Bulletin de la S. M. F.

SMF

Vie de la Société

Bulletin de la S. M. F., tome 26 (1898), p. 233-237
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1898__26__233_0>

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 9 NOVEMBRE 1898.

PRÉSIDENCE DE M. LECORNU.

Élections :

Sont élus, à l'unanimité, membres de la Société : MM. Carl Störmer et Al. Ziwet, présentés par MM. Laisant et Lemoine.

Communications :

M. Ripert : *Sur des propriétés des coniques et sur le caractère projectif des propriétés métriques.*

M. Borel : *Sur les singularités des séries de Taylor.*

M. Leau : *Extension d'un théorème de M. Hadamard à l'étude des séries de Taylor.*

M. Hadamard adresse un Mémoire *Sur les conditions de décomposition des formes.*

M. G. Humbert fait la Communication suivante :

Sur une interprétation géométrique de l'équation modulaire pour la transformation du troisième ordre.

Si dans l'intégrale elliptique $\int \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4)}}$ on fait la substitution $\lambda = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, f et φ désignant deux polynômes d'ordre $2p+1$, on sait, depuis Jacobi, que la transformée sera une intégrale elliptique, à condition que, pour $\lambda = \lambda_i$, on ait identiquement

$$f(x) - \lambda_i \varphi(x) = (x - x_i)\,P_i^2(x) \qquad (i = 1, 2, 3, 4),$$

x_i étant une constante et $P_i(x)$ un polynôme en x. On a alors

$$\int \frac{d\lambda}{\sqrt{(\lambda-\lambda_1)\ldots(\lambda-\lambda_4)}} = g\int \frac{dx}{\sqrt{(x-x_1)\ldots(x-x_4)}},$$

g désignant une constante, et les modules des deux intégrales elliptiques en λ et en x sont liés par l'équation modulaire pour $n = 2p+1$.

Géométriquement, on peut interpréter ce résultat comme il suit :

Sur une courbe unicursale C, dont les coordonnées d'un point s'expriment rationnellement en fonction d'un paramètre x, considérons l'involution définie par l'équation $f(x) - \lambda\varphi(x) = 0$, f et φ étant des polynômes d'ordre $2p+1$: si quatre groupes de l'involution, correspondant aux valeurs λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 de λ, sont formés respectivement par un point simple, x_i, et par $2p$ points confondus deux à deux, le rapport anharmonique des quatre valeurs λ_i et celui des quatre valeurs x_i sont liés par l'équation modulaire pour $n = 2p+1$.

Par exemple, sur une cubique plane unicursale, les droites issues d'un point fixe quelconque P découpent les groupes d'une involution, qui jouit de la propriété ci-dessus : les quatre groupes remarquables sont en effet découpés par les quatre tangentes menées de P à la cubique. De là ce théorème :

Soit une cubique plane unicursale quelconque; les quatre tangentes qu'on peut lui mener par un point arbitraire la coupent de nouveau en quatre points : le rapport anharmonique des droites qui joignent à ces quatre points le point double de la cubique et le rapport anharmonique des quatre tangentes primitives sont liés par l'équation modulaire du cas de $n = 3$.

Si ρ et σ désignent les deux rapports considérés, cette équation est

$$(1) \qquad \sqrt[4]{\rho\sigma} + \sqrt[4]{(1-\rho)(1-\sigma)} = 1.$$

C'est l'équation classique entre les modules de Legendre k^2 et k_1^2.

On peut donner de ce résultat une vérification géométrique simple.

Soit la cubique unicursale

$$x^3 + 3\lambda^2 xy^2 + 3x^2 + y^2 = 0,$$

qui a un point double à l'origine et dont Ox est un axe de symétrie; menons-lui les quatre tangentes parallèles à cet axe; nous trouvons sans difficulté, pour leur rapport anharmonique,

$$\sigma = \frac{(\lambda - 1)^3(3\lambda + 1)}{(\lambda + 1)^3(3\lambda - 1)}, \tag{2}$$

et, pour le second rapport anharmonique ρ,

$$\rho = \frac{(\lambda - 1)(3\lambda + 1)^3}{(\lambda + 1)(3\lambda - 1)^3}, \tag{3}$$

valeurs qui vérifient la relation (1). On voit de plus, puisque ρ et σ sont exprimés rationnellement en λ, que l'équation modulaire pour $n = 3$, entre k^2 et k_1^2, est de genre zéro.

