

BULLETIN DE LA S. M. F.

E. LEMOINE

Note sur une construction approchée du développement de la circonférence et remarques diverses

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 242-255

[<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__242_0>](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__242_0)

© Bulletin de la S. M. F., 1895, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

NOTE SUR UNE CONSTRUCTION APPROCHÉE DU DÉVELOPPEMENT DE LA CIRCONFÉRENCE ET REMARQUES DIVERSES;

Par M. E. LEMOINE.

I.

M. Bioche, à la séance du 6 mars 1895, a montré que l'on pouvait, avec une erreur inférieure aux erreurs généralement appréciables dans un tracé graphique, trouver soit la longueur d'une circonférence de rayon donné, soit le rayon d'une circonférence de longueur donnée, en remarquant que $\sqrt{3} + \sqrt{2}$ et $\sqrt{3} - \sqrt{2}$ étaient respectivement des valeurs approchées de π et de $\frac{1}{\pi}$, parce que cela exprime que la longueur approchée de la demi-circonférence peut s'obtenir en ajoutant le côté du carré inscrit au côté du triangle équilatéral inscrit.

D'un autre côté, si l'on veut avoir le rayon d'une circonférence dont la demi-longueur est connue, il suffit de prendre la différence du côté du triangle équilatéral et du côté du carré inscrit dans la circonférence qui a pour rayon la longueur donnée de la demi-circonférence dont on cherche le rayon. En effet, puisque l'on a approximativement

$$\sqrt{3} + \sqrt{2} = \pi \quad \text{et que} \quad (\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 1,$$

on a approximativement $\sqrt{3} - \sqrt{2} = \frac{1}{\pi}$ (1).

Comme $\sqrt{3} = 1,73205\dots$, que $\sqrt{2} = 1,41421\dots$, on a

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3,14626\dots, \quad \pi = 3,14159\dots,$$

La différence étant 0,00467..., on obtient la longueur de la

(1) Notons ici un moyen mnémorique assez curieux, qui m'a été indiqué autrefois. de retenir le nombre $\frac{1}{\pi}$ avec 7 décimales; ce nombre est 0,3183098... et on l'énonce ainsi : Les 3 journées de 1830 et le renversement de 89.

demi-circonférence à moins d'un $\frac{1}{2}$ centième près de la valeur du rayon, par excès. On a

$$\frac{1}{\pi} = 0,31830\dots, \quad \sqrt{3} - \sqrt{2} = 0,31784\dots;$$

la différence est 0,00046....

On a donc le rayon à moins de $\frac{1}{2}$ millièmè près, par défaut, de la longueur de la demi-circonférence.

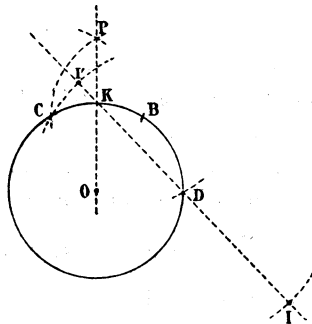
Ces constatations faites, il m'a semblé utile d'évaluer, par la Géométrie, le symbole de ces constructions.

1° Une circonférence étant tracée, construire sa demi-longueur.

La construction de M. Bioche étant d'ajouter les côtés du triangle équilatéral et du carré inscrit il s'agit de l'exécuter le plus simplement possible; voici ce que je trouve pour cela :

Je mets la pointe du compas (*fig. 1*) en un point quelconque B

Fig. 1.



de la circonférence donnée de centre O..... Op. : (C_2) ,

je prends BO et je trace B(BO) qui coupe O(BO) en C et D

Op. : $(C_1 + C_3)$,

je trace C(BO) qui coupe B(BO) en P.. Op. : $(C_1 + C_3)$,

je trace PO..... Op. : $(2R_1 + R_2)$

qui coupe la circonférence donnée en K entre O et P.

