BULLETIN DE LA S. M. F.

G. FONTENÉ

Sur la décomposition d’une correspondance tangentielle

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 247-267
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__247_0>

SUR LA DÉCOMPOSITION D'UNE CORRESPONDANCE TANGENTIELLE;

Par M. G. Fonténé.

I.

1. On peut appeler *élément* d'une courbe X l'ensemble d'un point A et de la tangente a en ce point : un point nodal, une bitangente donnent deux éléments; un point de rebroussement, une tangente d'inflexion donnent un seul élément; à chaque élément d'une courbe est attachée une valeur d'un paramètre t qui lui correspond uniformément. Avec ce paramètre, une droite passant par un point de rebroussement (non par un point nodal) est une tangente parasite d'une courbe donnée par ses points; de même un point d'une tangente d'inflexion (non d'une bitangente) est un point parasite d'une courbe donnée par ses tangentes; à cela correspondent les formules

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} N &= n + \varkappa = 2(m + p - 1), \\ M &= m + \iota = 2(n + p - 1). \end{aligned} \right.$$

On peut compléter la courbe par des points (classe 1) places aux points de rebroussement, ou par des droites (ordre 1) placées sur les tangentes d'inflexion, et dire que N est la classe complète, que M est l'ordre complet. Le fait que tout point de rebroussement donne lieu à un point de ramification de la surface de Riemann qui répond à l'équation ponctuelle de la courbe est en relation avec ce qui précède.

2. On peut faire correspondre les éléments (a, A) d'une courbe X et les éléments (A', a') d'une courbe X', par la condition que la tangente a passe au point A' : nous donnerons à cette correspondance le nom de *correspondance tangentielle*, et c'est une correspondance (n, m') si X est de classe n et X' d'ordre m'. Supposons X complétée au point de vue ponctuel, X' complétée au point de vue tangentiel; lorsque A' est un point commun à X' et à X complétée, deux éléments (a, A) coïncident : le nombre

de ces coïncidences est $m' \times M$, ou $m' \times 2(n+p-1)$; lorsque a est une tangente commune à X et à X′ complétée, deux éléments (A', a') coïncident : le nombre de ces coïncidences est $n \times N'$, ou $n \times 2(m'+p'-1)$. Un contact des deux courbes complétées (contact ordinaire ou singulier, tangente a, point de contact A′) donne simultanément deux éléments (a, A) coïncidents si l'on part de A′, deux éléments (A', a') coïncidents si l'on part de a.

Les points communs à X′ et à X sont des points unis de la correspondance : leur nombre est $m' \times m$; les tangentes communes sont des tangentes unies : leur nombre est $n \times n'$.

3. La correspondance tangentielle (n, m') peut se décomposer en deux correspondances (α, α') et (β, β'), avec $\alpha + \beta = n$, $\alpha' + \beta' = m'$. Examinons les coïncidences :

1° Si A′ est un point commun à X′ et à X complétée, sans qu'il y ait contact ordinaire ou singulier en A′, en faisant mouvoir la tangente a dans le voisinage de la tangente en A′ ou dans le voisinage de la tangente d'inflexion, on reconnaît que les deux éléments (a, A) qui coïncident appartiennent tous deux à la correspondance (α, α'), ou tous deux à la correspondance (β, β'); nous désignerons par a le nombre de fois que deux éléments (a, A) coïncident ainsi dans la correspondance (α, α'), et par b le nombre analogue pour la correspondance (β, β'); il peut d'ailleurs arriver accidentellement que le fait en question se produise avec contact des deux courbes, et l'on en tiendra compte pour a et b. De même, si a est une tangente commune à X et à X′ complétée, sans qu'il y ait contact ordinaire ou singulier des deux courbes pour cette tangente, les deux éléments (A', a') qui coïncident appartiennent tous deux à la même correspondance; a' et b' indiqueront combien de fois deux éléments (A', a') coïncident dans chacune des deux correspondances, et l'on aura une remarque analogue à celle faite ci-dessus. Sur la courbe X, la correspondance entre deux points A qui donnent lieu à un même point A′ est, avec la notation de Clebsch, une correspondance $[\alpha'(\alpha-1), \alpha'(\alpha-1)]_{\alpha'}$, et, dans des conditions qui ne sont pas celles du problème, le nombre a aurait pour expression

$$2\alpha'(\alpha-1)+2p\alpha' \qquad \text{ou} \qquad \alpha' \times 2(\alpha+p-1);$$

nous écrirons ici

$$\begin{cases} a = \alpha' \times 2(\alpha + p - 1) - k_1, \\ a' = \alpha \times 2(\alpha' + p' - 1) - k_1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = \beta' \times 2(\beta + p - 1) - k_2, \\ b' = \beta \times 2(\beta' + p' - 1) - k_2; \end{cases}$$

l'accord des deux premières formules, par exemple, résulte de la formule de Zeuthen

$$a' - a = 2\alpha(p' - 1) - 2\alpha'(p - 1);$$

les nombres k_1 et k_2 sont nuls quand la correspondance tangentielle ne se décompose pas.

2° Le FAIT ESSENTIEL pour la décomposition d'une correspondance tangentielle est celui-ci : les deux courbes *complétées* auront un certain nombre c de *contacts nécessaires,* contacts pour lesquels, A′ étant le point de tangence, l'une des deux tangentes a coïncidentes appartient à la correspondance (α, α'), tandis que l'autre appartient à la correspondance (β, β'), et simultanément, a étant la tangente de contact, deux points A′ coïncident dans des conditions analogues. Comme plus haut, une correspondance $(\alpha'\beta, \beta'\alpha)$ sur X, ou sur X′, conduit à poser

$$c = \alpha\beta' + \beta\alpha' + \frac{k_1 + k_2}{2};$$

la valeur du terme $\frac{k_1 + k_2}{2}$ résulte de ce que l'on doit avoir

$$a + b + 2c = m' \times 2(n + p - 1),$$

ou encore

$$a' + b' + 2c = n \times 2(m' + p' - 1).$$

Je me propose d'établir, dans des cas très étendus, l'ÉGALITÉ des deux nombres k_1 et k_2 ; on aura alors