Du théorème général se déduisent quelques conséquences :

1° Supposons $\rho = \sigma$, c'est-à-dire les deux rapports anharmoniques égaux ; en ce cas, si l'on désigne par D le point double de la cubique, par P le point d'où partent les quatre tangentes, par $m_1, \ldots, m_4$ les points où ces tangentes coupent de nouveau la courbe, les six points $m_1, \ldots, m_4$, P et D sont sur une conique. D'ailleurs les relations (2) et (3) montrent que, lorsque $\rho = \sigma$, les quantités $-\rho$ et $-\sigma$ sont une des racines cubiques imaginaires de l'unité ou ont une des valeurs $0, -1, \infty$. En laissant de côté ce dernier cas, où deux des points m_i coïncident, on peut dire que :

Si les quatre points où les tangentes, menées d'un point P *à la cubique, coupent de nouveau cette courbe, sont situés avec le point* P *et le point double sur une même conique, le rapport anharmonique des quatre tangentes est équianharmonique, et réciproquement.*

Le lieu du point P est alors, comme on le voit directement sans difficulté, la droite qui contient les trois points d'inflexion de la cubique.

2° Si la cubique a un point de rebroussement, le théorème général subsiste ; une des tangentes issues de P passe alors par le point de rebroussement D, et le point m_i correspondant est le point où la droite PD coupe de nouveau la cubique.

On en tire immédiatement l'équation du lieu des points de rebroussement des cubiques qui touchent trois droites concourantes et passent par trois points situés sur ces droites; ce lieu est une courbe unicursale du sixième ordre, qui se déduit de la courbe modulaire (1) par une transformation quadratique très simple.

M. Goursat adresse la Note suivante :

Sur l'équation $\Delta\Delta u = 0$.

L'équation du quatrième ordre $\Delta\Delta u = 0$, où $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, a fait l'objet d'un grand nombre de travaux, qui ont surtout pour but la solution du problème suivant :

Déterminer une intégrale de cette équation, continue ainsi que ses dérivées à l'intérieur d'une aire simplement connexe, connaissant la valeur de u et de la dérivée $\frac{du}{dn}$, prise suivant la normale intérieure, en chaque point du contour qui limite cette aire.

Dans le cas où le contour se réduit à une circonférence, le problème précédent se ramène au problème classique de Dirichlet, relatif à l'équation $\Delta u = 0$.

Toutes les intégrales de l'équation $\Delta\Delta u = 0$ étant des fonctions analytiques, ainsi que l'a démontré M. Picard, si l'on prend pour variables indépendantes $z = x + iy$, $z' = x - iy$, l'équation devient

$$\frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial z'^2} = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$u = f(z) + \varphi(z') + zz'[f_1(z) + \varphi_1(z')];$$

en revenant aux variables x, y, on en conclut que toute intégrale de l'équation $\Delta\Delta u = 0$ est de la forme

$$u = v(x,y) + (x^2 + y^2)\, v_1(x,y)$$

v et v_1 étant deux fonctions harmoniques, c'est-à-dire deux intégrales de $\Delta v = 0$. La réciproque est d'ailleurs aisée à vérifier.

Cela posé, supposons qu'il s'agisse de déterminer une fonction u, contenue à l'intérieur du cercle C, qui a pour équation

$x^2 + y^2 - 1 = 0$, connaissant les valeurs de u et de $\frac{du}{dn}$ en chaque point de C. L'expression de u peut encore s'écrire

$$(1) \qquad u = v(x, y) + (x^2 + y^2 - 1) v_1(x, y),$$

ce qui revient à remplacer v par $v - v_1$ dans la première formule. Cette égalité nous fait connaître la valeur de la fonction harmonique $v(x, y)$ tout le long de C ; elle est égale à la valeur donnée de u. On obtiendra donc $v(x, y)$ par la formule connue, qui donne la solution du problème de Dirichlet dans le cas du cercle. Connaissant $v(x, y)$, si l'on prend les dérivées des deux membres de la formule (1) suivant la normale intérieure, on a une nouvelle égalité qui fait connaître la valeur de la fonction harmonique $v_1(x, y)$ en chaque point du cercle ; ce qui nous ramène encore au problème de Dirichlet.

La méthode précédente s'étend sans modification à l'espace et même au cas d'un nombre quelconque de variables.

SÉANCE DU 23 NOVEMBRE 1898.

PRÉSIDENCE DE M. LECORNU.

Élection :

Est élu, à l'unanimité, membre de la Société, M. Edwin Blake, présenté par MM. Vicaire et Borel.

Communications :

M. Carl Störmer : *Sur la résolution en nombres entiers de l'équation*

$$m \operatorname{arctang} \frac{1}{x} + n \operatorname{arctang} \frac{1}{y} = k \frac{\pi}{4}.$$

M. d'Ocagne : *Sur la résolution de l'équation du quatrième degré au moyen d'abaques.*

M. Raffy : *Détermination complète des surfaces de Joachimsthal dont les rayons de courbure principaux sont liés par une relation.*

M. Lecornu : *Sur le mouvement d'un point sollicité par une force centrale d'intensité constante.*
