BULLETIN DE LA S. M. F.

P. ADAM

Mémoire sur la déformation des surfaces

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 219-240
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__219_1>

MÉMOIRE SUR LA DÉFORMATION DES SURFACES;

Par M. Paul Adam.

Soient (σ), (σ_1) deux surfaces applicables l'une sur l'autre. Les principaux points de ce Mémoire sont les suivants :

Je considère la surface (Σ), lieu du milieu de la corde joignant deux points correspondants de (σ) et de (σ_1), et la surface (Σ_1), lieu de l'extrémité du vecteur parallèle à cette corde et égal à sa moitié.

Je forme d'abord l'équation aux dérivées partielles de (Σ_1) quand (Σ) est donnée.

Cette équation est beaucoup plus simple que l'équation des surfaces applicables sur une surface donnée; or (Σ) et (Σ_1) étant connues, (σ) et (σ_1) le sont également, car celles-ci ont, par rapport aux deux premières, la même définition que (Σ) et (Σ_1) par rapport à (σ) et (σ_1). Par conséquent :

La détermination des couples de surfaces applicables tels que le lieu du milieu de la corde joignant deux points correspondants soit une surface donnée dépend d'une équation beaucoup plus simple que la recherche des surfaces applicables sur une surface donnée.

J'établis, entre les rayons de courbure de (Σ) et (Σ_1), une relation que l'on peut regarder comme l'analogue de la relation de Gauss pour les surfaces (σ) et (σ_1) et j'en déduis plusieurs théorèmes, parmi lesquels ceux-ci :

Tandis que (σ) *et* (σ_1) *sont toujours toutes deux convexes ou toutes deux à courbures opposées aux points correspondants,* (Σ) *et* (Σ_1) *sont l'une convexe et l'autre à courbures opposées ou toutes deux à courbures opposées, mais jamais toutes deux convexes.*

Si les extrémités m et m_1 d'une droite de longueur constante sont les points correspondants de deux surfaces (σ), (σ_1) *applicables l'une sur l'autre, le rapport des rayons de courbure principaux de la surface* (Σ), *lieu du milieu de mm_1* (*surface qui est toujours à courbures opposées*) *est égal à l'inverse du rapport des carrés des distances du point m, ou du point m_1, aux directions principales de cette surface* (Σ).

Je m'occupe ensuite *des couples* (σ), (σ_1) *pour lesquels* (Σ) *est un cylindre.* J'établis que, dans ce cas :

(σ) *est une surface réglée quelconque et* (σ_1) *la surface réglée symétrique, par rapport à une droite quelconque, de la surface réglée applicable sur* (σ) *avec parallélisme des génératrices.*

J'entre dans quelques considérations intéressantes relativement à ces couples (σ), (σ_1) et à la surface (Σ_1) correspondante.

Je détermine enfin *tous les couples* (σ), (σ_1) *pour lesquels* (Σ) *est une quadrique.*

Lorsque (Σ) est une quadrique dénuée de centre, je démontre que, parmi les couples (σ), (σ_1) correspondants, se trouvent la surface minima d'Enneper et son adjointe :

La surface minima d'Enneper et son adjointe peuvent être orientées de manière que le lieu du milieu de la corde joignant deux points correspondants soit un paraboloïde hyperbolique équilatère.

Le cas où (Σ) est une quadrique à centre se ramène très simplement à la recherche des couples de surfaces applicables avec invariabilité de la distance des points correspondants, couples étudiés par Ribaucour.

ÉQUATION AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DE LA SURFACE (Σ_1).

Soient, en coordonnées rectangulaires, x, y, z; x_1, y_1, z_1; X, Y, Z; X_1, Y_1, Z_1 les coordonnées respectives des surfaces (σ), (σ_1), (Σ), (Σ_1).

On a

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{ll} x = X + X_1, & x_1 = X - X_1, \\ y = Y + Y_1, & y_1 = Y - Y_1, \\ z = Z + Z_1, & z_1 = Z - Z_1. \end{array}\right.$$

Si l'on prend X et Y comme variables indépendantes, les conditions pour que (σ) et (σ_1) s'appliquent l'une sur l'autre sont

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial X_1}{\partial X} + \dfrac{\partial Z}{\partial X}\dfrac{\partial Z_1}{\partial X} = 0, \\ \dfrac{\partial Y_1}{\partial Y} + \dfrac{\partial Z}{\partial Y}\dfrac{\partial Z_1}{\partial Y} = 0, \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial Y} + \dfrac{\partial Y_1}{\partial X} + \dfrac{\partial Z}{\partial X}\dfrac{\partial Z_1}{\partial Y} + \dfrac{\partial Z}{\partial Y}\dfrac{\partial Z_1}{\partial X} = 0. \end{array}\right.$$

Il est facile d'éliminer les deux fonctions X_1 et Y_1 entre ces trois équations.

