BULLETIN DE LA S. M. F.

C. A. LAISANT

Note relative aux asymptotes et aux cercles de courbure

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 95-97

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__95_1>

NOTE RELATIVE AUX ASYMPTOTES ET AUX CERCLES DE COURBURE;

Par M. C.-A. Laisant.

Théorème. — *Soit une courbe plane* Γ *ayant une asymptote* Δ. *Si l'on transforme la figure par inversion par rapport à un point* O *du plan, la courbe* Γ *se transforme en une courbe* Γ_1 *passant par* O, *et la transformée de l'asymptote* Δ *n'est autre que le cercle de courbure* Δ_1 *de la courbe* Γ_1 *au point* O.

Pour démontrer analytiquement cette proposition, il suffit de remarquer que la valeur du rayon de courbure en coordonnées polaires est donnée par la formule

$$R = \frac{(\rho^2 + \rho'^2)^{\frac{3}{2}}}{\rho^2 + 2\rho'^2 - \rho\rho''}.$$

Si donc on rapporte la courbe Γ_1 à un axe polaire passant en O, que l'on prend pour origine, et ayant par exemple une direction parallèle à celle de l'asymptote Δ, le rayon de courbure en O, perpendiculaire à l'axe polaire, aura pour valeur $\frac{\rho'_1}{2} = \mathrm{R}$, puisque $\rho_1 = 0$ pour le point O considéré.

Mais si nous appelons p la distance à l'origine de l'asymptote Δ, et k^2 la puissance de la transformation, nous avons

$$p = \lim(\rho \sin\omega) = k^2 \lim \frac{\sin\omega}{\rho_1}$$

pour $\omega = 0$, c'est-à-dire $p = \frac{k^2}{\rho'_1}$. Donc $\mathrm{R} = \frac{k^2}{2p}$, ce qui démontre le théorème énoncé.

Géométriquement, la proposition est pour ainsi dire intuitive, car la transformée d'une tangente quelconque en M à la courbe Γ est une circonférence passant par O et tangente à la courbe Γ_1 au point correspondant M_1. Elle passe donc par O et par deux points infiniment voisins de M_1 ; or, quand M s'éloigne à l'infini, M_1 se rapproche indéfiniment de O, de sorte qu'à la limite on a pour transformée une circonférence passant par O et par deux points infiniment voisins de O, c'est-à-dire précisément la circonférence du cercle osculateur ou du cercle de courbure.

L'extrême simplicité de ce résultat est de nature à inspirer des doutes sur sa nouveauté; je ne l'ai cependant rencontré nulle part, et plusieurs mathématiciens que j'ai consultés ne le connaissaient pas non plus. Dans tous les cas, cette proposition, nouvelle ou non, présente un sérieux intérêt, même au point de vue de l'enseignement, car elle tend à fusionner en une seule les deux théories des asymptotes et des rayons de courbure, qui semblent *a priori* bien distinctes l'une de l'autre.

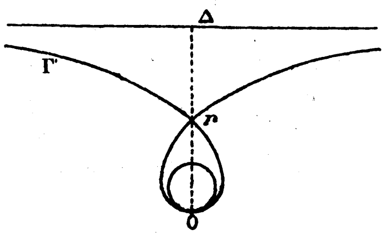
Toute détermination de rayon de courbure, par exemple, se déduira immédiatement de la détermination de l'asymptote à la courbe inverse, en prenant le point considéré pour pôle d'inversion. Réciproquement, dans certains cas, il pourra être commode de déduire du cercle de courbure, supposé connu, l'asymptote de la courbe inverse.

M. le colonel Mannheim m'a fait remarquer que cette proposition peut se rattacher à la propriété suivante, qui est bien connue : *La podaire d'une courbe* C, *par rapport à un point* O, *a une branche normale en* O *à la tangente* Od *à la courbe; son cercle de courbure en* O *a pour diamètre* Od, *en désignant par* d *le point de contact.*

Or, cette podaire et ce cercle sont les transformées par inversion (O étant le pôle) de Γ et Δ, polaires réciproques de C et d, par rapport à une circonférence de centre O. Il suffit maintenant de remarquer que Δ est l'asymptote de Γ, puisque la tangente Od passe par O.

M. Mannheim a bien voulu m'indiquer, en outre, la très intéressante application que voici : Γ est une strophoïde droite; le point double r est au milieu de la perpendiculaire abaissée du sommet O sur l'asymptote Δ. La courbe est une anallagmatique par rapport à O, et alors le cercle transformé de Δ est le cercle de courbure de la courbe elle-même; son diamètre est la moitié de Or; en outre, dans les circonstances particulières de la question, ce cercle a un contact du troisième ordre avec la courbe.

Fig. 1.



On pourrait multiplier les exemples et les applications. Je me bornerai, sans développements, pour terminer, à l'énoncé suivant : *Si une courbe a trois asymptotes, sa transformée par inversion, le pôle étant le centre du cercle inscrit au triangle des asymptotes, a en ce pôle un point triple pour lequel les rayons de courbure des trois branches de la courbe sont égaux.*

Il y aurait sans doute à étudier l'extension de quelques-unes de ces considérations à la Géométrie de l'espace. C'est un sujet sur lequel je reviendrai peut-être.