

BULLETIN DE LA S. M. F.

A. BOULANGER

Sur l'équation de la propagation de la chaleur

Bulletin de la S. M. F., tome 25 (1897), p. 11-15

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__11_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1897__25__11_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1897, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

SUR L'ÉQUATION DE LA PROPAGATION DE LA CHALEUR;

Par M. A. BOULANGER.

Considérons l'équation qui régit la propagation de la chaleur dans un corps, sous la forme

$$(1) \quad \delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} - \frac{\partial u}{\partial x_4} = 0.$$

Proposons-nous de *trouver tous les systèmes de quatre fonctions* $X_m (m = 1, 2, 3, 4)$ *des variables* $x_i (i = 1, 2, 3, 4)$ *et d'une fonction* F *de* U *et des variables* x_i , *telles que si l'on remplace les quantités* X_m *en fonction des variables* x_i *dans une solution quelconque* $U(X_1, X_2, X_3, X_4)$ *de l'équation*

$$(2) \quad \delta' U = \frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial X_2^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial X_3^2} - \frac{\partial U}{\partial X_4} = 0,$$

la fonction $u(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv F(U, x_1, x_2, x_3, x_4)$, *ainsi obtenue, vérifie l'équation* (1) (1).

A cet effet, calculons le premier membre δu de l'équation (1) à l'aide de l'égalité $u(x_1, x_2, x_3, x_4) \equiv F(U, x_1, x_2, x_3, x_4)$. On a évidemment

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_i} &= \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} &= \frac{\partial F}{\partial U} \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial U^2} \left(\frac{\partial U}{\partial x_i} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial U \partial x_i} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}, \\ \frac{\partial U}{\partial x_i} &= \sum_{m=1}^{m=4} \frac{\partial U}{\partial X_m} \frac{\partial X_m}{\partial x_i}, \\ \frac{\partial^2 U}{\partial x_i^2} &= \sum_{m=1}^{m=4} \frac{\partial^2 U}{\partial X_m^2} \left(\frac{\partial X_m}{\partial x_i} \right)^2 + \sum_{m,n=1}^{m,n=4} \frac{\partial^2 U}{\partial X_m \partial X_n} \frac{\partial X_m}{\partial x_i} \frac{\partial X_n}{\partial x_i} + \sum_{m=1}^{m=4} \frac{\partial^2 U}{\partial X_m} \frac{\partial^2 X_m}{\partial x_i^2} \\ &\quad (i = 1, 2, 3, 4). \end{aligned}$$

(1) M. Painlevé s'est posé cette question pour l'équation de Laplace $\Delta V = 0$, dans un Mémoire sur la *Transformation des fonctions* $V(x, y, z)$ *qui satisfont*

Posons maintenant

$$\left. \begin{aligned} h_m^2 &= \sum_{i=1}^{i=5} \left(\frac{\partial X_m}{\partial x_i} \right)^2 \\ k_{m,n} &= \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial X_m}{\partial x_i} \frac{\partial X_n}{\partial x_i} \end{aligned} \right\} \quad (m, n = 1, 2, 3, 4).$$

Nous aurons de suite

$$\begin{aligned} \delta u &= \frac{\partial F}{\partial U} \left[\sum_{m=1}^{m=4} \left(h_m^2 \frac{\partial^2 U}{\partial X_m^2} + \frac{\partial U}{\partial X_m} \delta X_m \right) + \sum_{m,n=1}^{m,n=4} k_{m,n} \frac{\partial^2 U}{\partial X_m \partial X_n} \right] \\ &+ \frac{\partial^2 F}{\partial U^2} \left[\sum_{m=1}^{m=4} h_m^2 \left(\frac{\partial U}{\partial X_m} \right)^2 + \sum_{m,n=1}^{m,n=4} k_{m,n} \frac{\partial U}{\partial X_m} \frac{\partial U}{\partial X_n} \right] \\ &+ 2 \sum_{m=1}^{m=4} \frac{\partial U}{\partial X_m} \left[\sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial^2 F}{\partial U \partial x_i} \frac{\partial X_m}{\partial x_i} \right] + \sum_{i=1}^{i=3} \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2} - \frac{\partial F}{\partial x_4} \equiv \Phi. \end{aligned}$$