En égalant d'abord les deux expressions de $\dfrac{\partial^2 X_1}{\partial X\,\partial Y}$ tirées de la première et de la troisième, on trouve

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 Y_1}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\frac{\partial Z_1}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial Y}\frac{\partial^2 Z_1}{\partial X^2} = 0.$$

La seconde des équations (2) différentiée ensuite par rapport à X donne

$$(4)\qquad \frac{\partial^2 Y_1}{\partial X\,\partial Y} + \frac{\partial^2 Z}{\partial X\,\partial Y}\frac{\partial Z_1}{\partial Y} + \frac{\partial Z}{\partial Y}\frac{\partial^2 Z_1}{\partial X\,\partial Y} = 0.$$

Il n'y a plus qu'à égaler les deux expressions de $\dfrac{\partial^3 Y_1}{\partial X^2\,\partial Y}$ tirées des équations (3) et (4) pour obtenir l'équation suivante entre les fonctions Z et Z_1,

$$(5)\qquad \frac{\partial^2 Z}{\partial X^2}\frac{\partial^2 Z_1}{\partial Y^2} - 2\frac{\partial^2 Z}{\partial X\,\partial Y}\cdot\frac{\partial^2 Z_1}{\partial X\,\partial Y} + \frac{\partial^2 Z}{\partial Y^2}\frac{\partial^2 Z_1}{\partial X^2} = 0.$$

Si la surface (Σ) est donnée, la fonction $Z(X, Y)$ est connue, et l'équation (5) définit la fonction $Z_1(X, Y)$; les équations (3) et (4) donnent ensuite les deux dérivées de $\frac{\partial Y_1}{\partial X}$; on obtient par suite $\frac{\partial Y_1}{\partial X}$ *par deux quadratures;* l'équation (4) exprime alors que cette valeur de $\frac{\partial Y_1}{\partial X}$ et que l'expression de $\frac{\partial Y_1}{\partial Y}$ tirée de la seconde des équations (2) sont les dérivées d'une même fonction Y_1 : d'où Y_1 *par deux nouvelles quadratures;* enfin, en vertu de l'équation (3), la première et la dernière des équations (2) font connaître pour $\frac{\partial X_1}{\partial Y}$ et $\frac{\partial X_1}{\partial X}$ les deux dérivées d'une même fonction X_1, laquelle se calcule *par deux dernières quadratures.*

En résumé, *l'équation* (5) *est l'équation aux dérivées partielles de la surface* (Σ_1) *quand* (Σ) *est donnée, et, en supposant que la fonction* (Z_1) *ait été déterminée, six quadratures définissent, au moyen des relations* (1), *les coordonnées des deux surfaces* (σ) *et* (σ_1) *applicables l'une sur l'autre.*

Relation entre les rayons de courbure principaux des deux surfaces (Σ) et (Σ_1) aux points correspondants.

Appelons P, Q, R, S, T les dérivées de la fonction $Z(X, Y)$, et P_1, Q_1, R_1, S_1, T_1 les dérivées de la fonction $Z_1(X_1, Y_1)$.

Les équations (2) s'écrivent

$$\frac{\partial X_1}{\partial X} + P\frac{\partial Z_1}{\partial X} = 0,$$

$$\frac{\partial Y_1}{\partial Y} + Q\frac{\partial Z_1}{\partial Y} = 0,$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial Y} + \frac{\partial Y_1}{\partial X} + P\frac{\partial Z_1}{\partial Y} + Q\frac{\partial Z_1}{\partial X} = 0.$$

Joignons-y les identités

$$\frac{\partial Z_1}{\partial X} = P_1\frac{\partial X_1}{\partial X} + Q_1\frac{\partial Y_1}{\partial X},$$

$$\frac{\partial Z_1}{\partial Y} = P_1\frac{\partial X_1}{\partial Y} + Q_1\frac{\partial Y_1}{\partial Y}.$$

