BULLETIN DE LA S. M. F.

A. PELLET

Sur la théorie des surfaces

Bulletin de la S. M. F., tome 26 (1898), p. 138-159

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1898__26__138_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR LA THÉORIE DES SURFACES;

Par M. A. Pellet.

Ce Mémoire fait suite à celui qui a paru dans les *Annales de l'École Normale* en septembre 1897. La méthode que j'expose permet de simplifier la théorie des surfaces ayant même représentation sphérique, en particulier celle des surfaces de Weingarten, le théorème de Christoffel et celui de Lamé sur les systèmes triples, orthogonaux et isothermes. J'y donne aussi un résultat complètement nouveau, l'expression générale de l'élément linéaire des surfaces applicables sur une surface de révolution, lorsque les coefficients de cet élément sont des fonctions de la courbure de la surface.

1. La courbure totale de l'expression

$$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

est un invariant, quelles que soient les fonctions E, F, G; si on les multiplie par une fonction $f(\varphi)$, φ étant une fonction de u et de v, la courbure totale de la nouvelle expression est un invariant. Développant l'expression de cette courbure totale, les coefficients des diverses puissances de f et de ses dérivées par rapport à φ seront donc des invariants. On arrive ainsi facilement aux invariants de M. Beltrami. Dans le cas où

$$E = G = 0,$$

la courbure totale, K, a pour expression

$$-\frac{1}{F}\frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\,l F.$$

La courbure totale de l'expression

$$2f(\varphi)\,\mathrm{F}\,du\,dv$$

est donc égale à

$$\frac{\mathrm{K}}{f} - \frac{f'}{f^2}\,\frac{\varphi''_{uv}}{\mathrm{F}} - \frac{1}{f}\left(\frac{f'}{f}\right)'\frac{\varphi'_u\,\varphi'_v}{\mathrm{F}}.$$

Les invariants de M. Beltrami sont

$$\Delta_2\,\varphi = -\frac{\varphi''_{uv}}{\mathrm{F}}, \qquad \Delta_1\,\varphi = \frac{+\,2\varphi'_u\,\varphi'_v}{\mathrm{F}};$$

et l'on a

$$\mathrm{K} = \Delta_2\, l\,\mathrm{F}.$$

Dans le cas général, les termes contenant des dérivées secondes dans K sont

$$\frac{1}{\mathrm{H}^2}\left(\mathrm{F}''_{uv} - \frac{1}{2}\,\mathrm{E}''_{v^2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{G}''_{u^2}\right);$$

on en déduit immédiatement pour les termes contenant les dérivées secondes de φ dans $\Delta_2\,\varphi$:

$$\frac{1}{\mathrm{H}^2}\left(\mathrm{F}\,\varphi''_{uv} - \frac{1}{2}\,\mathrm{E}\,\varphi''_{v^2} - \frac{1}{2}\,\mathrm{G}\,\varphi''_{u^2}\right).$$

D'après l'expression de $\Delta_2\,\varphi$ dans le cas où E et G sont nuls, on a

$$\Delta_2\,\varphi = 0,$$

pour les fonctions φ satisfaisant aux équations

$$(1) \qquad r_1\,\varphi'_u + \varphi'_v = 0, \qquad r_2\,\varphi'_u + \varphi'_v = 0,$$

r_1 et r_2 étant les racines de l'équation

$$\mathrm{E}r^2 + 2\mathrm{F}r + \mathrm{G} = 0.$$

Cela détermine les autres termes de $\Delta_2\,\varphi$, et l'on voit que

$$\Delta_2\varphi = \frac{1}{2\mathrm{H}}\,\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{H}}\,\varphi'_v - \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{H}}\,\varphi'_u\right) + \frac{1}{2\mathrm{H}}\,\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{H}}\,\varphi'_u - \frac{\mathrm{E}}{\mathrm{H}}\,\varphi'_v\right).$$

En effet, pour les solutions des équations (1), on a

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{H}}\,\varphi'_v - \frac{\mathrm{G}}{\mathrm{H}}\,\varphi'_u = -\,i\,\varphi'_v, \qquad \frac{\mathrm{F}\,\varphi'_u - \mathrm{E}\,\varphi'_v}{\mathrm{H}} = i\,\varphi'_u;$$

de sorte que $\Delta_2\,\varphi$ est nul.

Désignons par α une solution de la première des équations (1) et par β une solution de la seconde. On aura

$$\mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2 = \frac{\mathrm{E}\,d\alpha\,d\beta}{\alpha'_u\,\beta'_u},$$

et, par suite, la courbure totale a pour valeur

$$\Delta_2 l \frac{\mathrm{E}}{2\alpha'_u\beta'_u} = \Delta_2 l\mathrm{E} - \Delta_2 l\alpha'_u - \Delta^2 l\beta'_u = \mathrm{K}.$$

Mais, en dérivant les équations (2) par rapport à u, on a

$$\frac{\mathrm{F}\alpha''_{uv} - \mathrm{G}\alpha''_{u^2}}{\mathrm{H}\alpha'_u} = -\frac{i\alpha''_{vu}}{\alpha'_u} + \left(\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{H}}\right)'_u r_1 + \left(\frac{\mathrm{G}}{\mathrm{H}}\right)'_u,$$

$$\frac{\mathrm{F}\alpha''_{u^2} - \mathrm{E}\alpha''_{vu}}{\mathrm{H}\alpha'_u} = i\frac{\alpha''_{u^2}}{\alpha'_u} - \left(\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{H}}\right)'_u - \left(\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{H}}\right)'_u r_1,$$

et les équations analogues pour β. Ajoutant, il vient

$$\Delta_2 l\alpha'_u\beta'_u = \frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathrm{EG}'_u - \mathrm{FF}'_u - \mathrm{HH}'_u}{\mathrm{HE}} + \frac{1}{\mathrm{H}}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\mathrm{FE}'_u - \mathrm{F}'_u\mathrm{E}}{\mathrm{EH}},$$

et, pour la courbure totale,

$$\mathrm{K} = \frac{1}{2\mathrm{H}}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathrm{FE}'_v - \mathrm{EG}'_u}{\mathrm{EH}} + \frac{\partial}{\partial v}\frac{-\mathrm{FE}'_u - \mathrm{EE}'_v + 2\mathrm{F}'_u\mathrm{E}}{\mathrm{HE}}\right),$$

Par symétrie,

$$\mathrm{K} = \frac{1}{2\mathrm{H}}\left(\frac{\partial}{\partial v}\frac{\mathrm{FG}'_u - \mathrm{E}'_v\mathrm{G}}{\mathrm{GH}} + \frac{\partial}{\partial u}\frac{-\mathrm{FG}'_v - \mathrm{GG}'_u + 2\mathrm{F}'_v\mathrm{G}}{\mathrm{HG}}\right),$$

d'où, en ajoutant ces expressions différentes,

$$\begin{aligned}\mathrm{K} = \frac{1}{4\mathrm{H}}&\left[\left(\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{H}}\right)'_u\left(l\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}}\right)'_v - \left(\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{H}}\right)'_v\left(l\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{G}}\right)'_u\right]\\ &+ \frac{1}{2\mathrm{H}}\frac{\partial}{\partial u}\frac{\mathrm{F}'_v - \mathrm{G}'_u}{\mathrm{H}} + \frac{1}{2\mathrm{H}}\frac{\partial}{\partial v}\frac{\mathrm{F}'_u - \mathrm{E}'_v}{\mathrm{H}}.\end{aligned}$$