A partir de ce moment je peux opérer de deux façons (a) et (b) également simples.

donnent le rayon cherché par le symbole

$$\text{Op. : } (4 R_1 + 2 R_2 + 6 C_1 + C_2 + 4 C_3).$$

Simplicité : 17; exactitude : 11; 2 droites, 4 cercles,
pour la première construction (a'), ou

$$\text{Op. : } (2 R_1 + R_2 + 8 C_1 + C_2 + 5 C_3).$$

Simplicité : 17; exactitude : 11; 1 droite, 5 cercles,
pour la seconde (b').

Ces constructions, d'une extrême simplicité, comme l'on voit, m'offrent une occasion, trop démonstrative pour que je ne la saisisse pas, de faire toucher du doigt l'affirmation faite par moi si souvent, que les *géomètres les plus habiles* ne peuvent absolument pas se rendre compte de la simplicité ou de la complication d'une construction, s'ils ne la mesurent pas géométrographiquement et qu'ils sont toujours bercés par la simplicité du langage, ce qui en est tout à fait différent.

A la séance du 20 mars 1895, M. Maurice d'Ocagne s'exprimait ainsi :

« M. Bioche, observant que

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} = 3,1463\dots = \pi + 0,0047\dots,$$

a déduit un procédé approché de rectification du cercle consistant à construire géométriquement $\sqrt{2}$ et $\sqrt{3}$ et à ajouter les segments ainsi obtenus; je ferai remarquer qu'il est très facile de construire *directement* $\sqrt{2} + \sqrt{3}$. »

Puis il énonce le mode de construction suivant (*Journal de Mathématiques élémentaires*, de M. de Longchamps, 1895, p. 77) :

« Dans le cercle ABA' dont le rayon est pris pour unité (*fig. 3*) tirons le rayon OB à 45° sur OA'. La parallèle à OA', menée par B, coupe la tangente en A' au point C. La bissectrice de l'angle COA coupe la tangente en A au point D, tel que $AD = \sqrt{2} + \sqrt{3}$. »

Or, pour exécuter cette construction, il faut :

1° Tracer une droite OAA'..... Op. : $(R_1 + R_2)$;

La préoccupation de la simplicité réelle du trait a été si étrangère jusqu'ici aux spéculations géométriques que les choses les plus évidentes ne sont pas observées; ainsi le tracé de la tangente en A (n° 8) était inutile, puisque la longueur AD eût été aussi bien marquée par la bissectrice de l'angle COA, sur la tangente en A' déjà tracée, mais comme le géomètre ne se pose jamais la question de la simplicité du tracé *effectué*, ce qui est toute la Géométrographie, de pareils détails n'arrêtent pas son attention.

Remarquons encore que j'ai opéré cette construction avec une très grande économie, si l'on admet, comme cela doit être dans l'espèce, qu'elle est exécutée par quelqu'un qui ne pratique pas les procédés, et qui surtout n'a pas les préoccupations géométrographiques; car, par exemple, pour 2° et 3° les constructions sont simplifiées parce que je me sers des points A et A' comme centres des arcs de cercle nécessaires au tracé de la perpendiculaire, puisque je me sers d'un de ces arcs de cercle (celui qui a pour centre A') pour tracer la bissectrice.

Pour 4°, au lieu d'employer la méthode classique, je décris le cercle A'(A'O) qui coupe OB en un point de la tangente en A', puisque $A'OB = 45^\circ$.

Pour 5°, au lieu d'employer la méthode classique, je trace le cercle A(A'B) qui coupe le cercle donné en β et je trace B β .

Pour 7°, je me sers des points B et A comme centres des arcs de cercle nécessaires.

Pour 8°, je prends à partir de K, où CB coupe la perpendiculaire OK à AA', $KC' = KC$, puis je trace AC'.

Sans ces économies le symbole eût été beaucoup plus élevé.