En combinant ces cinq équations, on les remplace par celles-ci

$$(6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial X_1}{\partial X} = -P\dfrac{\partial Z_1}{\partial X}, & \dfrac{\partial Y_1}{\partial X} = \dfrac{1+PP_1}{Q_1}\dfrac{\partial Z_1}{\partial X}, \\ \dfrac{\partial X_1}{\partial Y} = \dfrac{1+QQ_1}{P_1}\dfrac{\partial Z_1}{\partial Y}, & \dfrac{\partial Y_1}{\partial Y} = -Q\dfrac{\partial Z_1}{\partial Y}, \\ (1+PP_1+QQ_1)\left(P_1\dfrac{\partial Z_1}{\partial X}+Q_1\dfrac{\partial Z_1}{\partial Y}\right) = 0. \end{cases}$$

La dernière se décompose en deux.

Première hypothèse :

$$1+PP_1+QQ_1 = 0.$$

Les normales aux deux surfaces (Σ), (Σ_1) aux points correspondants sont alors rectangulaires. C'est là un cas très particulier, dont l'examen est facile, et qui conduit au résultat suivant (je me borne à l'énoncer en raison de son peu d'intérêt) :

Pour que les deux surfaces (Σ) et (Σ_1) aient leurs normales rectangulaires aux points correspondants, il faut et il suffit que (σ) et (σ_1) soient deux cylindres parallèles quelconques regardés comme applicables l'un sur l'autre génératrice par génératrice. (Σ) et (Σ_1) sont alors deux cylindres parallèles à (σ) et (σ_1) [1].

---

[1] Si l'on coupe les quatre cylindres (σ), (σ_1), (Σ), (Σ_1) par un plan perpendiculaire à leurs génératrices et si (γ), (γ_1), (Γ), (Γ_1) sont les sections droites obtenues, on peut donc dire :

Soient (γ) et (γ_1) deux courbes planes se correspondant point m par point m_1, (Γ) le lieu du milieu M de la corde mm_1, (Γ_1) le lieu de l'extrémité M_1 du vecteur parallèle à la corde mm_1 et égal à sa moitié; *pour que les normales aux courbes (Γ), (Γ_1) aux points correspondants soient rectangulaires, il faut et il suffit que les arcs correspondants de (γ) et de (γ_1) soient égaux.*

En particulier, si (Γ_1) est un cercle dont les vecteurs sont issus du centre, (γ) et (γ_1) constituent les lieux des points m et m_1 obtenus en prenant sur les tangentes à (Γ), à partir et de chaque côté du point M de contact deux longueurs égales et constantes; ainsi :

Étant donnée une courbe quelconque (Γ), les lieux (γ) et (γ_1) des points m et m_1 obtenus en prenant sur les tangentes à (Γ), à partir et de chaque côté du point M de contact, deux longueurs constantes égales à l, sont tels que deux cordes égales à $2l$ et s'appuyant chacune sur (γ) et sur (γ_1) laissent entre leurs extrémités correspondantes des arcs égaux.

Seconde hypothèse :

$$P_1\frac{\partial Z_1}{\partial X}+Q_1\frac{\partial Z_1}{\partial Y}=0.$$

On a alors, en écrivant à nouveau les quatre premières équations (6),

$$(7)\quad\left\{\begin{array}{ll}\dfrac{\partial X_1}{\partial X}=-P\dfrac{\partial Z_1}{\partial X}, & \dfrac{\partial Y_1}{\partial X}=\dfrac{1+PP_1}{Q_1}\dfrac{\partial Z_1}{\partial X},\\[2ex] \dfrac{\partial X_1}{\partial Y}=\dfrac{1+QQ_1}{P_1}\dfrac{\partial Z_1}{\partial Y}, & \dfrac{\partial Y_1}{\partial Y}=-Q\dfrac{\partial Z_1}{\partial Y},\\[2ex] P_1\dfrac{\partial Z_1}{\partial X}+Q_1\dfrac{\partial Z_1}{\partial Y}=0. & \end{array}\right.$$

