BULLETIN DE LA S. M. F.

A. DEMOULIN

Note sur la détermination des couples de surfaces applicables telles que la distance de deux points correspondants soit constante

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 71-75

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__71_0>

NOTE SUR LA DÉTERMINATION DES COUPLES DE SURFACES APPLICABLES TELLES QUE LA DISTANCE DE DEUX POINTS CORRESPONDANTS SOIT CONSTANTE;

Par M. A. Demoulin.

1. Le problème de la détermination des couples de surfaces applicables telles que la distance de deux points correspondants soit constante a été résolu par Ribaucour (¹) dans le cas où les droites de jonction des points correspondants peuvent prendre toutes les directions de l'espace. Plus récemment, M. Caronnet (²) a complété la solution de ce problème en envisageant le cas où les droites de jonction des points correspondants ont une infinité simple de directions. Enfin M. Antomari (³) a donné une élégante génération des surfaces que l'on obtient dans ce second cas, en appliquant les méthodes qui lui ont servi dans l'étude de la déformation des surfaces réglées. Pour être complet, je rappellerai que M. Genty (⁴) a consacré au sujet qui nous occupe une Note dans laquelle il fait usage de la méthode des quaternions.

Je me propose de faire voir que le problème résolu par Ribaucour est susceptible d'une solution géométrique des plus simples. Je montrerai ensuite que l'application de la méthode cinématique de M. Darboux conduit à un résultat équivalent à celui de M. Antomari, et qui a même sur ce dernier l'avantage de pouvoir revêtir une forme entièrement géométrique.

2. J'établirai d'abord le lemme suivant :

Si l'on porte, à partir du point central O, *relatif à une génératrice* G *d'une surface réglée* (Σ), *deux segments constants et égaux* OM_1 *et* OM_2, *les points* M_1 *et* M_2 *décriront des arcs de même longueur, et réciproquement.*

Soit

$$ds^2 = du^2 + [(u - \alpha)^2 + \beta^2]\, dv^2 \tag{1}$$

(¹) *Mémoire sur les élassoïdes*, p. 60.
(²) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXI, p. 134.
(³) Même Recueil, t. XXII, p. 58.
(⁴) *Ibid.*, p. 36.

l'élément linéaire de la surface (Σ). Les équations des courbes (C_1) et (C_2), décrites par les points M_1 et M_2, sont respectivement

$$\alpha - u = a, \qquad \alpha - u = -a,$$

en posant $OM_1 = OM_2 = a$.

Si l'on appelle s_1 et s_2 les arcs de ces courbes, on aura, d'après (1),

$$ds_1^2 = ds_2^2,$$

ce qui démontre la première partie du lemme.

Réciproquement, supposons constante et égale à $2a$ la distance des points M_1 et M_2. Soient (u, v) les coordonnées du point M_1 et $(u + 2a, v)$ celles du point M_2 ; on a, par hypothèse,

$$du^2 + [(u-\alpha)^2 + \beta^2]\,dv^2 = du^2 + [(u + 2a - \alpha)^2 + \beta^2]\,dv^2.$$

Cette égalité entraîne la condition $u = \alpha - a$. Les u des points M_1 et M_2 sont donc $\alpha - a$ et $\alpha + a$, et dès lors le milieu du segment M_1M_2 coïncide avec le point O.

3. Cela posé, soient (M_1) et (M_2) deux surfaces applicables telles que la distance de deux points correspondants M_1 et M_2 soit constante. Si le point M_1 décrit, sur la surface (M_1), une courbe (C_1), le point M_2 décrira, sur la surface (M_2), une courbe correspondante (C_2), et la droite M_1M_2 ou G engendrera une surface réglée (Σ). Puisque les arcs décrits par les points M_1 et M_2 sont égaux et que la distance de ces points est constante, il résulte du lemme ci-dessus que le point central O de la génératrice G est situé au milieu du segment M_1M_2. Par conséquent, la congruence des droites de jonction des points correspondants jouit de la propriété suivante :

Les lignes de striction de toutes les surfaces de cette congruence sont situées sur une surface.

Désignons par (G) l'une quelconque des congruences possédant cette propriété et par (S) la surface correspondante. Il suit du lemme précité que toute congruence (G) satisfait à la question ; en d'autres termes, si l'on porte sur chacune des droites de cette congruence, de part et d'autre du point O, où elle rencontre la surface (S), deux segments constants et égaux OM_1 et OM_2, les points

M_1 et M_2 engendreront deux surfaces applicables sur lesquelles ces points se correspondront.

4. Tout revient donc à déterminer la congruence (G) la plus générale. Supposons d'abord que les droites qui la composent puissent avoir toutes les directions de l'espace; dans ce cas, la solution est immédiate. Il résulte, en effet, de la propriété caractéristique de la congruence (G) que le cercle, lieu des points représentatifs des surfaces de la congruence qui passent par une droite de cette congruence, se réduit à un point; on conclut de là que la congruence (G) est isotrope et que le milieu du segment focal appartient à la surface (S).