$$(2) \qquad \begin{cases} a = \alpha' \times 2(\alpha + p - 1) - k, \\ a' = \alpha \times 2(\alpha' + p' - 1) - k, \end{cases}$$

$$(3) \qquad \begin{cases} b = \beta' \times 2(\beta + p - 1) - k, \\ b' = \beta \times 2(\beta' + p' - 1) - k, \end{cases}$$

$$(4) \qquad c = \alpha\beta' + \beta\alpha' - k.$$

Ce résultat est surtout intéressant pour $\alpha = 1$, ou $\alpha' = 1$. Dans le premier cas on a $a = 0$, $k = 2p\alpha'$, et le nombre des contacts des deux courbes X et X′ complétées est

$$(5) \qquad c = m' + \alpha'(n + 2p - 2), \qquad \alpha = 1.$$

Il faut ajouter que, pour $\alpha = 1$, une tangente d'inflexion de X touche la courbe X′ complétée aux α' points correspondants : on voit en effet sur une figure que X′ ne peut traverser une tangente d'inflexion de X en un point qui fait partie de la correspondance $(1, \alpha')$; pour $\alpha' = 1$, un point de rebroussement de X′ est nécessairement un point multiple d'ordre α de X complétée; il y a là des contacts singuliers qui font partie de ceux qu'exige la décomposition. On peut écrire pour le nombre des autres contacts

$$\begin{cases} \alpha = 1, & c - \iota\alpha' = m' + \alpha'(m - n), \\ \alpha' = 1, & c - \varkappa'\alpha = n + \alpha(n' - m'). \end{cases}$$

Si l'une des deux correspondances est une correspondance uniforme, $\alpha = \alpha' = 1$, le nombre des contacts des deux courbes complétées est

$$c = m' + n + 2(p - 1), \qquad \alpha = 1, \qquad \alpha' = 1,$$

p étant le genre commun des deux courbes; toute tangente d'inflexion de X touche X′ complétée, tout point de rebroussement de X′ est sur X complétée.

(Dans le cas de deux courbes unicursales, α et α' étant quelconques, on a $k = 0$, et le nombre des conditions nécessaires pour la décomposition est $\alpha\beta' + \beta\alpha'$, ou c; mais des contacts en nombre c n'assurent pas la décomposition. Je compte revenir sur ce point.)

4. Pour démontrer que l'on a $k_1 = k_2$ il faut démontrer, par exemple, l'égalité

$$\begin{aligned} c + a &= \alpha(m' - \alpha') + (n - \alpha)\alpha' + \alpha' \times 2(\alpha + p - 1) \\ &= \alpha m' + \alpha'(n + 2p - 2), \\ c + a &= \alpha m' + \alpha'(m + \iota - n) \qquad \text{ou} \qquad (\alpha m' - \alpha' n) + \alpha'(m + \iota), \end{aligned}$$

dont la seconde forme s'obtient en retranchant et ajoutant $\alpha' n$ après la seconde ligne. Or, en transposant $\alpha'\iota$ le nombre $c + a - \alpha'\iota$ est le nombre des points unis de la correspondance (α, α'), chaque tangente d'inflexion de X amenant dans $c + a$ une contribution de α' unités qu'il faut écarter quand on considère les points unis pour les courbes non complétées. Les tangentes unies de la correspondance (α, α') sont de même en nombre $c + a' - \alpha x'$. En désignant par A le nombre des points unis de la correspondance (α, α'), par A' le nombre des tangentes unies, on a donc à établir les formules

$$(6) \quad \begin{cases} A = \alpha m' + \alpha'(m - n), \\ A' = \alpha' n + \alpha(n' - m'), \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} A = \alpha' m + (\alpha m' - \alpha' n), \\ A' = \alpha n' - (\alpha m' - \alpha' n), \end{cases}$$

et il suffit d'en établir une, puisque l'on a à démontrer seulement $k_1 = k_2$.

II.

5. Supposons d'abord que la correspondance tangentielle (α, α') est due à une correspondance dans le plan établie par les relations

$$ux + vy + wz = 0,$$
$$F(u, v, w, x, y, z) = 0,$$

dont la seconde est du degré α en u, v, w et du degré α' en (x, y, z); à une droite u, v, w du plan correspondent α' points qui sont les intersections de cette droite avec la courbe de transformation $F(u, v, w, x, y, z) = 0, \ldots.$ Soient

$$\varphi(u, v, w) = 0, \qquad \psi(x, y, z) = 0$$

les équations des deux courbes X et X', déduites l'une de l'autre par les relations ci-dessus. Il faut observer ceci : les choses devront être telles que, si l'on prend une tangente a à la courbe X, les α' points correspondants soient sur la courbe X', et que, si l'on prend un point A' sur la courbe X', les α droites correspondantes touchent la courbe X; avec $\alpha = 1$, le connexe

$$uX + vY + wZ = 0$$

peut être quelconque, et l'on peut se donner l'équation $\varphi(u, v, w) = 0$ de la courbe X; dans le cas général, si le connexe et la courbe X étaient quelconques, on obtiendrait bien la courbe X' comme lieu des α' points correspondant aux tangentes a de la courbe X, mais cette courbe X aurait une seule tangente correspondant à chaque point A' de la courbe X' : le connexe et la courbe X doivent être tels que, la courbe X ayant donné la courbe X' comme lieu de α' points, la courbe X′ donne la courbe X comme enveloppe de α droites. On remarquera encore que les trois connexes $ux + \ldots = 0$, $F = 0$, $\varphi = 0$ définissent le *couple de courbes* X et X′, et que l'absence des coordonnées x, y, z pour le troisième connexe permet aux deux courbes de n'être pas liées par une relation unidéterminative.