Si l'on écrit que

$$\frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial X_1}{\partial X}=\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial X_1}{\partial Y},\qquad \frac{\partial}{\partial Y}\frac{\partial Y_1}{\partial X}=\frac{\partial}{\partial X}\frac{\partial Y_1}{\partial Y},$$

on obtient, en tenant compte des équations (7), une seule et même équation qui est la suivante

$$(8)\quad\left\{\begin{array}{l}P_1Q_1(1+PP_1+QQ_1)\dfrac{\partial^2 Z_1}{\partial X\,\partial Y}\\ \quad+[PQ_1(1+QQ_1)R_1-(1+PP_1+QQ_1+2PP_1QQ_1)S_1\\ \qquad\qquad+QP_1(1+PP_1)T_1]\dfrac{\partial Z_1}{\partial X}\dfrac{\partial Z_1}{\partial Y}=0.\end{array}\right.$$

Différentiant ensuite la dernière des équations (7) par rapport à X et à Y, on obtient les deux équations

$$(9)\quad\left\{\begin{array}{l}P_1Q_1\dfrac{\partial^2 Z_1}{\partial X^2}+Q_1^2\dfrac{\partial^2 Z_1}{\partial X\,\partial Y}+[-PQ_1R_1+(1+PP_1)S_1]\left(\dfrac{\partial Z_1}{\partial X}\right)^2\\ \qquad\qquad+[-PQ_1S_1+(1+PP_1)T_1]\dfrac{\partial Z_1}{\partial X}\dfrac{\partial Z_1}{\partial Y}=0,\\ P_1^2\dfrac{\partial^2 Z_1}{\partial X\,\partial Y}+P_1Q_1\dfrac{\partial^2 Z_1}{\partial Y^2}+[(1+QQ_1)R_1-QP_1S_1]\dfrac{\partial Z_1}{\partial X}\dfrac{\partial Z_1}{\partial Y}\\ \qquad\qquad+[(1+QQ_1)S_1-QP_1T_1]\left(\dfrac{\partial Z_1}{\partial Y}\right)^2=0.\end{array}\right.$$

En résolvant les trois équations (8) et (9) par rapport aux trois dérivées secondes de Z_1 relativement à X et Y, on trouve l'équation (8) elle-même et les deux ci-après

$$
(10)\quad \left\{
\begin{aligned}
&P_1^2 Q_1(1+PP_1+QQ_1)\frac{\partial^2 Z_1}{\partial X^2}\\
&\quad + P_1(1+PP_1+QQ_1)[-PQ_1R_1+(1+PP_1)S_1]\left(\frac{\partial Z_1}{\partial X}\right)^2\\
&\quad + [-PQ_1^2(1+QQ_1)R_1\\
&\qquad + (1+PP_1)(1-PP_1+QQ_1)Q_1S_1+(1+PP_1)^2P_1T_1]\frac{\partial Z_1}{\partial X}\,\frac{\partial Z_1}{\partial Y} = 0,\\
&P_1Q_1^2(1+PP_1+QQ_1)\frac{\partial^2 Z_1}{\partial Y^2}\\
&\quad + Q_1(1+PP_1+QQ_1)[(1+QQ_1)S_1-QP_1T_1]\left(\frac{\partial Z_1}{\partial Y}\right)^2\\
&\quad + [(1+QQ_1)^2Q_1R_1\\
&\qquad + (1+QQ_1)(1+PP_1-QQ_1)P_1S_1-QP_1^2(1+PP_1)T_1]\frac{\partial Z_1}{\partial X}\,\frac{\partial Z_1}{\partial Y} = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

Si l'on porte enfin les trois dérivées secondes de Z_1 par rapport à X et à Y définies par les équations (8) et (10) dans l'équation (5), on arrive, entre les dérivées de Z par rapport à X et Y et celles de Z_1 par rapport à X_1 et Y_1, à la relation suivante qui ne contient plus que les dérivées premières de Z_1 par rapport à X et Y

