BULLETIN DE LA S. M. F.

L. RAFFY

# Surfaces rapportées à un réseau conjugué azimutal

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 24 (1896), p. 51-56
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1896__24__51_1>

## SURFACES RAPPORTÉES A UN RÉSEAU CONJUGUÉ AZIMUTAL;

Par M. L. Raffy.

1. Nous nous proposons d'étudier ici quelques applications d'un système de coordonnées curvilignes qui peut servir dans bien d'autres cas et qui dérive d'une proposition due à M. Kœnigs : *les sections faites dans une surface par des plans contenant une droite fixe et les courbes de contact des cônes circonscrits qui ont leurs sommets sur cette droite forment un réseau conjugué.* Pour rapporter une surface aux courbes d'un tel réseau, qu'on pourrait appeler *réseau conjugué azimutal,* il suffit de la considérer comme l'enveloppe des cônes circonscrits

$$\frac{z-v}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}, v\right),$$

qui ont leur sommet sur l'axe $Oz$. Posons

$$\frac{y}{x} = u, \qquad \frac{z-v}{x} = \varphi(u, v);$$

la surface sera définie par ces deux équations, jointes à l'équation dérivée

$$-\frac{1}{x} = \varphi'_v.$$

On a donc, en résolvant ce système,

$$(1) \qquad x = -\frac{1}{\varphi'_v}, \qquad y = -\frac{u}{\varphi'_v}, \qquad z = v - \frac{\varphi}{\varphi'_v}.$$

Les coefficients de l'élément linéaire ont par suite pour expressions

$$\begin{aligned}
E &= [(1 + u^2 + \varphi^2)\varphi''^2_{uv} - 2(u + \varphi\varphi'_u)\varphi'_v\varphi''_{uv} + (1 + \varphi'^2_u)\varphi'^2_v]\varphi'^{-4}_v, \\
F &= [(1 + u^2 + \varphi^2)\varphi''_{uv} - (u + \varphi\varphi'_u)\varphi'_v]\varphi''_{v^2}\varphi'^{-4}_v, \\
G &= (1 + u^2 + \varphi^2)\varphi''^2_{v^2}\varphi'^{-4}_v.
\end{aligned}$$

On a pareillement pour les coefficients de la seconde forme fondamentale

$$D = -\varphi''_{u^2}\varphi''_{v^2}\varphi'^{-4}_v, \qquad D' = 0, \qquad D'' = \varphi''^2_{v^2}\varphi'^{-4}_v,$$

en sorte que les lignes asymptotiques de la surface (1) ont pour équation différentielle

$$\varphi''_{u^2}\,du^2 - \varphi''_{v^2}\,dv^2 = 0,$$

ce qui permettrait d'indiquer nombre de surfaces dont on déterminerait les lignes asymptotiques par des quadratures.

**2.** *Surfaces de Joachimsthal.* — Nous allons très simplement *déterminer toutes les surfaces admettant pour lignes de courbure d'un système des courbes planes dont les plans passent par une droite fixe.* En effet, cette droite étant prise pour axe des $z$, les lignes de courbure du second système, devant former avec les premières un réseau conjugué, seront les courbes de contact des cônes circonscrits qui ont leurs sommets sur $Oz$. Pour avoir les surfaces cherchées, il nous suffira donc d'exprimer que le système conjugué $(u, v)$ est orthogonal, c'est-à-dire d'égaler F à zéro. Il n'y a pas lieu de s'arrêter à la solution $\varphi''_{v^2} = 0$, car, d'après les formules (1), la surface se réduit alors à une courbe, ses trois coordonnées ne dépendant que de la seule variable $u$. Soit donc

$$\frac{\varphi''_{uv}}{\varphi'_v} = \frac{u + \varphi\varphi'_u}{1 + u^2 + \varphi^2}.$$

Les deux membres de cette équation étant des dérivées logarithmiques, on en tire

$$V'^2(1 + u^2 + \varphi^2) = \varphi'^2_v,$$

$$V = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + u^2 + \varphi^2}},$$

en désignant par V une fonction arbitraire de $v$. Effectuons maintenant la quadrature indiquée et soit U une fonction arbitraire de $u$; nous aurons

$$\varphi = \sqrt{1 + u^2}\,\frac{e^{V-U} - e^{U-V}}{2}.$$

Pour abréger, posons suivant l'usage

$$\frac{e^{\omega} - e^{-\omega}}{2} = \mathrm{Sh}\,\omega, \qquad \frac{e^{\omega} + e^{-\omega}}{2} = \mathrm{Ch}\,\omega,$$

les seconds membres étant les *sinus* et *cosinus hyperboliques* de $\omega$. Les surfaces de Joachimsthal seront représentées par les formules

$$x = \frac{-1}{V'\sqrt{1 + u^2}\,\mathrm{Ch}(V - U)}, \quad y = \frac{-u}{V'\sqrt{1 + u^2}\,\mathrm{Ch}(V - U)}, \quad z = v - \frac{\mathrm{Sh}(V - U)}{V'\,\mathrm{Ch}(V - U)}.$$

On voit que les lignes de courbure du second système ($v =$ const.) sont tracées sur des sphères

$$x^2 + y^2 + (z - v)^2 = \frac{1}{V'^2}.$$

Si l'on pose $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, une ligne de courbure $u =$ const. sera définie dans son plan par les deux équations

$$(2) \qquad r = \frac{1}{V'\,\mathrm{Ch}(V - U)}, \qquad z = v - r\,\mathrm{Sh}(V - U),$$

qui représentent, quand $u$ varie ainsi que $v$, tous les points du plan $zOr$. Les lignes $v =$ const. constituent l'ensemble des cercles qui ont leur centre sur $Oz$

$$(z - v)^2 + r^2 = \frac{1}{V'^2}.$$

Les lignes $u =$ const. sont leurs trajectoires orthogonales; car le coefficient angulaire de la normale à l'un des cercles considérés est

$$\frac{z-v}{r}=-\operatorname{Sh}(\mathrm{V}-\mathrm{U})$$

et celui de la tangente à la courbe $u=$ const. est

$$\frac{z'_v}{r'_v}=\frac{1-r\mathrm{V}'\operatorname{Ch}(\mathrm{V}-\mathrm{U})-r'_v\operatorname{Sh}(\mathrm{V}-\mathrm{U})}{r_v}=-\operatorname{Sh}(\mathrm{V}-\mathrm{U}).$$

