E. M. LÉMERAY

Sur quelques algorithmes généraux et sur l'itération

Bulletin de la S. M. F., tome 26 (1898), p. 10-15
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1898__26__10_0>

SUR QUELQUES ALGORITHMES GÉNÉRAUX ET SUR L'ITÉRATION;

Par M. Léméray.

Soit $f(x_0)$ une fonction de x_0 et ses itératives $f^2(x_0), f^3(x_0), \ldots$ définies comme l'on sait par la relation

$$f^{m+1}(x_0) = f(f^m(x_0)).$$

Posons $f^x(x_0) = F(x)$; à la fonction $f(x)$ correspond une fonction $F(x)$, son itérée; on peut dire inversement que $f(x)$ est la désitérée de $F(x)$; on peut à son tour itérer $F(x)$ et ainsi de suite. Pour mettre en évidence le nombre des itérations ou des désitérations effectuées, on peut écrire

$$f(x) = N(x) \quad \text{ou} \quad Nx$$

et noter des désitérées successives $(N - I)x$, $(N - II)x$, ... et ses itérées $(N + I)x$, $(N + II)x$, ...; ses itératives d'ordre positif ou d'ordre négatif étant notées comme d'habitude Nx, N^2x, N^3x, ..., $N^{-1}x$, $N^{-2}x$, $N^{-3}x$, ...

Je considérerai uniquement les fonctions de deux variables a et x

$$y = N(a, x);$$

a est la base et x le facteur; c'est par définition la variable par rapport à laquelle on fera les désitérations et les itérations; pour itérer on aura à répéter la substitution

$$x; \; N(a, x);$$

pour désitérer on aura à éliminer x_0 entre les équations

$$x = N(a, x_0) \qquad y = N(a, (x_0 + 1)).$$

Soit i une valeur initiale arbitraire, mais donnée de x_0, on aura

$$y_1 = y = N(a, i), \qquad y_2 = N(a, N(a, i)) = N^2(a, i)$$

et en général, si x est le nombre des substitutions,

$$y = N^x(a, i);$$

l'itération sera résolue, si l'on trouve une nouvelle fonction

$$y = (N + I)(a, x; i)$$

ayant les mêmes valeurs que la première pour les valeurs entières de x.

La notation signifie que l'initial i est lié à a par l'opération de mode N; x est le facteur de mode N + I. Soit, par exemple,

$$N(a,x) = x^a,$$

on a

$$N(a,i) = i^a, \qquad N^2(a,i) = i^{a^2}, \qquad \ldots$$

et l'on aperçoit l'itérée

$$(N+I)(a,x;i) = i^{a^x}.$$

Je me propose d'établir un certain nombre de théorèmes généraux sur les fonctions itérées des divers ordres d'une fonction donnée; c'est-à-dire que, supposant connues les propriétés des fonctions directes et inverses définies par la relation

$$y = N(a,x),$$

je chercherai les propriétés des fonctions définies par l'algorithme de mode N + I.

Afin de ne pas avoir recours à des néologismes, et pour faire ressortir certaines analogies, j'emploierai les termes usuels : produit, quotient, logarithme, etc. pour dénommer certaines fonctions; mais, pour éviter toute confusion, j'adjoindrai une lettre au terme usuel; c'est ainsi que l'on rencontrera les deux fonctions logarithme-L et logarithme-l qui sont distinctes entre elles et distinctes du logarithme ordinaire.

Soit la fonction

$$y = N(a,x;i),$$

qui, par définition, est l'itérée de la fonction

$$y = (N-I)(a,x),$$

nous dirons que y est la puissance-P$x^{\text{ième}}$ de a, l'initial étant i; que x, étant considéré comme fonction de y, est le logarithme-L de y dans le système de base a, l'initial étant i, et que a, considéré comme fonction de y, est la racine-R$x^{\text{ième}}$ de y, l'initial étant i. Considérons encore d'autres fonctions. Soient

$$u = N(a,p), \qquad v = N(a,q).$$

Appelons :

multiplication-M de u par v l'opération dont le résultat est la fonction

$$y = \mathrm{N}(a,p;\ \mathrm{N}(a,q)),$$

obtenue en prenant l'une des quantités u ou v pour en faire l'initial de l'autre;

division-D de y par v l'opération qui donne u en fonction de y et de v;

puissance-$pm^{\text{ième}}$ de u le produit-M, de m termes égaux à u; soit y cette fonction ;

Appelons : racine-$rm^{\text{ième}}$ de y, la quantité u dont la puissance-$pm^{\text{ième}}$ est y; logarithme-l de y dans le système de base u l'exposant de la puissance-p à laquelle il faut élever u pour obtenir y; dans toutes ces définitions la base des puissances-P est toujours supposée être a.