Supposons, comme on y est conduit par l'étude du cas particulier $\alpha = 1$, et du cas corrélatif $\alpha' = 1$, que certaines droites $u_0 x + v_0 y + w_0 z = 0$ (droites fondamentales du connexe F) font partie de la courbe de transformation correspondante

$$F(u_0, \ldots, x, \ldots) = 0,$$

de sorte que l'on ait

$$F(u_0, \ldots, x, \ldots) = (u_0 x + \ldots) \times f(u_0, \ldots, x, \ldots);$$

parmi les tangentes à la courbe X, une tangente simple ou multiple d'ordre G, une tangente simple ou multiple d'ordre H,... pourront être des droites u_0, v_0, w_0 comme les précédentes, et nous poserons

$$\theta = G + H + \ldots;$$

pour une telle droite, au lieu de α' points, on obtient tous les points de la droite, et cette droite se présente à titre parasite, G fois, H fois, ..., quand on déduit la courbe X′ de la courbe X. De même, parmi les points de la courbe X′, un point simple ou multiple d'ordre G′, un point simple ou multiple d'ordre H′, ... pourront faire partie (une fois) de la courbe de transformation correspondante, si la transformation admet de tels points (points fondamentaux du connexe F), et nous poserons

$$\theta' = G' + H' + \ldots.$$

La classe de la courbe X étant n, cherchons l'ordre m' de la courbe X′. Pour cela, cherchons les points où elle est rencontrée par une droite, ce qui donne à résoudre les quatre équations

$$ux + vy + wz = 0, \qquad Ax + By + Cz = 0,$$
$$F = 0, \qquad \varphi = 0,$$

dont les inconnues sont $x:y:z$, $u:v:w$; on a les u, v, w par les équations

$$F(u, v, w, Bw - Cv, \ldots) = 0, \qquad \varphi(u, v, w) = 0,$$

et le nombre des (u, v, w) est $(\alpha + \alpha')n$; mais il faut écarter θ solutions, et il en reste $(\alpha + \alpha')n - \theta$; de plus, chaque point de la couche X' correspond à α tangentes de la courbe X; on a donc la première des formules

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} \alpha m' &= (\alpha + \alpha')n \ - \theta, \\ \alpha' n &= (\alpha + \alpha') m' - \theta', \end{aligned} \right. \qquad \text{ou} \qquad \left\{ \begin{aligned} \alpha m' - \alpha' n &= \alpha n - \theta, \\ &= \theta' - \alpha' m', \end{aligned} \right.$$

et la seconde s'obtient de même. On peut en déduire

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha \theta' &= (\alpha^2 + \alpha\alpha' + \alpha'^2) n \ - (\alpha + \alpha')\theta, \\ \alpha'\theta &= (\alpha^2 + \alpha\alpha' + \alpha'^2) m' - (\alpha + \alpha')\theta\ ; \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \theta + \theta' &= \alpha n + \alpha' m', \\ \alpha'\theta + \alpha\theta' &= \alpha'^2 n + \alpha^2 m'. \end{aligned} \right.$$

6. Cherchons maintenant le nombre A des points unis de la correspondance (α, α'), en cherchant combien de fois un point A de X est l'un des α' points A' déterminés sur la tangente a par la courbe de transformation $F = 0$; si nous obtenons

$$(8) \qquad A = \alpha' m + \alpha n - \theta,$$

la comparaison avec (7) donnera

$$A - \alpha m' = \alpha'(m - n) \qquad \text{ou} \qquad A = \alpha' m + (\alpha m' - \alpha' n),$$

c'est-à-dire la première des formules (6); il faut donc établir la formule (8). Lorsque la courbe X est unicursale, la démonstration est immédiate : on doit avoir $F(u, v, w, x, y, z) = 0$, les quantités x, y, z étant ici les coordonnées du point A; or u, v, w sont égaux à des polynômes en t de degré n, et x, y, z sont égaux à des polynômes en t de degré m, d'où résulte une équation en t de degré $\alpha n + \alpha' m$; il faut d'ailleurs écarter des solutions en nombre θ. Dans le cas général, il faut d'abord évaluer l'ordre m de X; si, parmi les points de contact de la tangente multiple d'ordre G, il y en a en g qui sont des points d'inflexion, de sorte qu'il y a $G - 2g$ points de contact ordinaires, ..., et si X a encore τ_1 bitangentes et ι_1 tangentes d'inflexion, on doit poser pour les formules de Plücker

$$\tau + \iota = \frac{G(G-1)}{2} + \ldots + (\tau_1 + \iota_1),$$
$$\iota = (g + h + \ldots) + \iota_1$$

et c'est bien dans ce sens que la lettre ι a été employée partout, au n° 4 comme ailleurs, lorsqu'on a dit que $c + a - \alpha'\iota$ est le nombre des points unis de la correspondance (α, α'); on a alors

$$m = n(n-1) - (2\tau + 3\iota).$$

[Relativement à la classe n' de la courbe X', il y aurait à supposer de même que, parmi les tangentes au point multiple d'ordre G', il y en a en g' qui sont des tangentes de rebroussement, ...]. La formule (8), à vérifier, devient ainsi

$$A = n[\alpha + (n-1)\alpha'] - [\theta + \alpha'(2\tau + 3\iota)], \tag{9}$$

et le terme soustractif a pour valeur absolue

$$G[1 + \alpha'(G-1)] + g\alpha' + \ldots + \alpha'(2\tau_1 + 3\iota_1). \tag{10}$$