L'invariant du premier ordre $\Delta_1\varphi$ se calcule avec facilité directement dans le cas général et l'on a

$$\Delta_1\varphi = \frac{\mathrm{E}\varphi'^2_v - 2\mathrm{F}\varphi'_u\varphi'_v + \mathrm{G}\varphi'^2_u}{\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2}.$$

On a posé

$$\mathrm{EG} - \mathrm{F}^2 = \mathrm{H}^2,$$

d'où l'on déduit les relations

$$\frac{1}{2F}\left[\left(\frac{G}{H}\right)'_u\left(\frac{E}{H}\right)'_v-\left(\frac{G}{H}\right)'_v\left(\frac{E}{H}\right)'_u\right]=\frac{1}{E}\left[\left(\frac{F}{H}\right)'_u\left(\frac{E}{H}\right)'_v-\left(\frac{F}{H}\right)'_v\left(\frac{E}{H}\right)'_u\right]$$
$$=\frac{1}{G}\left[\left(\frac{F}{H}\right)'_v\left(\frac{G}{H}\right)'_u-\left(\frac{F}{H}\right)'_u\left(\frac{G}{H}\right)'_v\right].$$

De sorte que l'expression de la courbure totale peut encore se mettre sous la forme

$$K=\frac{1}{4FH}\left[\left(\frac{G}{H}\right)'_u\left(\frac{E}{H}\right)'_v-\left(\frac{G}{H}\right)'_v\left(\frac{E}{H}\right)'_u\right]$$
$$+\frac{1}{2H}\left(\frac{\partial}{\partial u}\frac{F'_v-G'_u}{H}+\frac{\partial}{\partial u}\frac{F'_u-E'_v}{H}\right).$$

2. Lorsque $E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$ est le carré de l'élément linéaire d'une surface applicable sur une surface de révolution, la courbure totale de l'expression

$$f(K)(E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2)$$

est une fonction de K, quelle que soit la fonction $f(K)$ et réciproquement.

Ainsi, pour que l'expression

$$A^2(du^2+g^2\,dv^2)$$

soit le carré de l'élément linéaire d'une surface de révolution, A étant une fonction de g ainsi que la courbure totale, il faut et il suffit que les équations suivantes soient satisfaites :

$$g'^2_v+g^2g'^2_u=2P, \tag{1}$$

$$g''_{u^2}=m^2g, \tag{2}$$

$$\left(\frac{1}{g}\right)''_{v^2}=n^2\frac{1}{g}, \tag{3}$$

P, m, n étant des fonctions de g.

En dérivant l'équation (1), on obtient deux équations entre les dérivées secondes de g, qui, pour être compatibles avec les équations (2) et (3), exigent qu'on ait

$$g^2g'^2_u(m^2g^4-n^2g^2-2P'g+6P)-2(4P-P'g-n^2g^2)P=0.$$

Cette équation détermine g'_u et g est une fonction de $pu+qv$

(p et q constants), à moins que

$$2P = n^2 g^2 + m^2 g^4, \qquad P' = n^2 g + 2m^2 g^3;$$

alors

(4) $$g g''_{uv} = g'_u g'_v.$$

Les équations (1), (2), (3), (4) montrent d'abord que m et n sont constants; si aucune des quantités m, n n'est nulle, on a

$$g^2 = -\frac{n^2}{m^2}\left(\frac{C e^{mu} + C_1 e^{-mu}}{D e^{nv} + D_1 e^{-nv}}\right)^2 \frac{DD_1}{CC_1};$$

si l'une est nulle, m par exemple, on a

$$g^2 = \frac{4 DD_1 n^2 u^2}{(D e^{nv} + D_1 e^{-nv})^2}.$$

Pour que $2F\,du\,dv$ soit le ds^2 d'une surface de révolution, F étant fonction de la courbure, il faut que F soit une fonction de $mu + nv$, m et n étant constants. En effet, on doit avoir

$$F''_{uv} = f(F) \qquad \text{et} \qquad F'_u F'_v = f_1(F);$$

d'où

$$f_1 F''_{uv} - f F'_u F'_v = 0;$$

ce qui donne

$$F = \varphi(U + V),$$

et l'on reconnaît que les fonctions U et V doivent être du premier degré.

3. Supposons $F = 0$, et remplaçons E et G par A^2 et B^2. La surface étant rapportée au système d'axes rectangulaires formé par les tangentes aux lignes coordonnées et la normale à la surface au point (u, v), on a

$$\begin{aligned}
\xi &= A\upsilon + \frac{1}{2}\left(A'_u \upsilon^2 + 2A'_v \upsilon\nu - \frac{B}{A} B'_u \nu^2\right) + \xi_3 + \ldots + \zeta_k + \ldots,\\
\eta &= B\nu + \frac{1}{2}\left(-\frac{AA'_v}{B}\upsilon^2 + 2B'_u \upsilon\nu + B'_v \nu^2\right) + \eta_3 + \ldots + \eta_k + \ldots,\\
\zeta &= \frac{1}{2}(a\xi^2 + 2c\xi\eta + b\eta^2) + \zeta_3 + \ldots + \zeta_k + \ldots,
\end{aligned}$$

υ, ν désignant les accroissements des paramètres u, v; ξ_k, η_k des fonctions entières et homogènes de degré k de υ, ν, et ζ_k une fonction de même nature en ξ, η.

Les cosinus des angles de la normale à la surface au point $\upsilon\nu$

avec les axes des ξ, η, ζ sont proportionnels à

$$a\xi + c\eta, \quad c\xi + b\eta, \quad -1,$$

ce qui donne, pour le carré de l'élément linéaire de la représentation sphérique,

$$(a^2 + c^2)A^2\,du^2 + (b^2 + c^2)B^2\,dv^2 + 2c(b + a)AB\,du\,dv.$$

On a les équations différentielles

$$\begin{aligned} A a'_v + (a - b)A'_v &= B c'_u + 2cB'_u, \\ B b'_u + (b - a)B'_u &= A c'_v + 2cA'_v. \end{aligned}$$

Si $c = 0$, auquel cas u et v sont les paramètres des lignes de courbure, posons

$$Aa = \mathcal{A}, \qquad Bb = \mathcal{B};$$

il vient

$$\frac{A'_v}{B} = \frac{\mathcal{A}'_v}{\mathcal{B}} = \lambda, \qquad \frac{B'_u}{A} = \frac{\mathcal{B}'_u}{\mathcal{A}} = \mu; \tag{1}$$

l'élément linéaire de la représentation sphérique a pour expression

$$\mathcal{A}^2\,du^2 + \mathcal{B}^2\,dv^2,$$

et l'on a

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = -(\lambda'_v + \mu'_u). \tag{2}$$

