on a $I_0 = I_g + Mk^2$. Le moment maximum est donc $I_0 + Mh^2 + 2Mkh$, et le moment minimum est $I_0 + Mh^2 - 2Mkh$. En laissant de côté le terme constant Mh^2 on est amené, pour avoir les maxima et les minima absolus, à étudier les variations du binôme $F = I_0 \pm 2Mkh$. Nous écrirons simplement $I_0 + 2Mkh$, en convenant que k peut être positif ou négatif, suivant que l'équilibre est stable ou instable.

Soient A, B, C les moments d'inertie principaux en (C), et p, q, r les coordonnées de G. En appelant α, β, γ les cosinus directeurs de CL, on a

$$\begin{gathered} I_0 = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2, \\ K^2 = p^2 + q^2 + r^2 - (p\alpha + q\beta + r\gamma)^2. \end{gathered}$$

Les valeurs limites du binôme correspondent aux équations pour lesquelles on a

$$\frac{\frac{\partial F}{\partial \alpha}}{\alpha} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \beta}}{\beta} = \frac{\frac{\partial F}{\partial \gamma}}{\gamma},$$

ce qui conduit aux équations

$$\begin{aligned} & A - M\frac{h}{\alpha}\,\frac{p\alpha + q\beta + r\gamma}{k} \\ & = B - M\frac{h}{\beta}\,\frac{p\alpha + q\beta + r\gamma}{k} = C - M\frac{h}{\gamma}\,\frac{p\alpha + q\beta + r\gamma}{k}, \end{aligned}$$

qu'on peut mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{(A-B)\alpha\beta}{p\beta - q\alpha} = \frac{(B-C)\beta\gamma}{q\gamma - r\beta} = \frac{(C-A)\gamma\alpha}{r\alpha - p\gamma} \\ = \frac{Mh(p\alpha + q\beta + r\gamma)}{\sqrt{p^2 + q^2 + r^2 - (p\alpha + q\beta + r\gamma)^2}}, \end{aligned}$$

ou encore

$$(B - C)p\beta\gamma + (C - A)q\gamma\alpha + (A - B)r\alpha\beta = 0,$$

$$(B - C)^2\beta^2\gamma^2 + (C - A)^2\gamma^2\alpha^2 + (A - B)^2\alpha^2\beta^2 \\ - M^2h^2(p\alpha + q\beta + r\gamma)^2 = 0.$$

En remplaçant α, β, γ par

$$\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},$$

on voit que les directions cherchées, considérées comme issues de l'origine, sont les génératrices communes à deux cônes du second et du quatrième degré. Il y a donc huit positions d'équilibre, réelles ou imaginaires.

Il serait fort ardu de discuter complètement les conditions de réalité de ces huit positions. Je me bornerai à établir qu'elles existent effectivement dans certains cas. A cet effet j'écrirai, pour abréger l'écriture,

$$B - C = a, \qquad C - A = b, \qquad A - B = c, \qquad M^2h^2 = m^2,$$

et je ferai le changement de variables $\alpha = \gamma u$, $\beta = \gamma v$, ce qui, en tenant compte de la relation $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$, conduit aux deux équations

$$apv + bqu + cruv = 0,$$

$$a^2v^2 + b^2u^2 + c^2u^2v^2 - m^2(pu + qv + r)^2(u^2 + v^2 + 1) = 0.$$

Supposons que p et q soient infiniment petits du premier ordre, tandis que r est fini. Admettons en outre qu'aucune des quantités a, b, c, m ne soit nulle.

La première équation montre que l'une au moins des inconnues u et v est infiniment petite. La seconde équation montre d'ailleurs qu'elles ne peuvent l'être simultanément. Supposons donc d'abord que v est infiniment petit, tandis que u est fini ou infiniment grand.

Si u est fini, la première équation se réduit à $bq + crv = 0$ et fait connaître v. La seconde donne

$$b^2u^2 - m^2r^2(u^2 + 1) = 0,$$

d'où

$$u = \pm \frac{mr}{\sqrt{b^2 - m^2r^2}},$$

valeurs réelles si $|b| > mr$.