Or, pour avoir les points A qui coïncident avec l'un des α' points transformés, il faut résoudre les équations

$$\varphi(u, v, w) = 0,$$
$$F(u, v, w, \varphi'_u, \varphi'_v, \varphi'_w) = 0,$$

et le nombre des solutions, ou le nombre des tangentes communes aux deux courbes, est $n[\alpha + (n-1)\alpha']$, ce qui donne le premier terme de la formule (9); mais il faut obtenir la réduction (10). Pour chacune des τ_1 bitangentes de X on a $\varphi'_u = 0, \ldots$; c'est une tangente multiple d'ordre α' à la seconde courbe, et l'on doit écarter de ce chef $2\alpha'\tau_1$ solutions. Pour chacune de ι_1 tangentes d'inflexion de X, qui est d'abord une tangente multiple d'ordre α' à la seconde courbe, cherchons les tangentes à cette courbe issues du point d'inflexion I : u, v, w étant les coordonnées de la tangente d'inflexion, a, b, c étant les coordonnées d'une droite menée par le point d'inflexion, $u + \lambda a, \ldots$ sont les coordonnées d'une droite quelconque menée par ce point, et si l'on veut les tangentes à $F = 0$ menées par ce point, on doit considérer l'équation en λ que l'on obtient en substituant $u+\lambda a, \ldots$ à u, v, w dans $F=0$; or, soit

$$F=\sum M u^A v^B w^C (\varphi'_u)^D (\varphi'_v)^E (\varphi'_w)^F = 0,$$

avec $A+B+C=\alpha$, $D+E+F=\alpha'$; on aura

$$\begin{aligned}\varphi'_u(u+\lambda a, \ldots) &= \varphi'_u(u, v, w)+\lambda(a\varphi''_{uu}+b\varphi''_{uv}+c\varphi''_{uw})+\lambda^2\ldots\\ &= \lambda^2\ldots,\end{aligned}$$

puisque l'on a $\varphi'_u=0$, et aussi $a\varphi''_{uu}+\ldots=0$, la tangente a passant par le point d'inflexion dont les coordonnées homogènes sont $\varphi''_{uu}, \varphi''_{uv}, \varphi''_{uw}$; l'équation en λ admettra donc la racine zéro avec le degré de multiplicité $2\alpha'$, et, parmi les tangentes issues de I, $2\alpha'$ se confondent avec la tangente considérée qui est seulement multiple d'ordre α' ; on en conclut que l'on doit écarter $3\alpha'$ solutions pour chaque tangente d'inflexion. En second lieu il faut obtenir les réductions telles que $G[1+\alpha'(G-1)]+g\alpha'$; pour la première partie, il faut montrer que la courbe $F=0$ ci-dessus admet la tangente multiple d'ordre G de la courbe X comme tangente multiple d'ordre $1+\alpha'(G-1)$, en se rappelant que cette tangente multiple de X donne

$$F(u_0, \ldots, x, \ldots)=(u_0 x+\ldots)\times f(u_0, \ldots, x, \ldots),$$

auquel fait correspond le premier terme du binôme précédent, le θ de la formule (9) ayant donné $G\times 1$ dans l'expression (10) ; la démonstration est facile en supposant $u_0=0$, $v_0=0$, ce qui est permis, et en cherchant comme ci-dessus les tangentes à $F=0$ issues d'un point de la tangente considérée. Quant à la réduction $g\alpha'$, elle est analogue à la partie α' de la réduction $3\alpha'$ relative à une tangente d'inflexion.

7. Voici quelques remarques. La correspondance tangentielle (α, α') étant due à une correspondance dans le plan de la manière supposée, considérons l'une des τ_1 bitangentes de la courbe X qui ne sont pas des droites fondamentales u_0, v_0, w_0 du connexe F : les α' points correspondants de la courbe X' situés sur cette bitangente seront des points nodaux de X' ; inversement, ... ; on aura probablement $\alpha'\tau_1=\alpha\delta'_1$; la figure plane qui est la projection de la figure formée par un système de q plans montre comment

on peut avoir, par exemple, $\alpha = 3$, $\alpha' = q - 2$, $\delta'_1 = \frac{q(q-1)(q-2)}{6}$, $\tau_1 = \frac{q(q-1)}{2}$, chaque bitangente de X contenant $q - 2$ points nodaux de X′, chaque point nodal de X′ étant le point de départ de trois bitangentes de X. Pour l'une des ι_1 tangentes d'inflexion de X qui ne sont pas des droites fondamentales de F, les α' points correspondants de X′ situés sur cette tangente d'inflexion seront sans doute des points de rebroussement de X′; inversement, ...; on aura probablement $\alpha' \iota_1 = \alpha x'_1$.

Pour une tangente multiple d'ordre G de la courbe X qui est une droite fondamentale u_0, v_0, w_0 du connexe F, les α' points correspondants de X′ pourront être des points ordinaires; voici un exemple du fait corrélatif : si l'on considère un limaçon de Pascal X′ dont O est le point nodal, et un cercle bitangent X ayant son centre sur l'axe, la correspondance tangentielle (2, 4) se décompose en deux correspondances (1, 2) (1, 2), et chacune de ces correspondances fait partie d'une correspondance dans le plan de l'espèce considérée ici; O est un point fondamental, et les tangentes à X correspondantes ne donnent lieu à aucune remarque. Si des points de contact en nombre g sont des points d'inflexion, il en est encore de même, excepté dans le cas $\alpha = 1$ signalé à la fin du n° 3; voici un exemple du fait corrélatif, pour lequel $\alpha' = 1$ donne le cas réservé : même avec une cardioïde pour l'exemple ci-dessus, avec $\alpha' = 2$, le point de rebroussement O ne donne rien de particulier; il est vrai que, relativement aux points de rebroussements I et J du limaçon qui sont aussi des points fondamentaux, le cercle X passe par ces points, mais on pourrait remplacer le cercle X par une conique triplement tangente au limaçon et passant seulement en I ou en J; avec une quartique binodo-cuspidale, on aurait trois systèmes de coniques X et les coniques de l'un des systèmes ne passeraient pas au point de rebroussement; nous reviendrons sur ces faits. Quand on passe du limaçon à la cardioïde, une tangente unie disparaît dans chacune des deux correspondances par suite de l'abaissement de la classe.

8. Avec $\alpha = 1$, les équations de transformation sont

$$ux + vy + wz = 0,$$
$$uX + vY + wZ = 0,$$

et l'on a les formules de transformation

$$\frac{u}{yZ - zY} = \frac{v}{zX - xZ} = \frac{w}{xY - yX},$$

avec les $\alpha'^2 + \alpha' + 1$ points fondamentaux

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z},$$

qui laissent la droite correspondante indéterminée; quand on se donne u, v, w, les α' points A' sont, si l'on veut, les α' points mobiles communs aux deux courbes

$$\frac{u}{yZ - zY} = \frac{v}{zX - xZ}, \qquad \frac{v}{zX - xZ} = \frac{w}{xY - yX},$$

lesquelles passent constamment aux points fondamentaux. Il peut d'ailleurs exister des droites fondamentales, pour lesquelles les points A' sont indéterminés.