Supposons données les valeurs de λ et μ. Pour qu'il y ait des surfaces correspondantes il faut que les équations (1) et (2) aient au moins un système de solutions en $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$. Alors, si ce système de solutions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ est unique, à chaque système de valeurs A, B solutions des équations (1) correspond une surface admettant les lignes u et v pour lignes de courbure, $A^2\,du^2 + B^2\,dv^2$ pour élément linéaire, $\frac{\mathcal{A}}{A}$, $\frac{\mathcal{B}}{B}$ pour courbures principales. Si les équations (1) et (2) admettent plusieurs systèmes de solutions en $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $A^2\,du^2 + B^2\,dv^2$ sera le carré de l'élément linéaire d'autant de surfaces admettant u et v pour lignes de courbure qu'il y a de ces solutions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$; dans le cas où A, B est un système de solutions des équations (1) et (2), la surface est à courbure totale constante. Ainsi, lorsque deux surfaces sont applicables l'une sur l'autre avec conservation des lignes de courbure, il y a des surfaces à courbure constante ayant même représentation sphérique que chacune d'elles et réciproquement.

4. Soit $\lambda = 0$. Les courbes $v = \text{const.}$ sont géodésiques sur les surfaces et leurs représentations sphériques, $\mathcal{A}'_v = A'_v = 0$. On a

$$\frac{B'_u}{A} = \frac{\mathcal{B}'_u}{\mathcal{A}} = \mu, \qquad \mathcal{A}\mathcal{B} = -\mu'_u.$$

L'élimination de $\mathcal{B}$ conduit à l'équation

$$-\mu'''_{vu^2} + \mu''_{uv}\frac{\mathcal{A}'_u}{\mathcal{A}^2} = \mu'_v\mathcal{A}.$$

$\mathcal{A}$ ne dépendant que de u, on voit que μ doit être de la forme

$$V_1U_1 + V_2U_2 + U_3,$$

les U n'étant fonctions que de u, et V de v. Si les fonctions U_1, U_2 sont distinctes, la fonction $\mathcal{A}$ est déterminée; mais, si l'une d'elles est nulle, U_2 par exemple, $\mathcal{A}$ doit seulement satisfaire à l'équation

$$-U''_{1u^2} + U'_1\frac{\mathcal{A}'_u}{\mathcal{A}^2} = U_1\mathcal{A}.$$

$\mathcal{A}$ contient donc une constante arbitraire, et l'on a les surfaces moulures de Bour (Darboux, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces,* t. I, n° 87).

Supposons qu'aucune des deux familles de lignes de courbure ne soit formée de lignes géodésiques. Si les équations (1) et (2) ont plusieurs systèmes de solutions en $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, il y a au moins une surface à courbure totale constante autre que la sphère conduisant à ces valeurs de λ et μ. Pour cette surface, les courbures principales a et b sont fonctions l'une de l'autre, et en choisissant convenablement u et v, il en est de même de A, B, $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$. Choisissons le paramètre de manière que

$$\lambda = \alpha'_v, \qquad \mu = f(\alpha)\alpha'_u.$$

Les valeurs de A, B, fonctions de ce paramètre, sont données par les équations

$$A'' - f(\alpha)A = 0, \qquad B = A', \tag{3}$$

les accents indiquant les dérivées par rapport à α. Et pour $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ on aura, en outre, l'équation

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = -\left[\alpha''_{v^2} + f(\alpha)\alpha''_{u^2} + f'(\alpha)\alpha'^2_u\right]. \tag{3'}$$

Par hypothèse, on a

$$LAA' + N\mathcal{A}\mathcal{A}' = 0,$$

L et N étant des constantes. D'où

$$LA^2 + N\mathcal{A}^2 = P,$$

P étant une nouvelle constante; puis

$$\frac{1}{f(\alpha)}(LA'A'' + N\mathcal{A}'\mathcal{A}'') = 0,$$

d'où

$$LA'^2 + N\mathcal{A}'^2 = P_1,$$

P_1 constant. On en déduit

$$Pf(\alpha) + P_1 = 0.$$

Ainsi $f(\alpha)$ est une constante qu'on peut prendre égale à 1. Et, d'après l'équation (3′), α doit satisfaire à une équation de la forme

$$e^{2\alpha} - K^2 e^{-2\alpha} = -(\alpha''_{u^2} + \alpha''_{v^2}).$$

α satisfaisant à cette équation, les équations

$$\frac{\mathcal{A}'_v}{\mathcal{B}} = \alpha'_v, \qquad \frac{\mathcal{B}'_u}{\mathcal{A}} = \alpha'_u, \qquad \mathcal{A}\mathcal{B} = -\alpha''_{v^2} - \alpha''_{u^2}$$

admettent bien les deux systèmes de solutions (O. Bonnet, *Journal de l'Ecole Polytechnique*, année 1867)

$$\mathcal{A} = e^{\alpha} \pm Ke^{-\alpha}, \qquad \mathcal{B} = e^{\alpha} \mp Ke^{-\alpha}.$$

5. Les formules (3) et (3′) définissent toutes les surfaces non de révolution pour lesquelles les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre, surfaces de Weingarten. Lorsque cette relation est de la forme

$$LR_1R_2 + 2M(R_1 + R_2) + N = 0,$$

R_1, R_2 étant les rayons de courbure principaux; L, M, N des constantes, on est conduit, par un calcul identique à celui du numéro précédent, à une constante pour $f(\alpha)$. Les équations (3) deviennent

$$A'' - A = 0, \qquad B = A',$$

en donnant à cette constante la valeur 1.

Prenons d'abord $\mathcal{A} = e^{\alpha} = \mathcal{B}$; α doit satisfaire à l'équation qu'on sait intégrer

$$e^{2\alpha} = -\alpha''_{u^2} - \alpha''_{v^2}.$$

On a

$$A = Ce^{\alpha} + C_1 e^{-\alpha}, \qquad B = Ce^{\alpha} - C_1 e^{-\alpha},$$

$$\frac{1}{a} = R_1 = C + C_1 e^{-2\alpha}, \qquad R_2 = \frac{1}{b} = C - C_1 e^{-2\alpha},$$

C, C_1 étant des constantes arbitraires. En s'appuyant sur les formules de Rodrigues, on en déduit facilement les formules de Weierstrass pour les surfaces minima, qui correspondent à la valeur $C = 0$.

