BULLETIN DE LA S. M. F.

FERBER

Sur un symbole analogue aux déterminants

Bulletin de la S. M. F., tome 27 (1899), p. 285-288
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1899__27__285_1>

SUR UN SYMBOLE ANALOGUE AUX DÉTERMINANTS;

Par M. Ferber.

L'habitude que nous avons des déterminants met à notre disposition un moyen automatique pour former des fonctions symétriques. En effet, considérons le déterminant

$$\begin{Vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{Vmatrix}$$

et développons-le en convenant de donner à tous les termes le signe $+$; nous l'appellerons un *déterminant positif* (¹) et, pour le reconnaître, nous l'encadrerons par des doubles lignes. On trouve

$$a^2 b + a^2 c + b^2 a + b^2 c + c^2 a + c^2 b,$$

c'est-à-dire la fonction symétrique de trois lettres qu'on note habituellement $\Sigma a^2 b$. Cela résulte tout naturellement de la définition du déterminant type $D(a_1^1 a_2^2 a_3^3 \dots a_n^n)$ où, l'ordre des indices inférieurs étant conservé, on permute les indices supérieurs de toutes les manières possibles.

Un déterminant positif ne s'annule plus lorsque deux lignes ou deux colonnes sont égales; mais il est facile de voir, par un exemple, que, si ce fait arrive, il faut le diviser par la factorielle $2!$ et en général par la factorielle $n!$ si n lignes ou n colonnes deviennent égales.

Soient

$$\left\Vert \begin{matrix} a & a \\ b & b \end{matrix} \right\Vert = 2ab \qquad \left\Vert \begin{matrix} a^2 & a & 1 & 1 & 1 \\ b^2 & b & 1 & 1 & 1 \\ c^2 & c & 1 & 1 & 1 \\ d^2 & d & 1 & 1 & 1 \\ e^2 & e & 1 & 1 & 1 \end{matrix} \right\Vert = 3!\,\Sigma a^2 b.$$

Dorénavant nous supposerons, pour simplifier l'écriture, que la factorielle est sous-entendue, de sorte que $\left\Vert \begin{matrix} a & a \\ b & b \end{matrix} \right\Vert$ vaut en réalité $\frac{1}{2!} \left\Vert \begin{matrix} a & a \\ b & b \end{matrix} \right\Vert$.

Toutes les propriétés des déterminants ordinaires, subsistent sauf naturellement celles qui résultent de la nullité d'un déterminant ayant des lignes ou des colonnes égales.

Quoique la formation d'une fonction symétrique $\Sigma a^\alpha b^\beta c^\gamma \dots$ devienne un véritable casse-tête, lorsque le nombre des lettres est un peu grand, ce n'est pas seulement pour avoir un moyen automatique que nous préconisons l'usage des déterminants positifs ; mais c'est parce que dans les développements de fonctions,

---

(¹) Appellation commode pour le langage courant, mais qui sous-entend pour éviter l'ambiguïté : *déterminants* (dans le développement desquels on fait tous les termes) *positifs*.

c'est-à-dire dans les calculs pratiques, on les rencontre à chaque pas.

La simplicité de leur théorie et leur utilité nous paraissent telles, qu'il nous semble que leur introduction dans l'enseignement serait une très bonne chose.

Par exemple, soit à effectuer la puissance m d'un polynôme;

$$(A + B + C + D + \ldots)^m;$$

il n'y a qu'à effectuer pour voir que le résultat est

$$\sum \frac{m!}{\alpha!\,\beta!\,\gamma!\ldots} \left\| \begin{matrix} A\alpha & A\beta & A\gamma & \ldots \\ B\alpha & B\beta & B\gamma & \ldots \\ C\alpha & C\beta & C\gamma & \ldots \\ D\alpha & D\beta & D\gamma & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\|,$$

où les exposants doivent satisfaire à $\alpha + \beta + \gamma + \ldots = m$ et être des nombres entiers positifs non croissants.

Par exemple, pour $m = 3$, il y a les solutions

$$\left\{ \begin{matrix} 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \end{matrix} \right.$$

ce qui permet d'écrire immédiatement le développement cherché.

Soit encore à développer (¹) $\frac{1}{(1 - Ax)(1 - Bx)(1 - Cx)\ldots}$, où x est très petit; on aura encore pour le coefficient de x^m

$$\sum \left\| \begin{matrix} A\alpha & A\beta & A\gamma & \ldots \\ B\alpha & B\beta & F\gamma & \ldots \\ C\alpha & C\beta & C\gamma & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix} \right\|,$$

où $\alpha + \beta + \gamma + \ldots = m$, c'est-à-dire le même déterminant que précédemment.

Enfin, on peut s'astreindre à ne développer les déterminants

(¹) Wronski met un pareil quotient sous forme entière au moyen de ses fonctions aleph. Ces fonctions peuvent se calculer de proche en proche par récurrence; mais si l'on veut les calculer *a priori*, il faut former des fonctions symétriques et l'on retombe sur le symbole proposé.

positifs que par lignes et cela peut servir dans deux cas. Dans le premier, les lettres A, B, C peuvent représenter des quaternions; dans le second cas, on peut avoir intérêt à indiquer des opérations symboliques.

Soit, par exemple, à faire le produit

$$(A_0 + A_1 t + A_2 t^2 \ldots)(B_0 + B_1 t + B_2 t^2 \ldots)(C_0 + C_1 t + C_2 t^2 \ldots)$$

où t est une quantité scalaire et les A, B, C sont des vecteurs; il n'y a qu'à effectuer, pour voir que le coefficient de t^m est encore

$$\begin{Vmatrix} A_\alpha & A_\beta & A_\gamma \\ B_\alpha & B_\beta & B_\gamma \\ C_\alpha & C_\beta & C_\gamma \end{Vmatrix}$$

avec $\alpha + \beta + \gamma = m$; mais cette fois il faut développer *par lignes*, pour ne pas intervertir l'ordre des lettres.

Enfin, si l'on a à faire l'opération

$$\varphi^3 x \frac{D^3}{3!}\left[\varphi^2 x \frac{D^2}{2!}\left(\varphi x \frac{D^1}{1!} \varphi x\right)\right]$$

autant de fois qu'il est possible de permuter 3, 2 et 1, il sera très commode de les indiquer symboliquement par

$$\begin{Vmatrix} \varphi^3 \frac{D^3}{3!} & \varphi^2 \frac{D^2}{2!} & \varphi \frac{D^1}{1!} \\ \varphi^3 \frac{D^3}{3!} & \varphi^2 \frac{D^2}{2!} & \varphi \frac{D^1}{1!} \\ \varphi^3 \frac{D^3}{3!} & \varphi^2 \frac{D^2}{2!} & \varphi \frac{D^1}{1!} \end{Vmatrix} \varphi x,$$

en convenant de ne développer que par lignes.

Comme les trois lignes sont égales, on peut ici, pour simplifier, écrire seulement

$$\begin{Vmatrix} \varphi^3 \frac{D^3}{3!} & \varphi^2 \frac{D^2}{2!} & \varphi \frac{D^1}{1!} \end{Vmatrix} \varphi.$$

Et nous citons ce déterminant particulier, parce qu'on le rencontre toutes les fois qu'on veut, en vue d'applications numériques, développer l'opération si féconde de l'itération.