L'équation de la courbe X étant $\varphi(u, v, w) = 0$, l'équation de la courbe X' serait

$$\varphi(yZ - zY, \ldots, \ldots) = 0,$$

s'il n'existait pas de droites fondamentales tangentes à la courbe X; on aura d'une manière générale

$$m' = n(1 + \alpha') - \theta,$$

comme on le voit ici directement. On aura inversement, d'après (7),

$$\alpha' n = m'(1 + \alpha') - \theta',$$

et l'on peut aussi le voir directement : un point A' de X' donne pour la courbe X une tangente a qui passe par le point (a, b, c) si l'on a

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ X & Y & Z \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0,$$

et l'on aurait $m'(1 + \alpha') - \theta'$ tangentes, si chaque tangente ne correspondait pas à α' points.

La première des formules déduites de (7) devient

$$\theta' = (1 + \alpha' + \alpha'^2)n - (1 + \alpha')\theta,$$

que l'on explique facilement : avec $\theta = 0$, chacun des points fondamentaux, en nombre $1 + \alpha' + \alpha'^2$, serait un point multiple d'ordre n de la courbe X', et l'on aurait $\theta' = (1 + \alpha' + \alpha'^2)n$; mais, si la droite u_0, v_0, w_0 donne $u_0 X + \ldots = 0$, elle contient $1 + \alpha'$ points fondamentaux

$$\frac{X}{x} = \frac{Y}{y}, \qquad u_0 x + v_0 y + w_0 z = 0,$$

et, comme la courbe X' est débarrassée de la droite parasite $u_0 x + \ldots = 0$, ces $1 + \alpha'$ points sont seulement (de ce chef) des points multiples d'ordre $n - 1$ de X'; on a donc bien pour θ' la formule ci-dessus. Comment expliquerait-on la présence du nombre $1 + \alpha' + \alpha'^2$ dans l'autre formule? D'une manière générale, quel est le rôle du nombre $\alpha^2 + \alpha\alpha' + \alpha'^2$?

9. Les remarques du n° 7 restent exactes, pour $\alpha = 1$, avec l'exception signalée, pour laquelle nous renverrons à la fin du n° 3; on trouvera plus loin un exemple de cette exception relatif au cas où l'on a simultanément $\alpha = 1$, $\alpha' = 1$.

Voici une vérification des formules $\delta'_1 = \alpha'\tau_1$, $\varkappa'_1 = \alpha'\iota_1$. La formule de Zeuthen donne, a étant nul,

$$(11) \qquad a' = 2(p' - 1) - 2\alpha'(p - 1), \qquad \alpha = 1;$$

évaluons ici le genre p de la courbe X sans passer par l'ordre, le genre p' de X' sans passer par la classe; en supposant $\theta = 0$, on a d'abord

$$2(p - 1) = n^2 - 3n - 2(\tau_1 + \iota_1),$$

et, d'autre part, la courbe X' a $1 + \alpha' + \alpha'^2$ points multiples d'ordre n, avec $\alpha'(\tau_1 + \iota_1)$ points doubles, ce qui donne

$$\begin{aligned} 2(p' - 1) &= m'^2 - 3m' - (1 + \alpha' + \alpha'^2)n(n - 1) - 2\alpha'(\tau_1 + \iota_1) \\ &= \alpha' n^2 + n(\alpha'^2 - 2\alpha' - 2) - 2\alpha'(\tau_1 + \iota_1); \end{aligned}$$

on a alors

$$a' = n(\alpha' - 1)(\alpha' + 2),$$

et ce résultat est d'accord avec ce fait connu que, dans le connexe $F = 0$, les droites u, v, w qui touchent la courbe correspondante, courbe de transformation ici, ont pour enveloppe une courbe de classe $(\alpha' - \alpha)(\alpha' + 2\alpha)$.

On trouvera plus loin, pour le cas $\alpha = 1$, $\alpha' = 1$, un calcul analogue avec $\theta \neq 0$.

10. Pour $\alpha = 1$, $\alpha' = 1$, les équations de transformation sont, avec un choix convenable du triangle de référence,

$$ux + vy + wz = 0, \qquad Aux + Bvy + Cwz = 0;$$

d'où l'on déduit les formules de transformation

$$\frac{ux}{\lambda} = \frac{vy}{\mu} = \frac{wz}{\nu}, \qquad \lambda + \mu + \nu = 0;$$

si l'on écrit

$$\frac{x}{\lambda . vw} = \frac{y}{\mu . wu} = \frac{z}{\nu . uv},$$

on voit que les droites fondamentales a, pour lesquelles A' est indéterminé, sont les trois côtés du triangle de référence; de même, les points fondamentaux A', pour lesquels a est indéterminé, sont les trois sommets de ce triangle. Les deux courbes X et X' ayant pour équations

$$\varphi(u, v, w) = 0, \qquad \varphi\left(\frac{\lambda}{x}, \frac{\mu}{y}, \frac{\nu}{z}\right) = 0,$$

la courbe X pourra admettre la droite $x = 0$ comme tangente multiple d'ordre G, le nombre des points de contact avec inflexion étant g, ...; cette courbe X pourra être telle que la courbe X' admette le point $u = 0$ comme point multiple d'ordre G', le nombre des tangentes de rebroussement étant g', ...; on aura

$$\theta = G + H + K, \qquad \theta' = G' + H' + K',$$

et l'un ou l'autre des deux systèmes équivalents de quatre formules

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} m' &= 2n - \theta, \\ G' &= n - (H + K), \\ H' &= n - (K + G), \\ K' &= n - (G + H), \end{aligned}\right. \qquad \left\{\begin{aligned} n &= 2m' - \theta', \\ G &= m' - (H' + K'), \\ H &= m' - (K' + G'), \\ K &= m' - (G' + H'); \end{aligned}\right.$$