Dans le cas général

$$\mathcal{A} = e^{\alpha} + Ke^{-\alpha}, \qquad \mathcal{B} = e^{\alpha} - Ke^{-\alpha},$$
$$e^{2\alpha} - K^2 e^{-2\alpha} = -\alpha''_{u^2} - \alpha''_{v^2},$$

K étant une constante différente de 0.

$$A = C\mathcal{A} + C_1\mathcal{B}, \qquad B = A' = C\mathcal{B} + C_1\mathcal{A},$$
$$\frac{1}{a} = R_1 = C + C_1\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{A}}, \qquad \frac{1}{b} = R_2 = C + C_1\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}},$$
$$(R_1 - C)(R_2 - C) = C_1^2 \qquad \text{ou} \qquad C_1^2 ab = (Ca - 1)(Cb - 1).$$

La courbure totale est constante pour $C = 0$, et pour $C = \pm C_1$, la courbure moyenne est constante et égale à $\frac{1}{C} = a + b$. Dans ce dernier cas

$$A = B = 2C_1 e^{\alpha},$$

ou

$$A = -B = -2KC_1 e^{-\alpha};$$

les surfaces correspondantes sont donc isothermiques.

6. Parmi les surfaces de Weingarten se trouvent les hélicoïdes, surfaces engendrées par une courbe animée d'un mouvement de rotation autour d'une droite et de translation parallèlement à cette droite, le rapport des vitesses dans les deux mouvements étant constant. Chaque point de la courbe génératrice engendre une hélice; les rayons de courbure principaux de la surface sont

égaux le long de cette hélice, et, par suite, pour un point quelconque de la surface, sont fonctions d'un seul paramètre (α); de plus, les sections principales de la surface en un point de cette hélice font un angle constant avec la tangente à l'hélice. De cette dernière propriété il résulte que le paramètre α est une fonction de $pu+qv$, p et q étant des constantes, u et v les paramètres des lignes de courbure convenablement choisis.

En effet, les hélices correspondent aux valeurs constantes du paramètre α; la tangente de l'angle qu'elles font avec les lignes de courbure est donc égale à $-\frac{A\alpha'_v}{B\alpha'_u}$; d'où une équation de la forme

$$\alpha'_v + F(\alpha)\alpha'_u = 0.$$

Mais, d'après les équations (3) du n° 3,

$$\alpha''_{v^2} + f(\alpha)\alpha''_{u^2} + f'(\alpha)\alpha'^2_u = -\mathcal{A}\mathcal{B} = F_1(\alpha).$$

De la première on tire

$$vF(\alpha) - u = \varphi(\alpha),$$

φ étant une fonction arbitraire. D'où

$$(vF' - \varphi')\alpha'_u - 1 = 0, \qquad (vF' - \varphi')\alpha'_v + F(\alpha) = 0,$$
$$(vF' - \varphi')\alpha''_{u^2} + \alpha'^2_u(vF'' - \varphi'') = 0,$$
$$(vF' - \varphi')\alpha''_{v^2} + \alpha'^2_v(vF'' - \varphi'') + F'(\alpha)\alpha'_v = 0.$$

Substituant dans la seconde, on obtient une relation entre u et v qui doit se réduire à une identité. Les termes du troisième degré en v sont contenus dans $F_1(vF' - \varphi')^3$; $F_1 = -\mathcal{A}\mathcal{B}$, n'étant pas nul, il faut que F' soit nul. Réciproquement si u et v étant les paramètres des lignes de courbure, les coefficients du ds^2 de la surface sont fonctions de $pu+qv$, la surface est un hélicoïde. Ces propositions, dues à O. Bonnet, ont été établies d'une autre manière par M. Raffy (*Bulletin de la Société mathématique*, 1897).

7. Les hélicoïdes sont applicables sur une surface de révolution, théorème de Bour; mais ce ne sont pas les seules surfaces de Weingarten jouissant de cette propriété. D'après le n° 2, le

ds^2 de ces surfaces est de la forme

$$A^2(du^2 + g^2 dv^2),$$

g^2 ayant l'une des valeurs

$$-\frac{n^2}{m^2}\frac{\cos^2(mu+p)}{\cos^2(nv+q)}, \qquad -\frac{n^2u^2}{\cos^2(nv+q)}.$$

Pour que u, v soient les paramètres des lignes de courbure, il faut que les équations suivantes soient compatibles :

$$\frac{A'g'_v}{Ag} = \frac{\mathcal{A}'_v}{\mathcal{B}}, \qquad \frac{A'g + A}{A}g'_u = \frac{\mathcal{B}'_u}{\mathcal{A}},$$

$$\mathcal{A}\mathcal{B} = m^2 g + 2\frac{A'}{A}m^2 g^2 + \left(\frac{A'}{A}\right)'(n^2 + m^2 g^2)g = L.$$

De ces équations on déduit en premier lieu que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sont fonctions de g. En effet, par élimination de $\mathcal{B}$, on a

$$\mathcal{A}'_v = f_1(g, \mathcal{A})g'_v, \qquad \mathcal{A}'_u = f(g, \mathcal{A})g'_u,$$

d'où, en égalant la dérivée par rapport à u de la première expression à la dérivée par rapport à v de la seconde,

$$(f - f_1)g''_{uv} + \left(f'_g + f'_{\mathcal{A}}f_1 - f'_{1g} - f'_{1\mathcal{A}}f\right)g'_u g'_v = 0.$$

Mais $gg''_{uv} = g'_u g'_v$; et l'équation précédente détermine $\mathcal{A}$ en fonction de g.

Faisant $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ fonctions de g dans les équations du problème, il vient

$$\frac{A'}{Ag} = \frac{\mathcal{A}'}{\mathcal{B}}, \qquad \frac{A + gA'}{A} = \frac{\mathcal{B}'}{\mathcal{A}}, \qquad \mathcal{A}\mathcal{B} = L,$$

d'où

$$L' = \mathcal{A}^2\frac{A + gA'}{A} + \mathcal{B}^2\frac{A'}{Ag},$$

$$L'' - 4\frac{A + gA'}{A}\frac{A'}{Ag}L = \mathcal{A}^2\left(\frac{A + gA''}{A}\right)' + \mathcal{B}^2\left(\frac{A'}{Ag}\right)'.$$

Ainsi on a pour $\frac{A'}{A}$ une équation du troisième ordre; les surfaces correspondantes sont isothermiques et les rayons de courbure sont fonctions l'un de l'autre, en considérant u et v comme les paramètres des lignes de courbure.

8. Nous dirons qu'un système de coordonnées curvilignes sur une surface est isométrique lorsqu'en choisissant convenablement les paramètres de ces courbes, les coefficients du ds^2 de la surface sont fonctions d'un paramètre; et qu'une surface est isométrique lorsque les lignes de courbure formeront un système isométrique, réservant le terme isothermique pour le cas où les coefficients de du^2 et dv^2 sont égaux.