Si l'on admet l'emploi de l'équerre (¹) les opérations 1°, 6°, 7° ne

(¹) Nous avons indiqué (Tome XX, page 132; 1892), les symboles adoptés pour la Géométrographie appliquée à la Géométrie canonique de Grecs, de la droite et du cercle, où les seuls instruments permis sont la règle et le compas; quand on se sert de l'équerre, ce qui est indispensable en Géométrie descriptive, en Statique graphique, etc., il faut y ajouter de nouveaux symboles (voir *Association française pour l'avancement des Sciences*, Congrès de Caen, 1894); nous allons les définir ici pour l'intelligence de ce qui suit :

Placer le bord d'une règle ou d'une équerre en coïncidence avec une droite

sont pas modifiées, mais 2° et 4° faites ensemble donnent

$$\text{Op. : } (2R'_1 + 2R_2 + 2E).$$

5° donne. Op. : $(2R'_1 + R_2 + E)$,
je supprime 8° reconnue inutile; seulement pour 3° je ne puis plus
utiliser l'arc de cercle qui avait A pour centre, puisqu'il n'est pas
tracé, le symbole est donc... Op. : $(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3)$,
de sorte que le symbole total, avec l'équerre, de la construction
de M. d'Ocagne, sera

$$\text{Op. : } (7R_1 + 4R'_1 + 7R_2 + 3E + 4C_1 + 4C_3).$$

Simplicité : 29; exactitude : 18; 7 droites, 4 cercles.

En admettant l'équerre, la construction (a) donne

$$\text{Op. : } (2R_1 + 2R'_1 + 2R_2 + E + 2C_1 + C_2 + 2C_3).$$

Simplicité : 12; exactitude : 8; 2 droites, 2 cercles ;

et la construction (b)

$$\text{Op. : } (2R'_1 + R_2 + E + 4C_1 + C_2 + 3C_3).$$

Simplicité : 12; exactitude : 8; 1 droite, 3 cercles.

Depuis cette Communication, M. Bioche nous a fait savoir que
la remarque sur la valeur de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ avait déjà été faite, ainsi
qu'on le lui avait signalé. On trouve, en effet (*Géométrie* d'Amiot,
revue par Vintéjoux, page 171), cet exercice :

tracée s'assimile spéculativement à l'opération de la Géométrographie de la
règle et du compas : mettre le bord de la règle en coïncidence avec deux points,
c'est-à-dire : Op. : $(2R_1)$, mais, dans le but de mettre en évidence dans le symbole
d'une construction le rôle que l'équerre y a joué, nous le désignerons par
Op. : $(2R'_1)$; nous désignons aussi par Op. : $(2R'_1)$: mettre le bord de la règle
en coïncidence avec deux points *lorsque cela sera fait pour se servir de
l'équerre*.

Nous ne comptons pas l'opération, toute mécanique, de plaquer l'équerre sur
la règle ou la règle sur l'équerre.

Faire glisser l'équerre sur la règle jusqu'à ce que le bord de l'équerre passe par
un point placé, sera Op. : (E) . C'est à cela que se réduisent les symboles relatifs
à l'emploi de l'équerre. Tracer avec l'équerre une droite passant par un point et
parallèle (ou perpendiculaire si l'on admet l'équerre aussi pour tracer les perpen-
diculaires) sera

$$\text{Op. : } (2R'_1 + E + R_1).$$

Simplicité : 4; exactitude : 3; 1 droite.

Vérifier que la somme des côtés du triangle équilatéral et du carré inscrits dans un même cercle surpasse la moitié de la circonférence d'une quantité moindre que $\frac{1}{2}$ centième de rayon.

II.

Je vais indiquer une construction très simple que j'ai trouvée autrefois et qui n'est, peut-être, pas connue, pour avoir la longueur approximative du quart d'une circonférence tracée et décrite sur une droite tracée AB comme diamètre. Elle s'appuie sur la remarque suivante :

Le cosinus du plus petit angle qui a pour sinus $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (côté du décagone inscrit dans le cercle de rayon 1) est

$$\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} = 0,7861 \dots \quad \text{et} \quad \frac{\pi}{4} = 0,78539\dots;$$

c'est le quart de la circonférence qui a AB = 1 pour diamètre. La différence de ces nombres étant 0,0007..., on voit que si sur le cercle de diamètre AB, on a une corde AH = $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, BH sera $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$ ou le quart de la circonférence du diamètre AB. L'approximation est un peu plus grande que dans la construction déduite de $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Je trace A(AB) (fig. 4) qui coupe AB en B', puis B'(AB) qui coupe A(AB) en C et en C', puis C'(AB) qui coupe B'(AB) en D, puis AD qui coupe A(AB) en E entre D et A

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_3),$$

je trace C(CE) qui coupe AB en G entre A et B.

$$\text{Op. : } (2C_1 + C_3) \text{ (} ^1 \text{),}$$

(¹) Il est facile d'établir que $AG = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$; AG est donc le plus grand segment de AB divisé additivement en moyenne et extrême raison; le cercle C(CE) couperait AG et G' qui donnerait le point de division de AB en moyenne et extrême raison par segments soustractifs.