la courbe X', indépendamment des points multiples $v = 0$ et $w = 0$, d'ordres H' et K', coupe $x = 0$ en $G - 2g$ points, lui est tangente en g points, *ce qui est conforme à la remarque faite à la fin du n° 3*, et l'on a $G + H' + K' = m'$; de même la courbe X, indépendamment des tangentes multiples, $y = 0$, $z = 0$, d'ordres H et K, est supposée avoir $G' - 2g'$ tangentes issues du point $u = 0$, et admettre ce point comme point multiple d'ordre g'; la formule $m' = 2n - \theta$, connue par ce qui précède, résulte directement de ce que la courbe transformée d'un point est une conique circonscrite au triangle de référence. La réduction de θ' par θ, expliquée précédemment pour $\alpha = 1$, se fait ici dans des conditions très nettes, et l'on a $\theta' = 3n - 2\theta$, ... On peut écrire

$$(13)\qquad \left\{\begin{array}{c} G' - G \\ \text{ou } H' - H \\ \text{ou } K' - K \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} n - \theta, \\ \text{ou } \theta' - m', \end{array}\right. \qquad \theta + \theta' = n + m'.$$

Un calcul analogue à celui du n° 9 peut être fait sans supposer $\theta = 0$. Ce calcul consiste ici à vérifier que les deux courbes sont de même genre, indépendamment de l'hypothèse $\lambda + \mu + \nu = 0$. On doit avoir

$$\left\{\begin{array}{l} 2(p-1) = n^2 \ -3n \ - G(G-1) - \ldots - \ldots - 2(\tau_1 + \iota_1), \\ 2(p-1) = m'^2 - 3m' - G'(G'-1) - \ldots - \ldots - 2(\tau_1 + \iota_1), \end{array}\right.$$

à cause de $\delta'_1 = \tau_1$, $\varkappa'_1 = \iota_1$, et l'on vérifie l'accord de ces formules au moyen des formules (13).

Le nombre des points unis dans la correspondance (1, 1) est

$$A = c - (g + h + k) - \iota_1,$$

ou, d'après (9) et (10),

$$A = n^2 - (G^2 + \ldots) - (g + \ldots) - (2\tau_1 + 3\iota_1);$$

on peut ici dire que ces points sont donnés par les relations

$$\frac{u\varphi'_u}{\lambda} = \frac{v\varphi'_v}{\mu} = \frac{w\varphi'_w}{\nu},$$

en écartant les solutions étrangères. On peut considérer également les tangentes unies, qui donnent un calcul corrélatif. Le nombre des contacts véritables est alors

$$c - (g' + h' + k') - (g + h + k) - \iota_1$$

ou

$$m'^2 - (G'^2 + \ldots) - (g' + \ldots) - (2\tau_1 + 3\iota_1) - (g + h + k);$$

or, on retrouve ce nombre en cherchant le nombre des points communs à deux courbes X' qui correspondent à des valeurs infiniment voisines des paramètres λ, μ, ν, ou du moins le nombre des points communs dont le lieu forme l'enveloppe de X', débarrassée des points fixes et des tangentes fixes ; donc, si l'on fait varier λ, μ, ν sous la condition $\lambda + \mu + \nu = 0$, *l'enveloppe de la courbe* X' *est la courbe* X. On aurait un résultat corrélatif en se donnant l'équation de X' pour en déduire celle de X, avec λ, μ, ν que l'on ferait varier.

Comme exemple simple du cas $\alpha = 1$, $\alpha' = 1$, on peut avoir un limaçon de Pascal X', avec un cercle bitangent X n'ayant pas son centre sur l'axe : la correspondance tangentielle $(2, 4)$ se décompose en deux correspondances $(1, 1)$ et $(1, 3)$. Les points fondamentaux sont I, J et le point double O ; quand O est un point nodal, il ne donne rien de particulier (7), mais quand c'est un point cuspidal (cardioïde) le cercle X passe par ce point, conformément aux n^{os} 3, 7, 9 et à ce que l'on a vu plus haut ; le cercle X passe dans tous les cas par I et J, qui sont des points cuspidaux ; on a pour le limaçon $g' = 0$, $h' = 1$, $k' = 1$, et pour la cardioïde $g' = 1$, $h' = 1$, $k' = 1$.

Comme exemple assez général, on peut considérer une courbe X et la podaire oblique X' d'un point O par rapport à X. Avec des axes rectangulaires Ox, Oy, les coordonnées de la tangente a sont liées à celles du point A', pied de l'oblique OA' d'inclinaison V, par les relations

$$\begin{cases} ux + vy = 1, \\ -uy + vx = \operatorname{tang} V, \end{cases}$$

ou, en posant $u + vi = U$, $u - vi = V$, $x - yi = X$, $x + yi = Y$,

$$\begin{cases} UX + VY = 2, \\ UX - VY = 2i \operatorname{tang} V ; \end{cases}$$

le triangle des droites fondamentales et des points fondamentaux est le triangle OIJ, I et J étant les points cycliques. Si la courbe X admet la droite à l'infini comme tangente multiple d'ordre G et chacune des isotropes de O comme tangente multiple d'ordre $G + r$, la courbe X' pourra admettre le point O comme point multiple d'ordre G' et chacun des points I et J comme point multiple d'ordre $G' + r$; G' dépendra de la classe de X et l'on aura

$$n - G = m' - G' = G + G' + 2r.$$

Si l'angle V varie, la podaire X' a pour enveloppe la courbe X. Avec $G = 0$, $G' = 0$, $r = 1$, on a une conique X de foyer O et un cercle bitangent X' ayant son centre sur l'axe non focal; avec $G = 1$, $G' = 0$, $r = 0$, on a une parabole X de foyer O et une tangente X'; avec $G = 0$, $G' = 1$, $r = 0$, on a un cercle X' passant en O et un point X du cercle. Avec $G = 0$, $G' = 2$, $r = 0$, on a un cercle X et un limaçon de Pascal X'.