Étant donnée une surface isométrique, il y en a une infinité d'autres ayant même représentation sphérique. Elles sont données par les équations

$$\frac{A'}{B} = \varphi(\alpha), \qquad \frac{B'}{A} = f(\alpha),$$

α étant une fonction telle que les équations déterminant la représentation sphérique soient compatibles :

$$\varphi(\alpha)\alpha'_v = \frac{A'\alpha'_v}{B} = \frac{\mathcal{A}'_v}{\mathcal{B}}, \qquad \frac{B'}{A}\alpha'_u = f(\alpha)\alpha'_u = \frac{\mathcal{B}'_u}{\mathcal{A}},$$
$$\mathcal{A}\mathcal{B} = -\frac{\partial}{\partial v}\varphi(\alpha)\alpha'_v - \frac{\partial}{\partial u}f(\alpha)\alpha'_u.$$

Nous écartons les surfaces de révolution. On peut supposer $\varphi(\alpha) = 1$; alors

$$A'' - f(\alpha)A = 0, \qquad B = A',$$
$$A = C_1A_1 + C_2A_2, \qquad B = C_1A'_1 + C_2A'_2;$$

C_1, C_2 constantes arbitraires et A_1, A_2 solutions particulières linéairement distinctes de l'équation $A'' - f(\alpha)A = 0$.

Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont des fonctions de α, on peut prendre $\mathcal{A}$ pour A_1; le groupe de surfaces est formé des surfaces homothétiques et parallèles à l'une d'elles et de sphères; on a les surfaces de Weingarten.

Pour qu'il y ait des surfaces isothermiques, il faut que $f(x)$ soit égal à ± 1; alors $A_1 = e^{\alpha}$, $A_2 = e^{-\alpha}$, les valeurs correspondantes de B sont A_1 et $-A_2$, en supposant $f(\alpha) = 1$. Les surfaces dont les éléments linéaires sont $e^{2\alpha}(du^2 + dv^2)$, $e^{-2\alpha}(du^2 + dv^2)$ ont même représentation sphérique, et la correspondance établie réalise une représentation conforme de l'une sur l'autre. Nous aurons le théorème de Christoffel en montrant qu'il n'y a pas d'autre couple de surfaces, les surfaces minima étant écartées, jouissant de cette double propriété. Prenons pour variables u, v, les paramètres des lignes de courbure de l'une des surfaces; les lignes correspondantes sur l'autre surface sont rectangulaires et, puisque leurs représentations sphériques sont rectangulaires, elles sont lignes de courbure, attendu que la surface n'est pas minima (nº 3). Les ds^2 des surfaces étant

$$A^2 du^2 + B^2 dv^2, \qquad A_1^2 du^2 + B_1^2 dv^2,$$

on a donc

$$\frac{A'_v}{B} = \frac{A'_{1v}}{B_1}, \qquad \frac{B'_u}{A} = \frac{B'_{1u}}{A_1}, \qquad A_1 = +\lambda A, \qquad B_1 = \pm \lambda B,$$

d'où

$$A'_{1v} = \lambda A'_v + A\lambda'_v, \qquad B'_{1u} = \pm(\lambda B'_u + B\lambda'_u);$$

faisant l'hypothèse $B_1 = -\lambda B$, il vient

$$A^2\lambda = \varphi(u), \qquad B^2\lambda = \psi(v),$$

après avoir intégré. Par un choix convenable de u et de v, on aura donc $A^2 = B^2$.

9. Si parmi les surfaces satisfaisant aux équations

$$\frac{A'_v}{B} = \frac{\mathcal{A}'_v}{\mathcal{B}} = \lambda, \qquad \frac{B'_u}{A} = \frac{\mathcal{B}'_u}{\mathcal{A}} = \mu, \qquad \mathcal{A}\mathcal{B} = -\lambda'_v - \mu'_u,$$

il y en a d'isothermiques, elles doivent admettre en A, B un système de solutions de la forme $A = e^{\nu_1}U$, $B = e^{\nu_1}V$, U, V ne dépendant respectivement que de u, v; on aura donc

$$\lambda = \frac{U}{V}\nu'_{1v}, \qquad \mu = \frac{V}{U}\nu'_{1u},$$

d'où, pour déterminer U et V, l'équation

$$\frac{\partial}{\partial u}\lambda\frac{V}{U} = \frac{\partial}{\partial v}\mu\frac{U}{V}.$$

Soit $\lambda = \nu'_v$, $\mu = \nu'_u$. On aura d'abord les surfaces isothermiques $A = B = e^{\nu}$, $A = -B = e^{-\nu}$. Pour trouver les autres, s'il y en a, il viendra en posant $\frac{1}{U^2} = x$, $\frac{1}{V^2} = y$,

$$\nu'_{1y} = \sqrt{\frac{x}{y}}\,\nu'_y, \qquad \nu'_{1x} = \sqrt{\frac{y}{x}}\,\nu'_x,$$

$$2\nu''_{yx}(x-y) - \nu'_x + \nu'_y = 0, \qquad A = e^{\pm\nu_1}\frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad B = \frac{\pm e^{\pm\nu_1}}{\sqrt{y}}.$$

les signes supérieurs et inférieurs se correspondant. Soit

$$e^{\nu} = [f(u) - f_1(v)]^{\alpha};$$

on peut prendre, h étant une constante arbitraire,

$$x = f(u) + h = \frac{1}{U^2}, \qquad y = f_1(v) + h = \frac{1}{V^2}, \qquad e^{\pm\nu_1} = \left(\frac{\sqrt{x} - \sqrt{y}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}\right)^{\pm\alpha},$$

ou

$$\sqrt{x} = f(u) + h = \frac{1}{U}, \qquad \sqrt{y} = f_1(v) + h = \frac{1}{V},$$

$$e^{\pm\nu_1} = \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\pm\alpha}.$$

Supposons $\mathcal{A} = \mathcal{B} = [f(u) - f_1(v)]^{\alpha}$; les rayons de courbure principaux de la surface dont le carré de l'élément linéaire est

$$(1) \qquad \left(\frac{1}{f_1 + h} - \frac{1}{f + h}\right)^{2\alpha} \left[\frac{du^2}{(f + h)^2} + \frac{dv^2}{(f_1 + h)^2}\right],$$

sont

$$(2) \qquad \frac{1}{(f_1 + h)^{\alpha}(f + h)^{\alpha+1}}, \quad \frac{1}{(f_1 + h)^{\alpha+1}(f + h)^{\alpha}}.$$

Or on connaît les valeurs possibles pour α, $f(u)$, $f_1(v)$.

Posons $f(u) = \rho$, $f_1(v) = \rho_1$; la courbure (k) de l'expression

$$(\rho - \rho_1)^{2\alpha}\left(\frac{d\rho^2}{R} - \frac{d\rho_1^2}{R_1}\right)$$

est donnée par l'équation

$$\frac{2k}{\alpha} = \frac{2(R - R_1)}{(\rho - \rho_1)^{2+2\alpha}} - \frac{R' + R'_1}{(\rho - \rho_1)^{1+2\alpha}}.$$

On en conclut, si k est constant, ou une fonction de ρ, ρ_1 qui devient une fonction holomorphe de ρ lorsqu'on remplace ρ_1 par ρ (laissé indéterminé), que l'exposant α ne peut prendre que les valeurs $\frac{1}{2}$ et -1. Pour k constant et

$$\alpha = \tfrac{1}{2}, \qquad R = m + n\rho + p\rho^2 + q\rho^3, \qquad R_1 = m + n\rho_1 + p\rho_1^2 + q\rho_1^3,$$

et

$$4k = -q$$

(Darboux, *Leçons sur la Théorie des surfaces*, IIIe Partie, p. 238).