Il faut que cette quantité Φ s'annule identiquement si U est une solution de $\delta'U = 0$. Si donc on remplace dans Φ les x_i en fonction des X_i , on doit avoir identiquement

$$\Phi \equiv S \delta'U,$$

et, comme Φ gardera la même forme si l'on y conserve les variables x_i , il faut que l'expression ci-dessus de Φ soit de la forme $S \delta'U$. Cette condition nécessaire remplie, $\delta u = 0$ entraînera $\delta'U = 0$, et réciproquement.

Les conditions d'identification sont

$$\begin{aligned} \text{(I)} \quad & h_1^2 = h_2^2 = h_3^2, \\ \text{(II)} \quad & h_4^2 = 0, \\ \text{(III)} \quad & k_{m,n} = 0 \quad (m, n = 1, 2, 3, 4), \\ & \frac{\partial^2 F}{\partial U^2} = 0. \end{aligned}$$

Cette condition montre que F est une fonction linéaire de U ,

$$F = AU + B,$$

à l'équation $\Delta V = 0$ (*Travaux des Facultés de Lille*, Mémoire n° I, 1889).
M. Lacour, dans sa seconde Thèse, a traité un problème moins général pour l'équation de la propagation de la chaleur dans un plan; sa solution serait fort abrégée par le mode d'exposition indiqué ici.

A et B étant des fonctions des x_i . Les conditions suivantes s'écrivent alors

$$(IV) \quad \frac{1}{2} A \delta X_m + \sum_{n=1}^{n=3} \frac{\partial A}{\partial x_n} \frac{\partial X_m}{\partial x_n} = 0 \quad (m = 1, 2, 3),$$

$$(V) \quad \frac{1}{2} A (\delta X_4 + h_1^2) + \sum_{n=1}^{n=3} \frac{\partial A}{\partial x_n} \frac{\partial X_4}{\partial x_n} = 0,$$

$$\delta A = 0, \quad \delta B = 0.$$

On peut supposer B identiquement nul; en effet, si $AU + B$ répond au problème, AU y satisfait aussi.

Si l'on se limite au cas des fonctions réelles, la condition (II) montre que X_4 ne dépend que de x_4 , en sorte que la condition (V) se réduit à

$$h_1^2 = \frac{\partial X_4}{\partial x_4},$$

et les conditions (III), où figure l'indice 4, sont identiquement vérifiées.

Considérons x_4 comme un paramètre; les conditions (I) et les conditions (III) restantes sont celles qui définissent la représentation conforme de l'espace avec proportionnalité des éléments linéaires, le coefficient de proportionnalité étant $H = \pm \sqrt{\frac{\partial X_4}{\partial x_4}}$. Les figures étant alors semblables peuvent être amenées à coïncider par un déplacement suivi d'une homothétie de rapport H . On a donc

$$X_m = p_m + H \sum_{i=1}^{i=3} \alpha_{mi} x_i \quad (m = 1, 2, 3),$$

les coefficients α_{mi} étant les cosinus directeurs de trois directions rectangulaires et dépendant, ainsi que les coefficients p_m , du paramètre x_4 .

Les conditions (IV) se réduisent évidemment à

$$\frac{\partial}{\partial X_m} (2 H^2 \text{Log } A) = \frac{\partial X_m}{\partial x_4} = p'_m + \sum_{i=1}^{i=3} (H \alpha_{mi})' x_i,$$

les accents désignant des dérivations par rapport à x_4 . En rem-

plaçant les x_i en fonction des X_i dans le second membre, il vient

$$(IV bis) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_m} (2H^2 \text{Log } A) &= \frac{H'}{H} (X_m - p_m) + \sum_{i=1}^{i=3} \left[\alpha'_{mi} \sum_{n=1}^{n=3} \alpha_{ni} (X_n - p_n) \right] + p'_m \\ (m &= 1, 2, 3). \end{aligned} \right.$$