III.

11. Supposons maintenant que X est une courbe unicursale dont les tangentes a sont données par l'équation

$$x\lambda(t) + y\mu(t) + z\nu(t) = 0,$$

les polynômes λ, μ, ν étant de degré n; déterminons α' points sur chaque tangente en la coupant par la courbe variable

$$t^r A(x, y, z) + t^{r-1} B(x, y, z) + \ldots = 0,$$

les polynômes A, B, ... étant de degré α'; le lieu de ces α' points est une courbe X' dont on aura le degré m' en disant : si l'on cherche les points de cette courbe situés sur la droite $ax + by + cz = 0$, on doit remplacer x, y, z par $c\mu(t) - b\nu(t), \ldots$, ce qui donne une équation en t du degré $\alpha' n + r$, et tel serait le degré de la courbe X'; si, pour des valeurs t_0 de t en nombre θ, la tangente à X fait partie de la courbe de transformation ci-dessus, il faut supprimer θ droites dans la courbe X'; enfin, si les choses sont telles qu'un point de X' corresponde à α tangentes de X, on aura la formule

$$(14) \qquad \alpha m' = \alpha' n + (r - \theta),$$

qui remplace la première des formules (7). Soit maintenant m l'ordre de X, de sorte que l'on aura pour le point A

$$\frac{x}{L(t)} = \frac{y}{M(t)} = \frac{z}{N(t)},$$

avec des polynômes de degré m; on aura un point uni de la correspondance (α, α') qui existe entre A et A' en remplaçant x, y, z par $L(t)$, ... dans l'équation de la courbe variable ci-dessus, ce qui donne une équation en t du degré $\alpha' m + r$; mais il faut supprimer les θ valeurs t_0 qui se présentent dans ce calcul, puisque le point A_0 est sur la tangente a_0, et l'on a la formule

$$A = \alpha' m + (r - \theta), \tag{15}$$

qui remplace la formule (8). On a alors

$$A - \alpha m' = \alpha'(m - n) \quad \text{ou} \quad A = \alpha' m + (\alpha m' - \alpha' n),$$

c'est-à-dire la première des formules (6).

Les premières remarques du n° 7 n'ont plus lieu ici.

IV.

12. Le cas où X, par exemple, est une conique mérite une mention spéciale et nous remonterons ici aux formules (2), (3), (4). Si la correspondance tangentielle $(2, m')$ se décompose, on a nécessairement une correspondance $(1, \alpha')$ et une correspondance $(1, \beta')$; un point A′ commun à X′ et à X donne deux tangentes a coïncidentes qui ne peuvent appartenir à la même correspondance $(1, \alpha')$ ou $(1, \beta')$: la courbe X′ est donc tangente en A′ à la conique; le nombre des contacts, ordinaires ou singuliers, est alors m', quel que doive être α'. Dans les formules (2), (3), (4), il faut faire $p = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $a = 0$, $b = 0$, ce qui donne $k = 0$, $c = m'$; la formule (5) montre mieux l'importance du cas $n = 2$.

Considérons la courbe X′ donnée par l'équation

$$X f_{m-1}^2 - f_m^2 = 0, \tag{16}$$

$X = 0$ étant l'équation ponctuelle de la conique X; c'est une courbe d'ordre $2m$, ayant $m(m-1)$ points doubles, et qui a $2m$ contacts avec la conique X. Une courbe d'ordre $2m$ ayant ces propriétés doit d'ailleurs dépendre de $m(m+2)$ paramètres, ce qui est le nombre des paramètres de l'équation ci-dessus, X étant donné; mais cela ne signifie pas que toute courbe d'ordre $2m$ ayant les propriétés indiquées a une équation de la forme ci-dessus; la courbe X′ est ici l'enveloppe des courbes

$$\lambda^2 f_{m-1}^2 + 2\lambda f_m + X = 0,$$

et l'on peut observer que les $m(m-1)$ points doubles de X′ et les $2m$ points de contact de X′ avec X sont à une courbe d'ordre m, que λ infini donne la courbe double $f_{m-1}^2 = 0, \ldots$.

Je dis maintenant que la correspondance tangentielle $(2, 2m)$ entre X et X′ se décompose en deux correspondances $(1, m)$ et $(1, m)$. Avec les idées du paragraphe III, la conique est l'enveloppe de la droite

$$xt^2 + 2yt + z = 0,$$

et son équation est $y^2 - xz = 0$, ou

$$(xt + y)^2 - x(xt^2 + 2yt + z) = 0;$$

l'équation de X′ devient

$$(y^2 - xz) f_{m-1}^2 - f_m^2 = 0,$$

ou

$$[(xt + y)^2 - x(xt^2 + 2yt + z)] f_{m-1}^2 - f_m^2 = 0;$$

en coupant cette courbe par la tangente variable $xt^2 + \ldots = 0$, on a $2m$ points qui se séparent en deux groupes de m points, attendu que l'on a, avec $\varepsilon = \pm 1$,

$$(xt + y) f_{m-1} + \varepsilon f_m = 0;$$

on a aussi bien

$$(yt + z) f_{m-1} - \varepsilon t f_m = 0.$$

On aurait ici $n = 2$, $r = 1$, $\alpha' = m$, $\theta = 1$ ($t = \infty$, ou $t = 0$, selon la courbe de transformation employée), $\alpha = 1$, et par suite $m' = 2m$.