Pour k constant et $\alpha = -1$, on a

$$R = m + n\rho + p\rho^2, \qquad R_1 = m_1 + n\rho_1 + p\rho_1^2$$

et

$$k = m_1 - m.$$

Les expressions (1) et (2) deviennent

$$(1') \qquad \left(\frac{1}{\rho_1 + h} - \frac{1}{\rho + h}\right)^{2\alpha} \left[\frac{d\rho^2}{R(\rho + h)^2} - \frac{d\rho_1^2}{(\rho_1 + h)^2 R_1}\right],$$

$$(2') \qquad \frac{1}{(\rho_1 + h)^\alpha (\rho + h)^{\alpha+1}}, \qquad \frac{1}{(\rho_1 + h)^{\alpha+1} (\rho + h)^\alpha}.$$

Pour $\alpha = -1$, les lignes de courbure sont des cercles; on a donc des cyclides de Dupin.

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, les lignes asymptotiques ont une courbure nulle [*voir* mon Mémoire *Sur la théorie des surfaces* (*Annales de l'École Normale*, 1897)]; par suite, les surfaces sont du second degré. Toutes ces surfaces ont même représentation sphérique, dans l'un et l'autre cas.

10. Ce qui précède permet de simplifier notablement la démonstration du théorème de Lamé sur les systèmes triples, orthogonaux et isothermes. Soit

$$A^2 dt^2 + B^2 du^2 + C^2 dv^2$$

le carré de l'élément linéaire de l'espace; la surface $v = \text{const.}$ a pour équation

$$\zeta = -\frac{1}{2C}\left(\frac{A'_v}{A}\xi^2 + \frac{B'_v}{B}y^2\right) + \ldots$$

(*voir* le Mémoire cité plus haut). Donc les valeurs de $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ pour cette surface sont $-\frac{A'_v}{C}$, $-\frac{B'_v}{C}$; d'où l'on déduit les six équations différentielles entre A, B, C. Soient

$$A = (t-u)^\alpha (v-t)^\alpha \frac{1}{T}, \qquad B = (u-v)^\alpha (t-u)^\alpha \frac{1}{U},$$
$$C = (v-t)^\alpha (u-v)^\alpha \frac{1}{V};$$

il vient pour la surface $v = \text{const.}$:

$$\mathfrak{A} = -\alpha \frac{(t-u)^\alpha V}{(u-v)^\alpha (v-t) T}, \qquad \mathfrak{B} = -\frac{\alpha (t-u)^\alpha V}{(u-v)(v-t)^\alpha U};$$

T, U, V sont respectivement des fonctions de t, u, v.

Le carré de l'élément de la représentation sphérique a donc pour expression

$$\sigma^2 V^2 \left(-\frac{1}{v-t} - \frac{1}{u-v}\right)^{2\alpha} \left[\frac{dt^2}{(v-t)^{2-2\alpha} T^2} + \frac{du^2}{(u-v)^{2-2\alpha} U^2}\right].$$

Il en résulte d'abord $\alpha = \frac{1}{2}$ ou $\alpha = -1$.

Pour $\alpha = \frac{1}{2}$, on doit pouvoir satisfaire aux équations

$$\frac{-V^2}{4(v-t)} = \rho, \qquad \frac{V^2}{4(u-v)} = \rho_1,$$

$$\frac{dt^2}{(v-t)T^2} = \frac{d\rho^2}{R}, \qquad \frac{du^2}{(u-v)U^2} = \frac{d\rho_1^2}{R_1},$$

R et R_1 ayant les valeurs suivantes :

$$m + n\rho + p\rho^2 - 4\rho^3, \qquad m + n\rho_1 + p\rho_1^2 - 4\rho_1^3;$$

on en déduit

$$\frac{1}{T^2} = \frac{V^4}{16(v-t)^3 R}, \qquad \frac{1}{U^2} = -\frac{V^4}{16(u-v)^3 R_1}.$$

Remplaçant ρ et ρ_1 par leurs valeurs, on voit que T^2 et U^2 doivent être des polynômes du troisième degré à coefficients égaux et par symétrie il en est de même de V^2. Réciproquement, si T^2, U^2, V^2 sont des polynômes du troisième degré à coefficients égaux, il viendra

$$R = \left[V^2 + (V^2)' \frac{V^2}{4\rho} + \frac{1}{2}(V^2)'' \left(\frac{V^2}{4\rho}\right)^2 + \frac{1}{6}(V^2)''' \left(\frac{V^2}{4\rho}\right)^3\right] \frac{-4\rho^3}{V^2},$$

$$R = -4\rho^3 - (V^2)'\rho^2 - \frac{1}{8}(V^2)''V^2\rho - \frac{1}{6.16}(V^2)'''V^4,$$

qui est bien de la forme voulue.

Pour $\alpha = -1$, on doit pouvoir satisfaire aux équations

$$\frac{1}{V(t-v)} = \rho, \qquad \frac{1}{V(u-v)} = \rho_1, \qquad \frac{dt^2}{(t-v)^4 T^2} = \frac{d\rho^2}{R},$$

$$\frac{du^2}{(u-v)^4 U^2} = -\frac{d\rho_1^2}{R}, \qquad R = m + n\rho + p\rho^2, \qquad R_1 = m + 1 + n\rho_1 + p\rho_1^2;$$

on en déduit

$$\frac{1}{V^2 R} = \frac{1}{T^2}, \qquad -\frac{1}{V^2 R_1} = \frac{1}{U^2};$$

d'où

$$n = p = 0.$$

U^2, V^2, T^2 sont des constantes et l'on a

$$T^2 = mV^2, \qquad U^2 = -(m+1)V^2, \qquad T^2 + U^2 + V^2 = 0$$

(Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, t. I, n° 154).