Si u est infini, on a encore $bq + crv = 0$, mais la seconde équation devient

$$b^2 - m^2(pu + r)^2 = 0,$$

d'où

$$u = -\frac{r}{p} \pm \frac{b}{mp},$$

valeurs toujours réelles.

On obtient ainsi quatre systèmes de solutions réelles et distinctes.

Supposons maintenant que u soit infiniment petit. En raisonnant de la même façon, nous voyons que nous obtiendrons quatre autres systèmes de solutions, réelles et distinctes, pourvu que c, en valeur absolue, soit supérieur à mr; et, par conséquent, nous aurons, en somme, huit positions d'équilibre réelles et distinctes. Il est vrai que, pour chaque système, notre calcul ne nous donne que les valeurs principales des inconnues; mais, du moment où ces valeurs principales sont réelles et distinctes, il ne peut en être autrement pour les vraies valeurs : car, si l'une de ces dernières était imaginaire, la quantité imaginaire conjuguée vérifierait également les équations du problème, et le nombre total des solutions surpasserait huit, résultat évidemment absurde.

En résumé :

Lorsqu'un corps solide est mobile autour d'un point entraîné dans un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe, il y a huit positions d'équilibre, réelles ou imaginaires. En particulier, si le centre de gravité du corps est très rapproché de l'axe principal, pour lequel le moment d'inertie est C, *les huit positions d'équilibre sont réelles pourvu que les différences* A — C, B — C *soient, en valeur absolue, supérieures à la masse du corps multipliée par les distances du centre de rotation au centre de gravité et à l'axe fixe.*

En terminant, je ferai remarquer que le problème examiné admet une interprétation géométrique assez simple. Nous avons été conduits à chercher, parmi toutes les droites situées à une même distance d'un point donné C, quelles sont celles pour lesquelles le moment d'inertie d'un corps est maximum ou minimum. On sait que les droites pour lesquelles le moment d'inertie possède une même valeur sont les droites par lesquelles on peut mener des plans tangents rectangulaires à une quadrique, et constituent par conséquent ce qu'on appelle un *complexe de Painvin*. La quadrique a les mêmes plans principaux que l'ellipsoïde d'inertie relatif au centre de gravité. Son équation, rapportée à ces plans principaux, est

$$\frac{x^2}{a^2-\frac{q^2}{2}}+\frac{y^2}{b^2-\frac{q^2}{2}}+\frac{z^2}{c^2-\frac{q^2}{2}}+1=0,$$

en appelant Ma^2, Mb^2, Mc^2 les moments d'inertie par rapport aux trois plans et Mq^2 le moment d'inertie par rapport aux droites du complexe. Lorsque q varie, la quadrique reste homofocale à une quadrique fixe. Les droites du complexe passant par un même point forment un cône du second ordre Σ.

Ceci rappelé, remarquons que les droites cherchées doivent être tangentes à une sphère S ayant pour centre le point C. Pour chaque complexe, défini par une valeur particulière de q, on peut distinguer, sur la surface de S, deux régions R_1 et R_2, définies de la manière suivante : en chaque point de R_1, le cône Σ a deux génératrices réelles dans le plan tangent à la sphère; en chaque point de R^2, le cône Σ coupe le plan tangent à la sphère suivant deux génératrices imaginaires. La ligne de séparation des deux régions est le lieu des points pour lesquels le cône Σ est tangent à la sphère. Il est clair que, si q est un maximum ou un minimum, la région R_1 doit devenir évanouissante et, par suite, la ligne séparative de R_1 et R_2 doit se réduire à un point ou à plusieurs points isolés. Le problème que nous avons traité revient donc à déterminer, parmi les complexes de Painvin associés à une famille de quadriques homofocales, ceux pour lesquels il existe un nombre fini de cônes du complexe tangents à une sphère donnée et ayant leurs sommets sur cette sphère.