Remarquons en passant que ce tracé peut être considéré comme celui du tracé

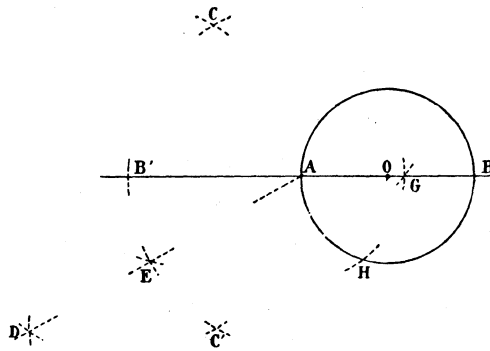
je trace A(AG)..... Op. : $(2 C_1 + C_3)$,
qui coupe le cercle donné en H; la longueur BH, qu'il n'y a pas
besoin de tracer, est la longueur cherchée obtenue par

$$\text{Op. : } (2 R_1 + R_2 + 8 C_1 + 5 C_3).$$

Simplicité : 16; exactitude : 10; 1 droite, 5 cercles.

En employant l'équerre, on ne pourrait l'utiliser que pour dé-

Fig. 4.



terminer le point E, en menant la perpendiculaire à B'C' passant
par A; le symbole, très peu plus simple, serait

$$\text{Op. : } (2 R_1 + R_2 + E + 7 C_1 + 4 C_3).$$

Simplicité : 15; exactitude : 10; 1 droite, 4 cercles.

M. Mannheim a modifié cette construction d'une façon heu-
reuse (non pour modifier le symbole, qui est *identique* dans les
deux cas, mais parce que la construction est mieux ramassée, plus
parlante), de la façon suivante :

Je trace A(AB) (*fig. 5*) qui coupe AB en B'. Op. : $(2 C_1 + C_3)$,
puis la perpendiculaire à AB menée par A.

$$\text{Op. : } (2 R_1 + R_2 + 2 C_1 + 2 C_3),$$

d'une droite AB en moyenne et extrême raison par le symbole

$$\text{Op. : } (2 R_1 + R_2 + 6 C_1 + 4 C_3).$$

Simplicité : 13; exactitude : 8; 1 droite, 4 cercles,

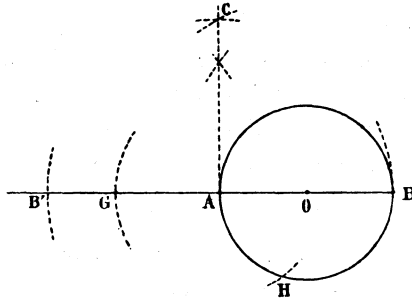
et nous n'en connaissons pas de plus simple.

elle coupe A(AB) en C, je trace O(OC), O étant le milieu de AB.

$$\text{Op. : } (2C_1 + C_3),$$

elle coupe AB en G entre A et B'; je trace A(AG) qui coupe la

Fig. 5.



circonférence donnée en H. Op. : $(2C_1 + C_3)$.

La distance BH est le quart de la circonférence donnée.

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 8C_1 + 5C_3).$$

Simplicité : 16; exactitude : 10; 1 droite, 5 cercles.

Je ferai remarquer que, si l'on admet l'usage de l'équerre aussi pour mener les *perpendiculaires*, la construction de M. Mannheim a un léger avantage sur la mienne faite également avec l'équerre, car la perpendiculaire à AB, menée par A, se trace par le symbole. Op. : $(2R'_1 + R_2 + E)$, de sorte que le symbole total est

$$\text{Op. : } (2R'_1 + R_2 + E + 6C_1 + 3C_3).$$

Simplicité : 13; exactitude : 9; 1 droite, 3 cercles.