$$
\begin{aligned}
&P_1R\left\{Q_1(1+PP_1+QQ_1)[(1+QQ_1)S_1-QP_1T_1]\left(\frac{\partial Z_1}{\partial Y}\right)^2\right.\\
&\qquad + [(1+QQ_1)^2Q_1R_1\\
&\qquad \left. + (1+QQ_1)(1+PP_1-QQ_1)P_1S_1-QP_1^2(1+PP_1)T_1]\frac{\partial Z_1}{\partial X}\,\frac{\partial Z_1}{\partial Y}\right\}\\
&\qquad - 2P_1Q_1S[PQ_1(1+QQ_1)R_1\\
&\qquad\qquad - (1+PP_1+QQ_1+2PP_1QQ_1)S_1+QP_1(1+PP_1)T_1]\frac{\partial Z_1}{\partial X}\,\frac{\partial Z_1}{\partial Y}\\
&+ Q_1T\left\{P_1(1+PP_1+QQ_1)[-PQ_1R_1+(1+PP_1)S_1]\left(\frac{\partial Z_1}{\partial X}\right)^2\right.\\
&\qquad + [-PQ_1^2(1+QQ_1)R_1\\
&\qquad \left. + (1+PP_1)(1-PP_1+QQ_1)Q_1S_1+(1+PP_1)^2P_1T_1]\frac{\partial Z_1}{\partial X}\,\frac{\partial Z_1}{\partial Y}\right\} = 0.
\end{aligned}
$$

Cette équation étant homogène par rapport aux dérivées premières de Z_1 relativement à X et Y, on peut, en vertu de la dernière des équations (7), y remplacer ces dérivées respectivement par Q_1 et $-P_1$. On obtient alors, toutes réductions faites, l'équation symétrique suivante entre les dérivées P, Q, R, S, T de Z par rapport à X et Y et les dérivées P_1, Q_1, R_1, S_1, T_1 de Z_1 par rapport à X_1 et Y_1

$$(11)\quad \begin{cases} (Q^2R - 2PQS + P^2T)(Q_1^2R_1 - 2P_1Q_1S_1 + P_1^2T_1) \\ \quad + 2(QR - PS)(Q_1R_1 - P_1S_1) \\ \quad + 2(QS - PT)(Q_1S_1 - P_1T_1) \\ \quad\quad + RR_1 + 2SS_1 + TT_1 = 0, \end{cases}$$

Cette équation a été établie indépendamment du choix des axes de coordonnées. On peut donc, pour en dégager la signification géométrique, adopter des axes particuliers : prenons alors pour axes des X et des Y les tangentes MX, MY aux lignes de courbure de la surface (Σ), et pour axe des Z la normale MZ à cette surface; cela revient à faire

$$P = Q = S = 0,$$

et l'équation (11) se réduit à

$$(12)\qquad RR_1 + TT_1 = 0 \quad (^1).$$

Appelons ρ et ρ' les rayons de courbure principaux de (Σ) au point M, estimés positivement suivant MZ. On a

$$(13)\qquad R = \frac{1}{\rho}, \qquad T = \frac{1}{\rho'}.$$

Soient M_1X_1, M_1Y_1 les directions principales, et M_1A_1, $M_1A'_1$ les directions asymptotiques de (Σ_1) au point M_1 qui correspond au point M. Si l'on considère les cosinus définis par le Tableau suivant

	MX	MY
M_1X_1	α	β
M_1Y_1	α'	β'
M_1A_1	α_1	β_1
$M_1A'_1$	α'_1	β'_1

(1) Il n'était pas nécessaire, pour obtenir ce résultat, de former l'équation (11);

les deux rapports $\frac{\beta_1}{\alpha_1}$ et $\frac{\beta'_1}{\alpha'_1}$ sont les racines de l'équation

$$R_1\alpha_1^2 + 2S_1\alpha_1\beta_1 + T_1\beta_1^2 = 0.$$

On a en conséquence

$$(14) \qquad \frac{R_1}{T_1} = \frac{\beta_1\beta'_1}{\alpha_1\alpha'_1}.$$

Mais si θ_1 est l'angle $X_1M_1A_1$, on a

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha\cos\theta_1 + \alpha'\sin\theta_1, & \alpha'_1 &= \alpha\cos\theta_1 - \alpha'\sin\theta_1,\\ \beta_1 &= \beta\cos\theta_1 + \beta'\sin\theta_1, & \beta'_1 &= \beta\cos\theta_1 - \beta'\sin\theta_1, \end{aligned}$$

ce qui transforme la relation (14) en

$$(15) \qquad \frac{R_1}{T_1} = \frac{\beta^2\cot^2\theta_1 - \beta'^2}{\alpha^2\cot^2\theta_1 - \alpha'^2}.$$