Il faut remarquer que les puissances-p ne constituent pas des opérations de mode $(\mathrm{N}+\mathrm{I})$. Quand u se réduit à $\mathrm{N}(a, 1)$ la fonction puissance-p se confond avec la puissance-P; le logarithme-L et le logarithme-l sont aussi une même fonction; mais il n'en est pas de même des racines-R et des racines-r.

Tant que le facteur est un entier positif ou négatif, ces fonctions présentent un sens déterminé; le calcul des puissances-P, des produits-M, des puissances-p, c'est-à-dire des fonctions directes, est possible ([1]).

Le problème de l'itération consiste à exprimer les puissances-P en fonction de x par un symbole présentant un sens quand ce facteur n'est pas entier.

Dans cette Note, j'établirai les quelques théorèmes généraux suivants :

Permutation de l'initial et de la fonction. — L'expression

$$y = (\mathrm{N}+\mathrm{I})(a,x;i) \tag{1}$$

est, par définition, équivalente à la suivante :

$$y = \mathrm{N}^x(a,i).$$

([1]) Si le facteur est négatif, le calcul ne pourra s'achever que si l'on sait inverser la fonction donnée.

Tirant i de cette dernière, on a

$$i = \mathrm{N}^{-1}(a, \mathrm{N}^{-1}(a \ldots y)) = \mathrm{N}^{-x}(a, y)$$

ou bien

$$(2) \qquad i = (\mathrm{N} + \mathrm{I})^{-1}(a, x;\, y).$$

En comparant (1) et (2) on voit que l'on peut permuter le premier membre et l'initial du second pourvu que l'on change le signe de l'exposant du mode.

Théorème d'addition. — Si dans l'expression

$$\mathrm{N}(a, x;\, i)$$

on remplace l'initial par

$$\mathrm{N}(a, x_1;\, i),$$

on a

$$\mathrm{N}(a, (x + x_1);\, i) = \mathrm{N}(a, x;\, \mathrm{N}(a, x_1;\, i)),$$

ce qui donne la signification du facteur somme.

Facteur différence. — Dans la relation précédente posons

$$x + x_1 = x_2,$$

d'où

$$x_1 = x_2 - x;$$

elle s'écrira

$$\mathrm{N}(a, x_2;\, i) = \mathrm{N}(a, x;\, \mathrm{N}(a, (x_2 - x);\, i)).$$

Permutant le premier membre et l'initial du second en changeant de signe l'exposant du mode, on aura

$$\mathrm{N}(a, (x_2 - x);\, i) = \mathrm{N}^{-1}(a, x;\, \mathrm{N}(a, x_2;\, i)).$$

Facteur nul. — Si l'on fait $x = 0$, on a

$$\mathrm{N}(a, x_2;\, i) = \mathrm{N}(a, 0;\, \mathrm{N}(a, x_2;\, i));$$

le premier membre et l'initial du second étant égaux, on en conclut que la puissance-P de facteur nul est égale à son initial.

Facteur négatif. — Dans une égalité précédente

$$\mathrm{N}(a, (x_2 - x);\, i) = \mathrm{N}^{-1}(a, x;\, \mathrm{N}(a, x_2;\, i))$$

faisons $x_2 = 0$, il reste

$$\mathrm{N}(n, -x;\, i) = \mathrm{N}^{-1}(a, x;\, i).$$

Il revient donc au même de changer le signe de l'exposant du mode, ou celui du facteur de ce mode, ce qui ramène la fonction inverse à s'exprimer par la fonction directe.

Facteur produit. — D'après ce qu'on a vu pour le facteur somme, on a

$$N(a,(x+x_1+x_2+\ldots);i) = N(a,x;N(a,x_1;N(a,x_2;N(a\ldots x_m;i))));$$

on a donc, si $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_m$,

$$N(a,xm;i) = N(a,x)\,N(a\ldots x;i))$$

où il y a m parenthèses; le second membre ne constitue pas une fonction de mode $N+1$, comme je l'ai déjà remarqué plus haut.