Il faut cependant signaler que ma construction n'exige pas que le centre de la circonférence donnée soit placé. S'il ne l'était pas, la construction de M. Mannheim exigerait qu'on le plaçât d'abord et son symbole serait, avec la règle et le compas.

$$\text{Op. : } (4R_1 + 2R_2 + 9C_1 + 6C_3),$$

de cinq opérations élémentaires (dont le tracé d'une droite et d'un cercle) plus compliquées que la mienne, et avec l'équerre

$$\text{Op. : } (2R_1 + 2R'_1 + 2R_2 + E + 7C_1 + 4C_3),$$

plus compliquée que la mienne de trois opérations élémentaires (dont le tracé d'une droite).

III.

Toutes ces constructions donnent une approximation qui est ordinairement suffisante pour la pratique, mais nous voulons terminer en analysant une construction de la longueur de la circonférence, construction dont l'approximation *graphique* est parfaite, car la longueur que l'on trouve a pour valeur

$$6,2831839062\dots$$

et la circonférence de rayon 1 égale $6,283185306\dots$

La différence $0,00000140$ est beaucoup plus petite que l'approximation possible par l'emploi d'une opération graphique.

Cette construction, signalée par M. de Longchamps (*Journal de Mathématiques élémentaires*, 1886, p. 137), comme donnée par M. Ferdinand Breitschneider dans le *Journal de Grünert*, 1836, p. 447, est beaucoup plus ancienne, car dans le Tome II, note III, p. 235, des *Récréations mathématiques* de E. Lucas, je lis qu'elle est due à Specht (*Journal de Crelle*, t. 3, p. 83).

« Soit OA le rayon d'une circonférence de centre O, AOA' un diamètre; on trace la tangente en A à cette circonférence, et l'on prend sur cette droite et dans le même sens des longueurs AB, BC, CD respectivement égales au double, au cinquième et aux deux cinquièmes du rayon. On tire les droites OC, OD, et l'on prend sur la droite AO, dans le sens AO, une longueur AE égale à OC; enfin, on mène par le point E une parallèle à OD jusqu'à son intersection F avec AB. »

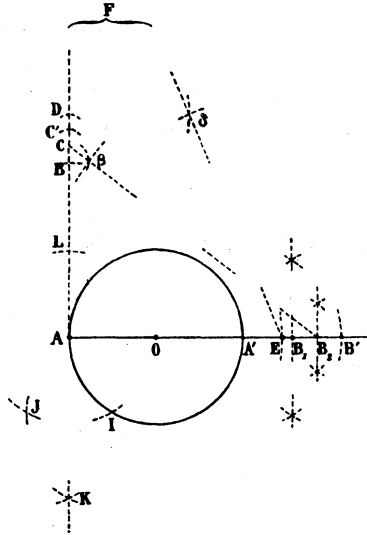
La droite AF est, avec une grande approximation, égale à la circonférence. En exécutant cette construction aussi économiquement que le permet la Géométrie graphique on obtient les résultats suivants (*fig. 6*):

- 1° *Placer le point B.* — Je trace A(AO) qui coupe O(AO) en I au-dessous de AO, puis I(AO) qui coupe A(AO) en J, puis J(AO) qui coupe I(AO) en K, je trace AK qui coupe A(AO) en L au-dessus de AO, je trace L(AO) qui place B sur AK.

$$\text{Op.} : (2R_1 + R_2 + 5C_1 + 4C_3).$$

- 2° *Placer les points C et D.* — Je trace $A'(AO)$ qui coupe AA' en B' , puis $B'(AO)$ qui coupe $A'(AO)$ en deux points, je

Fig. 6.



trace la droite passant par ces deux points; cette droite coupe AA' en B_1 .