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant, dû à Ribaucour :

Pour obtenir le couple le plus général de surfaces applicables telles que la distance de deux points correspondants M_1 *et* M_2 *soit constante, et qu'en outre les droites* $M_1 M_2$ *puissent avoir toutes les directions de l'espace, il suffit de porter sur chacune des droites de la congruence isotrope la plus générale, à partir du milieu* O *du segment focal, deux segments égaux et constants* OM_1 *et* OM_2.

5. Passons à l'étude de la congruence (G) la plus générale, dans l'hypothèse où les droites qui lui appartiennent n'ont qu'une infinité simple de directions, et, à cet effet, considérons un trièdre trirectangle $Oxyz$ se déplaçant de manière que l'axe Oz soit successivement parallèle aux différentes droites de la congruence. Les composantes ξ, η, ζ de la vitesse du point O et les composantes p, q, r de la rotation instantanée du trièdre seront des fonctions d'un paramètre t.

Le trièdre $Oxyz$ étant pris dans une de ses positions, les droites de la congruence parallèles à Oz forment un cylindre dont nous désignerons par (C) l'intersection avec le plan xOy. Soient (x, y) les coordonnées du pied d'une des génératrices G de ce cylindre; on obtiendra l'une quelconque (Σ) des surfaces de la congruence passant par G en prenant pour x une fonction arbitraire de t; l'équation de la courbe (C) donnera la valeur correspondante de y. Cherchons le plan tangent à (Σ) en un point quelconque (x, y, z) de G. Le déplacement infiniment petit de ce point a pour composantes, suivant Ox et Oy,

$$(\xi + qz - ry)\,dt + dx,$$
$$(\eta + rx - pz)\,dt + dy.$$

Soit θ l'angle que le plan tangent cherché fait avec le plan xOz, on a

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\eta + rx - pz + \dfrac{dy}{dt}}{\xi + qz - ry + \dfrac{dx}{dt}}.$$

Le coefficient angulaire du plan asymptote relatif à G est donc $-\frac{p}{q}$; par suite, $\frac{q}{p}$ est celui du plan central relatif à la même droite. Le z du point central correspondant est donné par l'équation

$$\frac{\eta + rx - pz + \dfrac{dy}{dt}}{\xi + qz - ry + \dfrac{dx}{dt}} = \frac{q}{p},$$

qui peut s'écrire

(2) $$z(p^2 + q^2) = p(\eta + rx) - q(\xi - ry) + p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}.$$

Pour que z soit indépendant de la surface de la congruence que l'on considère, il faut que l'on ait

(3) $$p\,dy - q\,dx = 0,$$

et comme cette équation doit avoir lieu en tous les points de la ligne (C), on en conclut

$$py - qx = f(t).$$

Celles des droites de la congruence qui ont même direction sont donc situées dans un plan. Nous prendrons désormais ce plan comme plan des xz, ce qui entraîne la condition $q = 0$.

En résumé, si un trièdre Oxyz se déplace de manière que la composante q de sa rotation soit nulle, les droites du plan xOz, parallèles à Oz, engendreront la congruence cherchée. Or l'axe hélicoïdal relatif au déplacement infiniment petit de ce trièdre est parallèle au plan des xz et se projette, sur ce plan, suivant la caractéristique Δ de ce plan. De là résulte la génération suivante de la congruence (G) :

Soit P *un plan sur lequel est tracée une droite* D; *si l'on fait rouler le plan* P *sur une développable arbitrairement choisie, les droites du plan* P, *parallèles à* D, *engendreront la congruence cherchée.*

Cherchons maintenant la surface (S), lieu des lignes de striction des surfaces de la congruence. Or, si l'on fait, dans (2), $q = 0$ et que l'on tienne compte de la relation (3), on trouve l'équation

$$\eta + rx - pz = 0,$$

qui représente la caractéristique Δ du plan P. La surface (S) est donc la développable, enveloppe de ce plan. Ce résultat, joint aux considérations du n° 3, nous conduit à la génération suivante des surfaces (M_1) et (M_2) :

Si l'on mène, dans le plan P, *parallèlement à la caractéristique* Δ *de ce plan et symétriquement par rapport à cette droite, deux droites* Δ_1 *et* Δ_2 *découpant sur* D *un segment constant, ces droites, lors du mouvement du plan* P *défini ci-dessus, engendreront les surfaces* (M_1) *et* (M_2) *applicables les plus générales telles que la distance de deux points correspondants soit constante, les droites de jonction des points correspondants n'ayant qu'une infinité simple de directions.*

6. Nous terminerons en cherchant les développables de la congruence. Une droite quelconque de la congruence est définie par une valeur du paramètre t qui fixe la position du trièdre $Oxyz$ et par sa distance x à l'axe des z de ce trièdre. Un point (x, 0, z) de cette droite décrira une courbe qui lui sera tangente si l'on a simultanément

$$dx + \xi\, dt = 0, \qquad \eta + rx - pz = 0.$$

La seconde de ces équations montre que le foyer situé à distance finie appartient à la caractéristique du plan xOz, ce que l'on savait déjà; quant à la première, elle donne

$$x = -\int \xi\, dt + \text{const.},$$

ce qui est l'équation finie des développables de la congruence.