Enfin, en appelant ρ_1 et ρ'_1 les rayons de courbure principaux de (Σ_1) au point M_1, on sait que, en grandeur et en signe,

$$(16) \qquad \cot^2\theta_1 = -\frac{\rho_1}{\rho'_1}.$$

Eu égard aux relations (13), (15) et (16), l'équation (12) se transforme, en définitive, en la suivante :

$$(17) \qquad -\frac{\rho}{\rho'} = \frac{\beta^2\frac{\rho_1}{\rho'_1} + \beta'^2}{\alpha^2\frac{\rho_1}{\rho'_1} + \alpha'^2},$$

ou bien

$$(18) \qquad \alpha^2\rho\rho_1 + \alpha'^2\rho\rho'_1 + \beta^2\rho'\rho_1 + \beta'^2\rho'\rho'_1 = 0.$$

C'est la relation cherchée entre les rayons de courbure principaux des deux surfaces (Σ) et (Σ_1).

La relation (18) montre que $\frac{\rho}{\rho'}$ et $\frac{\rho_1}{\rho'_1}$ *ne peuvent pas être tous deux positifs.*

De là ce théorème :

Tandis que les deux surfaces (σ) *et* (σ_1), *applicables l'une sur l'autre, sont toujours toutes deux convexes ou toutes deux à courbures opposées aux points correspondants, les deux sur-*

on pouvait faire tout de suite $P = Q = S = 0$ dans les équations (8) et (9); mais l'équation (11), en raison de sa symétrie, sert de vérification au calcul.

faces (Σ) *et* (Σ_1) *sont l'une convexe et l'autre à courbures opposées ou toutes deux à courbures opposées, mais jamais toutes deux convexes.*

Supposons que l'une des deux surfaces (Σ), (Σ_1), par exemple (Σ), soit une développable; en supposant que la direction principale MX soit celle de la génératrice, on a

$$\rho = \infty$$

et l'équation (18) se réduit à

$$\alpha^2 \rho_1 + \alpha'^2 \rho'_1 = 0. \tag{19}$$

La surface (Σ_1) *est donc toujours à courbures opposées.*

Menons, dans le plan tangent $X_1M_1Y_1$ à (Σ_1), la parallèle M_1G_1 à la projection de la génératrice MX sur ce plan, et soit λ l'angle $X_1M_1G_1$; on a

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \operatorname{tang}\lambda,$$

et par suite, en vertu des relations (16) et (19),

$$-\frac{\rho_1}{\rho'_1} = \operatorname{tang}^2\lambda = \cot^2\theta_1,$$
$$\lambda = \frac{\pi}{2} \pm \theta_1.$$

Par conséquent :

Quand l'une des surfaces (Σ), (Σ_1) *est une développable,* (Σ) *par exemple, l'autre* (Σ_1) *est toujours à courbures opposées; la projection de la génératrice de la première* (Σ) *sur le plan tangent à la seconde* (Σ_1) *fait, avec l'une quelconque des directions principales de cette dernière surface, un angle aigu égal aux angles aigus de la seconde direction principale de* (Σ_1) *avec les directions asymptotiques de cette même surface.*

Supposons maintenant que (Σ_1) soit une sphère, c'est-à-dire que (σ) *et* (σ_1) *soient applicables l'une sur l'autre avec invariabilité de la distance des points correspondants* m *et* m_1 (1).

On a alors

$$\rho_1 = \rho'_1,$$

(1) Le cas où c'est (Σ) qui est une sphère se ramène à ce cas-là en remplaçant (σ_1) par sa symétrique par rapport à l'origine des coordonnées.

et la relation (18) devient

$$\rho(\alpha^2+\alpha'^2)+\rho'(\beta^2+\beta'^2)=0.$$

En appelant μ et μ' les angles de la normale à la sphère (Σ_1), ou de la corde mm_1, qui lui est parallèle, avec les directions principales MX et MY de (Σ), on a

$$\alpha^2+\alpha'^2=\sin^2\mu,$$
$$\beta^2+\beta'^2=\sin^2\mu',$$

et, par suite,

$$\rho\sin^2\mu+\rho'\sin^2\mu'=0,$$

ou bien, en appelant δ et δ' les distances du point m de (σ), ou du point m_1 de $(\sigma)_1$ aux directions principales MX et MY de (Σ), et en prenant ρ et ρ' en valeur absolue

$$\rho\delta^2=\rho'\delta'^2.$$

De là ce théorème :

Si les extrémités m et m_1 d'une droite de longueur constante sont les points correspondants de deux surfaces (σ), (σ_1) applicables l'une sur l'autre, le rapport des rayons de courbure de la surface (Σ), lieu du milieu de mm_1 (surface qui est toujours à courbures opposées) est égal à l'inverse du rapport des carrés des distances du point m, ou du point m_1, aux directions principales de cette surface (Σ).