Dans le cas de m négatif, mx est négatif; on peut supposer m positif et x négatif, ce qui donne

$$N(a,(-mx);i) = N(a,-x;N(a\ldots -x;i))$$

ou encore, par le symbole de la fonction inverse,

$$N^{-1}(a,x;N^{-1}(a,x;N^{-1}(a\ldots x;i))).$$

Facteur quotient. — Dans l'égalité précédente

$$N(a,mx;i) = N(a,x;N(a,x;i))$$

posons $x = \frac{u}{m}$, elle donne

$$N(a,u;i) = N\left(a,\frac{u}{m};\ N\left(a,\frac{u}{m}\ldots;i\right)\right).$$

De ces différents théorèmes on tire immédiatement les conclusions suivantes :

Si l'on pose

$$N(a,x) = p, \qquad N(a,x_1) = q,$$

l'expression $N(a,(x+x_1))$ *est le produit-*M *de* p *par* q.

L'opération est commutative; on peut permuter p et q, mais il faut observer que le produit-M prend des valeurs différentes quand p et q conservent leurs valeurs; la base des puissances-P est différente de a.

Le logarithme-L d'un produit-M est la somme des logarithmes-L des différents termes.

L'expression $N(a,(x-x_1))$ est le quotient-D de p par q; et le logarithme-L d'un quotient-D est l'excès du logarithme-L du dividende sur celui du diviseur.

Le théorème relatif au facteur négatif montre que tout quotient-D peut se ramener au produit-M du dividende par le diviseur dont le logarithme-L a été changé de signe.

Des deux théorèmes suivants on tire que l'expression $N(a, mx)$ est la puissance-p $m^{\text{ième}}$ de $N(a, x)$; que $N\left(a, \frac{x}{m}\right)$ est la racine-r $m^{\text{ième}}$ de $N(a, x)$, ce qui donne la signification du facteur fractionnaire.

La puissance-p $m^{\text{ième}}$ d'un produit-M, celle d'un produit-D sont le produit-M ou le quotient-D des puissances-p $m^{\text{ièmes}}$ des deux termes.

Le logarithme-L de la puissance-p $m^{\text{ième}}$ de q est égal à m fois le logarithme-L de q; le logarithme-L de la racine-r $m^{\text{ième}}$ de q est la $m^{\text{ième}}$ partie du logarithme-L de q. La racine-r $m^{\text{ième}}$ de la puissance-p $m^{\text{ième}}$ de q est égale à la puissance-p $n^{\text{ième}}$ de la racine-r $m^{\text{ième}}$ de q et leur logarithme-L est $\frac{n}{m}$ celui de q.

En ce qui concerne les fonctions logarithmes-l, on voit d'une façon presque évidente que, la base des puissances-P étant toujours a, le logarithme-l de la puissance-p $m^{\text{ième}}$ de q est m fois le logarithme-L de q.

Par suite si un même nombre est à la fois la puissance-p $\mu^{\text{ième}}$ de $\alpha = N(a, \sigma)$ et la puissance-p $\nu^{\text{ième}}$ de $\beta = N(a, \tau)$, on a

$$\mu\sigma = \nu\tau \qquad \text{d'où} \qquad \nu = \mu\frac{\sigma}{\tau}.$$

Dans les systèmes de bases α et β, ses deux logarithmes-l seront donc entre eux comme l'inverse des logarithmes-L des deux bases; autrement dit, pour passer d'un système de logarithmes-l à un autre système de logarithmes-l, il suffit de multiplier les logarithmes-l du premier système par le rapport des logarithmes-L des bases du premier et du second système.

Il résulte de ces différentes considérations que les puissances-p et les racines-r peuvent toujours se ramener à des puissances-P, et que les logarithmes-l peuvent toujours se ramener à des logarithmes-L; je veux dire par là qu'on pourra les exprimer au moyen d'additions, de soustractions, de multiplications et de divisions ordinaires effectuées sur des fonctions puissances-P et logarithmes-L.

Dans une autre Note j'exposerai le calcul de ces fonctions générales et, sous certaines restrictions, ce calcul sera applicable, quelle que soit la valeur du facteur ou, autrement dit, quel que soit l'indice d'itération.