11. Dans tous les cas, si les familles d'un système triple orthogonal sont isothermes, on peut poser

$$A^2 = Q_1^2 Q_2^2, \qquad B^2 = Q_2^2 Q^2, \qquad C^2 = Q^2 Q_1^2,$$

les fonctions Q, Q_1, Q_2 étant indépendantes respectivement de t, u, v. Aucune des fonctions Q ne peut être nulle; dans le cas où leurs dérivées premières sont aussi différentes de o, où par conséquent Q dépend effectivement de u, v, Q_1 de t et de v, Q_2 de t et de u, le carré de l'élément linéaire de l'espace peut se mettre sous la forme

$$(t-u)^{2\alpha}(v-t)^{2\alpha}(u-v)^{2\alpha}\left[\frac{dt^2}{(u-v)^{2\alpha}T^2} + \frac{du^2}{(v-t)^{2\alpha}U^2} + \frac{dv^2}{(t-u)^{2\alpha}V^2}\right],$$

et, par conséquent, l'analyse du numéro précédent termine complètement la solution. Posons

$$Q = e^q, \qquad Q_1 = e^{q_1}, \qquad Q_2 = e^{q_2};$$

on a toujours les équations suivantes, qui se réduisent à deux :

$$\begin{aligned}
q'_{2u} q'_{1v} &= q'_{2u} q'_v + q'_{1v} q'_u, \\
q'_{2t} q'_v &= q'_{2t} q'_{1v} + q'_v q'_{1t}, \\
q'_u q'_{1t} &= q'_u q'_{2t} + q'_{1t} q'_{2u}, \\
q'_{2t} q'_{1v} q'_u &+ q'_{2u} q'_v q'_{1t} = 0.
\end{aligned}$$

Si l'une des dérivées q' est nulle, soit $q'_{2u} = 0$ par exemple. Les équations précédentes donnent $q'_{1v} q'_u = 0$. L'hypothèse $q'_{1v} = 0$ est traitée complètement dans le Mémoire cité plus haut. L'hypothèse $q'_u = 0$, conduit, par la permutation de t et de u, à la forme suivante de l'élément linéaire de l'espace

$$U^2 V^2 dt^2 + Q^2(du^2 + dv^2),$$

U étant une fonction de u, V de v et Q une fonction de u et de v.

On a, entre les fonctions U, V, Q, les quatre équations

$$\frac{U'}{U}Q'_v + \frac{V'}{V}Q'_u = \frac{U'}{U}\frac{V'}{V}Q,$$
$$UV'Q'_v - U'VQ'_u = -U''VQ = UV''Q,$$
$$\frac{\partial^2 lQ}{\partial u} + \frac{\partial^2 lQ}{\partial v^2} = 0.$$

On en déduit

$$UV'' + VU'' = 0, \qquad U'' = -K^2U, \qquad V'' = K^2V,$$

K^2 étant une constante. Puis

$$V'^2 = K^2V^2 + K_1, \qquad U'^2 = -K^2U^2 + K_2,$$
$$(K_1U^2 + K_2V^2)Q'_u = K_1UU'Q, \qquad (K_1U^2 + K_2V^2)Q'_v = KVV'Q,$$
$$Q = \sqrt{K_3(K_1U^2 + K_2V^2)}.$$

Posant $K_3K_1U^2 = \rho$, $K_3K_2V^2 = -\rho_1$, on aura

$$\rho\rho_1\,dt^2 + (\rho - \rho_1)\left(\frac{d\rho^2}{R} - \frac{d\rho_1^2}{R_1}\right)$$

pour expression de l'élément linéaire. Les surfaces correspondant aux valeurs constantes de t sont des plans. Par suite, R et R_1 (d'après le n° 9) sont des polynômes à coefficients égaux du second degré. Substituant dans les équations différentielles, on voit, en outre, que le terme constant doit être nul. Ainsi

$$R = a\rho^2 + b\rho, \qquad R_1 = a\rho_1^2 + b\rho_1$$

(Darboux, *Leçons sur les systèmes orthogonaux*, n° 151).

12. Les formules d'Olinde Rodrigues et celles du n° 3 subsistent pour les surfaces de l'espace à n dimensions lorsque les lignes de courbure sont coordonnées.

Supposons x, y, z, w fonctions des paramètres t, u, v des lignes de courbure et prenons pour axes des ξ, η, ζ, ω les tangentes aux lignes de courbure et la normale à la surface. l, m, n, p étant les cosinus des angles de cette normale avec les axes, on a

$$(1)\quad \begin{cases} l^2 + m^2 + n^2 + p^2 = 0, & lx'_t + my'_t + nz'_t + pw'_t = 0, \\ lx'_u + my'_u + nz'_u + pw'_u = 0, & lx'_v + my'_v + nz'_v + pw'_t = 0, \end{cases}$$

puis

$$
\begin{array}{lll}
 & x'_t x'_u + y'_t y'_u + z'_t z'_u + w'_t w'_u = 0, & x'_u x'_v + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\
 & x'_u x'_t + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, & l x''_{uv} + m y''_{uv} + n z''_{uv} + p w''_{uv} = 0, \\
(2) & l x''_{vt} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0, & l x''_{tu} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,
\end{array}
$$

$$\xi = \mathrm{A}t + \xi_2 + \ldots, \qquad \eta = \mathrm{B}u + \eta_2 + \ldots, \qquad \zeta = \mathrm{C}v + \zeta_2 + \ldots,$$
$$\omega = \tfrac{1}{2}(a\zeta^2 + b\eta^2 + c\zeta^2) + \omega_3 + \ldots,$$

en posant

$$
\begin{array}{lll}
\mathrm{A} = \sqrt{x'^2_t + y'^2_t + z'^2_t + w'^2_t}, & \mathrm{B} = \sqrt{x'^2_u + \ldots}, & \mathrm{C} = \sqrt{x'^2_v + \ldots}, \\
a\mathrm{A}^2 = l x''_{t^2} + m y''_{t^2} + n z''_{t^2} + p w''_{t^2}, & b\mathrm{B}^2 = l x''_{u^2} + \ldots, & c\mathrm{C}^2 = l x''_{v^2} + \ldots,
\end{array}
$$

En dérivant les équations (1) par rapport à t, et tenant compte des équations (2), il vient

$$
\begin{aligned}
& l l'_t + m m'_t + n n'_t + p p'_t = 0, \\
& x'_t l'_t + y'_t m'_t + z'_t n'_t + w'_t p'_t = -\mathrm{A}^2 a, \\
& x'_u l'_t + y'_u m'_t + z'_u n'_t + w'_u p'_t = 0, \\
& x'_v l'_t + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.
\end{aligned}
$$

Multipliant la première de ces dernières équations par l, la seconde par $\frac{x'_t}{\mathrm{A}^2}$, la troisième par $\frac{x'_u}{\mathrm{B}^2}$, la quatrième par $\frac{x'_v}{\mathrm{C}^2}$, on a

$$l'_t + a x'_t = 0,$$

$l^2 + \frac{x'^2_t}{\mathrm{A}^2} + \frac{x'^2_u}{\mathrm{B}^2} + \frac{x'^2_v}{\mathrm{C}^2}$ étant égal à 1.

De même

$$m'_t + a y'_t = 0, \qquad n'_t + a z'_t = 0. \qquad p'_t + a w'_t = 0.$$

On a donc

$$
\begin{aligned}
l'^2_t + m'^2_t + n'^2_t + p'^2_t &= \mathrm{A}^2 a^2 = \mathcal{A}^2, \\
l'^2_u + m'^2_u + n'^2_u + p'^2_u &= \mathrm{B}^2 b^2 = \mathcal{B}^2, \\
l'^2_v + m'^2_v + n'^2_v + p'^2_v &= \mathrm{C}^2 c^2 = \mathcal{C}^2.
\end{aligned}
$$

$\mathcal{A}^2\, dt^2 + \mathcal{B}^2\, du^2 + \mathcal{C}^2\, dv^2$ représente le carré de l'élément de ce qu'on peut appeler la représentation sphérique de la surface.