Cas où l'une des surfaces (Σ), (Σ_1) est un plan.

Dans ce cas, on arrive très facilement aux théorèmes suivants :

Pour que la surface (Σ) soit un plan, il faut et il suffit que les deux surfaces (σ), (σ_1), applicables l'une sur l'autre, soient égales.

Pour que la surface (Σ_1) soit un plan, il faut et il suffit que les deux surfaces (σ), (σ_1) soient symétriques par rapport à un point.

Ces théorèmes sont très utiles quand on a besoin de s'assurer que deux surfaces applicables l'une sur l'autre ne sont ni égales, ni symétriques.

CAS OU L'UNE DES SURFACES (Σ), (Σ_1) EST UN CYLINDRE.

Supposons que la surface (Σ) soit le cylindre

$$Z = F(X), \tag{20}$$

parallèle à l'axe des Y [1].

Si l'on porte l'expression ci-dessus de Z dans l'équation (5), on obtient

$$\frac{\partial^2 Z_1}{\partial Y^2} = 0,$$

ce qui exige que

$$Z_1 = Y f(X) + \varphi(X).$$

Les équations (3) et (4) donnent ensuite

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial X^2} = -F'' f, \qquad \frac{\partial^2 Y_1}{\partial X\, \partial Y} = 0,$$

et, conséquemment,

$$\frac{\partial Y_1}{\partial X} = -\int F'' f\, dX.$$

On tire maintenant de la seconde des équations (2)

$$\frac{\partial Y_1}{\partial Y} = 0.$$

ce qui, rapproché de la valeur ci-dessus de $\frac{\partial Y_1}{\partial X}$, conduit à

$$Y_1 = -\int dX \int F'' f\, dX.$$

Enfin, d'après la première et la dernière des équations (2), on a

$$\frac{\partial X_1}{\partial X} = -(Y f' + \varphi') F', \qquad \frac{\partial X_1}{\partial Y} = -\int F' f'\, dX$$

et, en intégrant,

$$X_1 = -Y \int F' f'\, dX - \int F' \varphi'\, dX.$$

En résumé, la surface (Σ_1) est définie par

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= -Y \int F' f'\, dX - \int F' \varphi'\, dX, \\ Y_1 &= -\int dX \int F'' f\, dX, \\ Z_1 &= Y F + \varphi, \end{aligned}\right. \tag{21}$$

[1] Le cas où (Σ_1) serait un cylindre se ramène au cas dans lequel (Σ) est cy-

expressions qui sont linéaires par rapport à Y, et, d'après les relations (1), les surfaces (σ) et (σ_1) ont pour équations

$$(22)\quad \begin{cases} x,\ x_1 = \mp Y \int F'f'\,dX + X \mp \int F'\varphi'\,dX, \\ y,\ y_1 = Y \mp \int dX \int F''f\,dX, \\ z,\ z_1 = \pm Yf + F \pm \varphi, \end{cases}$$

les signes supérieurs se rapportant à (σ) et les signes inférieurs à (σ_1); ces équations sont également linéaires par rapport à Y.

On lit immédiatement sur les équations (21) et (22) les résultats ci-après :

(σ) *est une surface réglée;* (σ_1) *est la surface réglée symétrique par rapport à l'axe des* Y, *c'est-à-dire à la direction des génératrices du cylindre* (Σ), *de la surface réglée applicable sur* (σ) *avec parallélisme des génératrices correspondantes.* (Σ_1) *est une surface réglée admettant un plan directeur perpendiculaire aux génératrices de* (Σ). *Les génératrices se correspondent sur les quatre surfaces* (σ), (σ_1), (Σ) *et* (Σ_1).

(σ) est la surface réglée la plus générale. En effet, les équations (22) montrent que le cône directeur dépend de deux seulement, F et f, des trois fonctions arbitraires F, f et φ; d'autre part, si l'on calcule le paramètre de distribution ϖ de (σ), on trouve

$$\varpi = \frac{1}{f'}\left[1 + f^2 + \left(\int F'f'\,dX\right)^2\right];$$

ce paramètre ne dépend donc également que de F et de f; on peut, en conséquence, se donner arbitrairement le cône directeur et le paramètre de distribution de (σ) et la surface dépend encore d'une fonction arbitraire φ, comme cela a lieu quand elle est la plus générale possible.