Je dis que les coefficients α sont constants. En effet, si l'on exprime que l'on a

$$\frac{\partial^2}{\partial X_m \partial X_n} (2H^2 \text{Log } A) = \frac{\partial^2}{\partial X_n \partial X_m} (2H^2 \text{Log } A),$$

il vient

$$\sum_{i=1}^{i=3} (\alpha'_{mi} \alpha_{ni} - \alpha_{mi} \alpha'_{ni}) = 0;$$

or la condition de perpendicularité des directions (α_n) et (α_m) donne

$$\sum_{i=1}^{i=3} (\alpha'_{mi} \alpha_{ni} + \alpha_{mi} \alpha'_{ni}) = 0.$$

Donc

$$\sum \alpha'_{mi} \alpha_{ni} = 0 \quad (m \neq n);$$

d'ailleurs

$$\sum \alpha'_{mi} \alpha_{mi} = 0.$$

On a ainsi trois équations linéaires et homogènes en α'_{mi} ($i = 1, 2, 3$) ayant pour déterminant 1. Donc $\alpha'_{mi} = 0$. c. q. f. d.

Cela posé, on a, d'après les relations (IV bis) simplifiées par le résultat précédent :

$$4H^2 \text{Log } A = \frac{H'}{H} \sum_{m=1}^{m=3} (X_m - p_m)^2 + 2 \sum_{m=1}^{m=3} p'_m X_m + \Psi(x_i),$$

ou, en revenant aux variables x_i ,

$$\mu = \text{Log } A = \frac{H'}{4H} \sum_{i=1}^{i=3} x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^{i=3} \left(x_i \sum_{m=1}^{m=3} \frac{p'_m \alpha_{mi}}{H} \right) + G(x_i).$$

Il reste à satisfaire identiquement à la dernière condition

$$\delta A = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{i=1}^{i=3} \left[\left(\frac{\partial \mu}{\partial x_i} \right)^2 + \frac{\partial^2 \mu}{\partial x_i^2} \right] = \frac{\partial \mu}{\partial x_i}.$$

En annulant le coefficient de Σx_i^2 dans le résultat de la substitution, il vient

$$\left(\frac{H'}{H}\right)' - \left(\frac{H'}{H}\right)^2 = 0 \quad \text{ou} \quad H = \frac{k}{x_4 + c}.$$

En annulant le coefficient de x_i , on a

$$\left(\sum_m \frac{p'_m \alpha_{mi}}{H}\right)' - \frac{H' \sum_m p_m \alpha_{mi}}{H^2} = 0,$$

ou

$$\sum_{m=1}^{m=3} \frac{p'_m \alpha_{mi}}{H} = \frac{\alpha_i H}{k}.$$

Les quantités k , c , α_i sont des constantes d'intégration. On déduit de là

$$p'_m = \frac{H^2}{k} \sum_{i=1}^{i=3} \alpha_i \alpha_{mi},$$

ou

$$p_m = -\frac{k}{x_4 + c} \sum \alpha_{mi} \alpha_i + \text{const.}$$

Enfin, il reste

$$\frac{H'}{H} + \frac{H^2}{k^2} \sum \alpha_i^2 - G'(x_4) = 0,$$

d'où

$$G(x_4) = \text{Log } H - \frac{\Sigma \alpha_i^2}{4(x_4 + c)} + \text{const.}$$

Réunissant les résultats obtenus, il vient

$$F = \frac{C}{x_4 + c} e^{-\frac{\Sigma (x_i - a_i)^2}{4(n_4 + c)}} U(X_1, X_2, X_3, X_4).$$

$$X_m = \frac{k}{x_4 + c} \sum_{i=1}^{i=3} \alpha_{mi} (x_i - a_i) + \text{const.} \quad (m = 1, 2, 3),$$

$$X_4 = -\frac{k^2}{x_4 + c}.$$

On reconnaît une extension des formules données par M. Lacour.