Pour passer aux idées du paragraphe II, nous éliminerons y entre les équations ci-dessus des deux courbes de transformation et nous aurons la courbe plus symétrique

$$t^2 x f_{m-1} + 2\varepsilon t f_m - z f_{m-1} = 0;$$

les coordonnées u, v, w de la tangente à la conique étant t^2, $2t$, 1, on a les équations de transformation

$$\begin{cases} u.xf_{m-1} + \varepsilon v.f_m - w.zf_{m-1} = 0, \\ ux + vy + wz = 0, \end{cases}$$

avec les formules

$$\frac{u}{z(yf_{m-1} + \varepsilon f_m)} = \frac{v}{-2xzf_{m-1}} = \frac{w}{x(yf_{m-1} - \varepsilon f_m)},$$

et les points fondamentaux

$$\begin{cases} f_m = 0 \\ f_{m-1} = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ y f_{m-1} + \varepsilon f_m = 0 \end{cases} \begin{cases} z = 0 \\ y f_{m-1} - \varepsilon f_m = 0 \end{cases} \begin{cases} x = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

La conique ayant pour équation tangentielle $v^2 - 4uw = 0$, on a ici $\theta = 2(v, w = 0$ et $v = 0, u = 0)$, et l'équation ponctuelle de X′, déduite de l'équation tangentielle de X, se présente avec le facteur xz; on a d'ailleurs $\theta' = 2m^2$, avec $m(m-1)$ points doubles, m point simples, m autres points simples.

On peut encore démontrer la décomposition de la correspondance tangentielle en menant des tangentes à la conique X par un point pris sur X′; on laisse l'équation de X′ sous la forme (16), et l'on s'appuie sur cette remarque : Si l'on cherche, avec un paramètre t, les tangentes menées à une conique X par un point x_1, y_1, z_1 du plan, et si l'on résout l'équation du second degré en t, on a sous le radical la seule quantité X_1, puisque les racines ne deviennent égales que pour $X_1 = 0$; on le vérifie aisément en considérant le point donné comme l'intersection des droites u_1, v_1, w_1 et u, v, w, en écrivant que la droite $u_1 + tu, \ldots$ est tangente, etc. Dès lors, les deux tangentes se sépareront si le point est pris sur la courbe X′, puisqu'on aura alors constamment

$$\sqrt{X_1} = \frac{f_m(x_1, \ldots)}{f_{m-1}(x_1, \ldots)}.$$

Avec $m = 1$, les deux courbes X et X′ sont deux coniques doublement tangentes.

13. Avec $m = 2$, la courbe X′ est une quartique binodale qui peut être quelconque. Parmi les systèmes de coniques quadruplement tangentes à une quartique binodale X′, et qui sont en nombre $2^4 - (2+1)$ ou 13, est un système qui comprend la droite double AC; l'équation de cette droite étant $f_1 = 0$, une conique du système ayant pour équation $X = 0$, l'équation de X′ peut se mettre sous la forme

$$X f_1^2 - f_2^2 = 0;$$

la correspondance tangentielle (2, 4) entre X et X′ se décompose donc en deux correspondances (1, 2) et (1, 2). Si A est un point de rebroussement de X′, les coniques X passent en A et sont triplement tangentes à X′; si A et C sont des points de rebroussement de X′, les coniques X passent en A et C et sont doublement tangentes à X′ : par exemple, si X′ est une cartésienne, les coniques X sont les cercles bitangents qui ont leurs centres sur l'axe.

Pour une quartique trinodale, dont les points doubles sont A, B, C, il existe trois systèmes de coniques X quadruplement tangentes analogues au système précédent; on vérifierait ici les faits indiqués à la fin du n° 7. La quartique peut être un limaçon de Pascal, la conique étant un cercle bitangent qui a son centre sur l'axe.

14. Une quartique trinodale X′ admet un quatrième système de coniques X quadruplement tangentes, et l'on est alors dans le cas du n° 10 : la correspondance tangentielle (2, 4) se décompose en deux correspondances (1, 1) et (1, 3). L'équation de X′, rapportée au triangle ABC des points doubles, est

$$\frac{a}{x^2}+\ldots+\frac{2f}{y^2}+\ldots=0,$$

et la transformation

$$\frac{ux}{\lambda}=\frac{vy}{\mu}=\frac{wz}{\nu},\qquad \lambda+\mu+\nu=0$$

donne une conique X; si l'on pose $A=bc-f^2$, ..., $F=gh-af$, ..., l'équation ponctuelle de la conique est

$$A\lambda^2x^2+\ldots+2F\mu\nu yz+\ldots=0,$$

et l'enveloppe de cette courbe, quand λ, μ, ν varient sous la condition $\lambda+\mu+\nu=0$, est la quartique X′. Si la quartique a $\varkappa'$ points de rebroussement, les coniques considérées ici passent par ces $\varkappa'$ points (fin du n° 3) et ont avec la quartique des contacts véritables au nombre $4-\varkappa'$; avec un limaçon de Pascal, ces coniques sont les cercles bitangents qui ont leurs centres sur le cercle dont le limaçon est une conchoïde, et ils sont liés au pôle d'anallagmatie situé sur l'axe.

15. On a des faits corrélatifs de ceux des n°s 12, 13, 14. Pour le n° 13, on considère une conique X′ et une courbe de quatrième classe X ayant deux bitangentes; la conique X′ est une conique quadruplement tangente à X, et du système qui comprend la conique formée des deux bitangentes; si l'une des bitangentes est remplacée par une tangente d'inflexion, la conique X′ doit toucher cette tangente et être triplement tangente à la courbe. On peut avoir une courbe de quatrième classe X ayant trois tangentes doubles, etc.

Pour le n° 14, X peut être un limaçon de Pascal, courbe de quatrième classe ayant deux tangentes d'inflexion et une bitangente : la conique X′ doit toucher les deux tangentes d'inflexion et être doublement tangente à X.

16. La quartique trinodale X′ des n^os 13 et 14 peut dégénérer en une cubique nodale et une droite : la conique X ayant trois contacts avec la cubique, la correspondance tangentielle (2, 3) se décompose en deux correspondances (1, 1) et (1, 2). Même résultat pour une courbe de troisième classe X ayant une tangente double et une conique X′; la courbe X est une quartique tricuspidale, une hypocycloïde à trois rebroussements par exemple, une cardioïde. Soit une courbe de troisième ordre et de troisième classe : elle a un point de rebroussement et une tangente d'inflexion; si on la prend comme courbe X′, la conique X doit passer par le point de rebroussement et être doublement tangente à la courbe; si on la prend comme courbe X, la conique X′ doit toucher la tangente d'inflexion et être doublement tangente à la courbe.

FIN DU TOME XXV.