Je trace $B'(B'B_1)$, puis $B_1(B'B_1)$. Ces deux cercles se coupent suivant une droite qui coupe B_1B' en B_2 . On voit facilement que les longueurs AB_1 et AB_2 sont dans le rapport de 10 à 11. Je mène par B_2 une parallèle à B_1B , en complétant le parallélogramme $BB_1B_2\beta$; la droite $B_2\beta$ coupe AB en C ; enfin, je prends sur BC , $CD = 2CB$.

$$\text{Op. : } (6R_1 + 3R_2 + 13C_1 + 8C_3).$$

- 3° *Placer F.* — Je prends sur AO dans le sens AO , $AE = CO$, puis je mène par E , sans tracer OD , une parallèle à OD , en complétant le parallélogramme $DOE\delta$, $E\delta$ coupe AB en F .

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 5C_1 + 2C_3).$$

En tout..... Op. : $(10R_1 + 5R_2 + 23C_1 + C_3)$.

Simplicité : 52; exactitude : 33; 5 droites, 14 cercles.

Il faut remarquer que nous avons tracé toutes les lignes auxiliaires dans tous les tracés des figures jointes au texte, excepté dans la *fig.* 3 qui est la reproduction de la figure faite par M. d'Ocagne dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* cité plus haut; elle est fort simple parce qu'elle n'en contient aucune.

Si l'on admet l'équerre pour effectuer la construction de Specht, on peut s'en servir trois fois : pour mener la tangente en A, la droite B₂C et la droite EF.

Le symbole sera

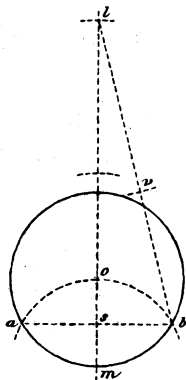
$$\text{Op. : } (4R_1 + 6R'_1 + 5R_2 + 3E + 11C_1 + 6C_3).$$

Simplicité : 35 ; exactitude : 24 ; 5 droites, 6 cercles.

IV.

M. Ant. Pleskot, professeur à l'École réelle tchèque de Prague, donne dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* de

Fig. 7.



M. de Longchamps, 1895, p. 125, une construction simple pour obtenir approximativement le quart de la circonférence (*fig. 7*). Soit o le centre. Je trace un diamètre quelconque om qui coupe la circonférence en m , je trace le cercle $m(mo)$ qui coupe le cercle donné en a et en b , je trace ab qui coupe om en s .

$$\text{Op. : } (3R_1 + 2R_2 + 2C_1 + C_3).$$

A partir de s dans le sens so je prends $sl = 2ab$.

$$\text{Op. : } (4C_1 + 2C_3),$$

je trace lb et je prends, v étant entre l et b , $lv = 2r$.

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 3C_1 + C_3).$$

bv est le quart de la circonférence

$$\text{Op. : } (5R_1 + 3R_2 + 9C_1 + 4C_3).$$

Simplicité : 21 ; exactitude : 14 ; 3 droites, 4 cercles.

On calcule facilement que l'on a $bv = \frac{\sqrt{51}}{2} - 2 = 1,570714\dots$,
comme d'ailleurs $\frac{\pi}{2} = 1,570796\dots$

On voit que la différence est 0,000082....

Cette construction est un peu plus compliquée que celle que j'ai donnée (*voir plus haut*), mais elle est aussi plus exacte.

Je me permets d'insister en terminant sur ce que la Géométhrographie est le seul moyen de juger les constructions ; elle a une utilité pratique lorsqu'elle est appliquée à des tracés que l'on effectue d'après ses règles ; mais, comme elle est, avant tout, spéculative, elle sert aussi au géomètre, en lui inspirant des idées qu'il n'aurait pas eues sans elle. La Géométhrographie s'apprend, du reste, avec la plus extrême facilité ; une heure suffit *largement* pour l'étudier de façon à pouvoir s'en servir ; puis, au bout de quelques exercices, on en est complètement maître.

J'ai le plaisir de savoir que l'usage s'en est répandu avec une rapidité peu ordinaire pour les nouveautés, mais qui s'explique par cette facilité ; on l'enseigne actuellement, à ma connaissance, à l'École militaire de Belgique, à celle de Turin, à l'École polytechnique de Zurich, à l'École technique de Milan, et même quelques professeurs en parlent à Paris dans leur enseignement.