D'autre part, on peut considérer U comme un paramètre variable; alors $u$ devient une fonction arbitraire de U; d'où la génération suivante des surfaces de Joachimsthal :

*On considère une famille quelconque de cercles ayant leur centre sur* $Oz$, *et tracés dans le plan* $zOx$, *ainsi que leurs trajectoires orthogonales. On fait tourner chacune de ces trajectoires autour de* $Oz$, *d'un angle qui varie, d'après une loi arbitrairement choisie, quand on passe de l'une à l'autre; le lieu de ces diverses courbes ainsi déplacées est la surface cherchée.*

Un raisonnement géométrique simple, que l'on trouvera dans la *Théorie des surfaces* de M. Darboux (t. I, pp. 112-117), conduit à cette génération. Mais nous avons de plus l'expression analytique *explicite et sans quadratures* des coordonnées de la surface. Remarquons encore que les formules (2) donnent la solution de ce problème : *Trouver dans le plan les trajectoires orthogonales d'une famille quelconque de cercles ayant leurs centres en ligne droite.*

3. *Détermination des surfaces qui présentent un réseau conjugué azimutal à invariants égaux.* — Le réseau $(u, v)$ étant conjugué, on sait que les trois coordonnées $x$, $y$, $z$ des surfaces (1) satisfont à une équation de la forme

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial v}=\mathrm{B}\frac{\partial\theta}{\partial u}+\mathrm{B}_1\frac{\partial\theta}{\partial v}. \tag{3}$$

Pour trouver B et $B_1$, écrivons

$$(4)\qquad \begin{cases} x''_{uv} = B x'_u + B_1 x'_v, \\ y''_{uv} = B y'_u + B_1 y'_v. \end{cases}$$

Mais en vertu de la relation $y = ux$, on a

$$y'_u = ux'_u + x, \qquad y'_v = ux'_v, \qquad y''_{uv} = ux''_{uv} + x'_v.$$

Substituons ces dérivées dans la seconde des équations (4) en tenant compte de la première; il reste

$$B = \frac{x'_v}{x}.$$

Portons cette valeur de B dans l'équation (3); nous en tirons

$$B_1 = \frac{x x''_{uv} - x'_u x'_v}{x x'_v} = \frac{x}{x'_v}\left(\frac{x'_v}{x}\right)'_u = \frac{\partial \log B}{\partial u}.$$

Comme la première équation (1) donne $x$ en fonction de $\varphi$ et de $\varphi'_v$ nous aurons

$$(5)\qquad B = -\frac{\partial \log \varphi'_v}{\partial v}, \qquad B_1 = \frac{\partial \log B}{\partial u}.$$

On voit que B dépend des dérivées secondes et $B_1$ des dérivées troisièmes de $\varphi$.

Cherchons à déterminer la fonction $\varphi$ de manière que le réseau $(u, v)$ soit un réseau *à invariants égaux,* c'est-à-dire que l'on ait

$$(6)\qquad \frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial B_1}{\partial v}.$$

C'est là une équation aux dérivées partielles du quatrième ordre. Pour l'intégrer, déterminons B, qui satisfait par hypothèse à l'équation

$$(6)'\qquad \frac{\partial B}{\partial u} = \frac{\partial^2 \log B}{\partial u\, \partial v}.$$

De là on déduit, en désignant par V une fonction arbitraire de $v$,

$$B = \frac{B'_v}{B} - \frac{V'''}{V''},$$

$$\frac{V'' B'_v - B V'''}{B^2} = V''.$$

Intégrons et représentons par U une fonction arbitraire de $u$; il viendra

$$B = \frac{V''}{U - V'}.$$

Remplaçons maintenant B par son expression (5); nous aurons

$$\frac{\partial \log \varphi'_v}{\partial v} = \frac{V''}{V' - U}.$$

Par deux intégrations successives, qui introduisent deux nouvelles fonctions arbitraires, $U_0$ et $U_1$, de la variable $u$, on trouve finalement

$$\varphi = U_0(Uv - V) + U_1.$$

Grâce à cette détermination de $\varphi$, les formules (1) deviennent

$$x = \frac{1}{U_0(V' - U)}, \qquad y = \frac{u}{U_0(V' - U)}, \qquad z = \frac{U_0(vV' - V) + U_1}{U_0(V' - U)}.$$

Elles représentent *toutes les surfaces sur lesquelles existe un réseau conjugué azimutal à invariants égaux*. L'équation (3), que vérifient les coordonnées $x$, $y$, $z$ de ces surfaces, se réduit à

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v}[(V' - U)\theta] = 0,$$

comme on le reconnaît par un calcul facile.

Si, dans les formules que nous venons d'obtenir, on suppose $U = 0$, l'élimination de $u$ et $v$ peut être effectuée et l'on arrive à une équation de la forme

$$z = xf\left(\frac{y}{x}\right) + F\left[x\,\Psi\left(\frac{y}{x}\right)\right],$$

où les trois symboles $f$, F et $\Psi$ désignent des fonctions arbitraires. Dans ce type rentrent diverses classes de surfaces connues.