Dérivant, par rapport à u, les valeurs de $\mathcal{A}$, A, il vient

$$\begin{aligned} AA'_u &= x'_t x''_{tu} + y'_t y''_{tu} + z'_t z''_{tu} + w'_t w''_{tu}, \\ \mathcal{A}\mathcal{A}'_u &= l'_t l''_{tu} + \dots\dots\dots\dots + p'_t p''_{tu}. \end{aligned}$$

Mais de $l'_u + bx'_u = 0$, on tire

$$l''_{tu} + bx''_{tu} + b'_t x'_u = 0;$$

d'où l'on déduit

$$\mathcal{A}\mathcal{A}'_u = + ab(x'_t x'_{tu} + \dots) = + ab\,AA'_u.$$

Ainsi

$$\frac{\mathcal{A}'_u}{A'_u} = \frac{\mathcal{C}'_u}{C'_u} = + b = \frac{\mathcal{B}}{B}, \qquad \frac{\mathcal{B}'_t}{B'_t} = \frac{\mathcal{C}'_t}{C'_t} = + a = \frac{\mathcal{A}}{A}, \qquad \frac{\mathcal{A}'_v}{A'_v} = \frac{\mathcal{B}'_v}{A'_v} = + c = \frac{\mathcal{C}}{C}.$$

Ces équations différentielles pour être compatibles exigent les conditions

$$\left(\frac{A'_u}{B}\right)'_v - \frac{A'_v}{C}\frac{C'_u}{B} = 0, \qquad \left(\frac{B'_v}{C}\right)'_t = \frac{B'_t}{A}\frac{A'_v}{C}, \qquad \left(\frac{C'_u}{B}\right)'_t - \frac{C'_t}{A}\frac{A'_u}{B} = 0,$$

lorsqu'on considère les fonctions $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ comme inconnues; on a évidemment les relations analogues en $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$; elles sont identiques à trois des six relations indiquées dans le n° **10** de mon Mémoire de 1897. Ainsi $\mathcal{A}^2 dt^2 + \mathcal{B}^2 du^2 + \mathcal{C}\, dv^2$ représentant le carré de l'élément linéaire de la sphère, les six équations écrites plus haut donneront les coefficients de l'élément linéaire des surfaces admettant la représentation sphérique donnée.

13. Les équations des lignes géodésiques de la surface $f(x, y, z, w) = 0$ peuvent s'écrire

$$\frac{x''}{f'_x} = \frac{y''}{f'_y} = \frac{z''}{f'_z} = \frac{w''}{f'_w} = \lambda$$

avec les conditions

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 + w'^2 = 1, \qquad f'_x x' + f'_y y' + f'_z z' + f'_w w' = 0,$$

l'arc s de la courbe étant la variable indépendante. Dérivant la dernière équation, il vient, pour déterminer λ,

$$[f'^2_x + f'^2_y + f'^2_z + \rho'^2_w]\lambda + x'\frac{d}{ds}f'_x + y'\frac{d}{ds}f'_y + z'\frac{d}{ds}f'_z + w'\frac{d}{ds}f'_w = 0.$$

En un point ordinaire, l'équation de la surface peut s'écrire, en prenant pour axe des w la normale,

$$w = w_2 + w_3 + \ldots + w_n + \ldots,$$

w_n étant une fonction homogène de degré n de x, y, z, et l'on pourra supposer $w_2 = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2 + cz^2)$, en prenant pour axes les directions principales de la surface, qu'elle ait ou non des lignes de courbure coordonnées. Les équations des lignes géodésiques deviennent

$$\frac{x''}{w'_{2x} + \ldots} = \frac{y''}{w'_{2y} + \ldots} = \frac{z''}{w'_{2z} + \ldots} = \frac{w''}{-1} = \lambda,$$

$$\lambda\left[1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right]$$
$$+ x'\frac{d}{ds}\frac{\partial w}{\partial x} + y'\frac{d}{ds}\frac{\partial w}{\partial y} + z'\frac{d}{ds}\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Soient

$$x = \alpha s + \alpha_2 s^2 + \ldots + \alpha_n s^n + \ldots,$$
$$y = \beta s + \beta_2 s^2 + \ldots + \beta_n s^n + \ldots,$$
$$z = \gamma s + \gamma_2 s^2 + \ldots + \gamma_n s^n + \ldots$$

les équations d'une ligne géodésique passant par l'origine; on aura

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$
$$\lambda = -2w_2(\alpha, \beta, \gamma) + \ldots,$$
$$x'' = -2s\, w_2(\alpha, \beta, \gamma)\, w'_{2\alpha} + \ldots,$$

par suite,

$$x = \alpha s - \tfrac{1}{3}s^3 w_2(\alpha, \beta, \gamma)\, w'_{2\alpha} + \ldots,$$
$$y = \beta s - \tfrac{1}{3}s^3 w_2(\alpha, \beta, \gamma)\, w'_{2\beta} + \ldots,$$
$$z = \gamma s - \tfrac{1}{3}s^3 w_2(\alpha, \beta, \gamma)\, w'_{2\gamma} + \ldots;$$
$$w = s^2 w_2(\alpha, \beta, \gamma) + \ldots,$$

s restant constant, donnons à α, β, γ les accroissements infiniment petits $\delta\alpha$, $\delta\beta$, $\delta\gamma$, satisfaisant à la condition

$$\alpha\,\delta\alpha + \beta\,\delta\beta + \gamma\,\delta\gamma = 0;$$

on trouvera

$$\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2 + \delta w^2 = s^2(\delta\alpha^2 + \delta\beta^2 + \delta\gamma^2)$$
$$+ \frac{s^4}{3}\left[(\delta w_2)^2 - 4\, w_2(\alpha, \beta, \gamma)\, w_2(\delta\alpha, \delta\beta, \delta\gamma)\right] + \ldots.$$

Le coefficient de s^4 ne reste constant sous la seule condition $\delta\alpha^2 + \delta\beta^2 + \delta\gamma^2$ constant, ainsi que s, que si w_2 est un carré parfait, auquel cas il est nul ou si $w_2 = a(x^2 + y^2 + z^2)$. Ainsi, pour qu'un triangle géodésique puisse être déplacé sur la surface sans déformation, il faut que les courbures principales de la surface en un point quelconque soient égales à une même constante, et, par suite, la surface est une sphère, puisque les formules d'Olinde Rodrigues subsistent; si, en outre, un triangle géodésique reste semblable à lui-même quand on réduit ses côtés dans un rapport constant, la surface est applicable sur l'espace euclidien à trois dimensions.