Étant données deux surfaces réglées applicables l'une sur l'autre avec parallélisme des génératrices, il est facile de reconnaître que la symétrique de l'une d'elles par rapport à une direction quelconque

lindrique en remplaçant (σ_1) par sa symétrique par rapport à l'origine des coordonnées. En général, du reste, cette opération permet de ramener le cas où (Σ_1) est une surface donnée quelconque au cas où c'est (Σ) qui est cette surface.

forme avec l'autre un couple pour lequel la surface (Σ) est un cylindre.

Mais le calcul précédent montre que c'est là le seul couple pour lequel (Σ) soit un cylindre. Ce même calcul donne d'ailleurs une forme simple pour les équations du couple le plus général de surfaces réglées applicables l'une sur l'autre avec parallélisme des génératrices; ce sont les équations (22) où l'on changerait le signe des expressions de x_1 et de z_1, c'est-à-dire

$$(23)\qquad \begin{cases} x,\ x'_1 = -\mathrm{Y}\displaystyle\int \mathrm{F}'f'\,d\mathrm{X} \pm \mathrm{X} - \int \mathrm{F}'\varphi'\,d\mathrm{X}, \\ y,\ y_1 = \mathrm{Y} \mp \displaystyle\int d\mathrm{X}\int \mathrm{F}''f\,d\mathrm{X}, \\ z,\ z'_1 = \mathrm{Y}f \pm \mathrm{F} + \varphi, \end{cases}$$

en désignant par x'_1 et z'_1 les valeurs de x_1 et de z_1 changées de signe, et en affectant comme précédemment les signes supérieurs à (σ).

Il existe des relations intéressantes entre la surface (Σ_1) et les surfaces (σ) et (σ_1) définies par les équations (21) et (22).

En premier lieu, le calcul montre que la ligne de striction est, sur chacune de ces trois surfaces, définie par la même relation

$$\mathrm{Y} = -\frac{\varphi'}{f'}.$$

Par conséquent *les lignes de striction se correspondent sur les trois surfaces* (σ), (σ_1) *et* (Σ_1) (elles devaient nécessairement se correspondre sur (σ) et (σ_1) qui sont applicables l'une sur l'autre).

Si l'on calcule ensuite le paramètre de distribution ϖ_1 de (Σ_1), on trouve

$$\varpi_1 = \frac{1}{f'}\left[f^2 + \left(\int \mathrm{F}'f'\,d\mathrm{X}\right)^2\right],$$

expression qui, rapprochée de la valeur obtenue ci-dessus pour ϖ, conduit à la relation

$$\frac{\varpi_1}{\varpi} = 1 - \frac{1}{1 + f^2 + \left(\displaystyle\int \mathrm{F}'f'\,d\mathrm{X}\right)^2};$$

or, si β est l'angle de la génératrice de (σ) ou de (σ_1) avec l'axe des Y, c'est-à-dire avec les génératrices de (Σ), les équations (22) de (σ) et de (σ_1) donnent

$$\cos^2\beta = \frac{1}{1+f^2+\left(\int F'f'dX\right)};$$

on a donc

$$\frac{\varpi_1}{\varpi} = 1 - \cos^2\beta,$$

$$\frac{\varpi_1}{\varpi} = \sin^2\beta;$$

on peut donc, en remarquant que β est le demi-angle des génératrices de (σ) et de (σ_1), énoncer le théorème suivant :

Si deux surfaces réglées (σ), (σ_1), *applicables l'une sur l'autre avec parallélisme des génératrices, sont disposées de telle sorte que le lieu* (Σ) *du milieu de la corde joignant deux points correspondants soit un cylindre, le lieu* (Σ_1) *de l'extrémité du vecteur parallèle à cette corde et égal à sa moitié est une surface réglée à plan directeur; le rapport des paramètres de distribution de* (Σ_1) *et de* (σ) *ou de* (σ_1) *est égal au carré du sinus du demi-angle des génératrices de* (σ) *et de* (σ_1).

Supposons, en particulier, que (Σ) soit un cylindre parabolique

$$Z = \frac{a}{2} X^2,$$

c'est-à-dire que

$$F(X) = \frac{a}{2} X^2.$$

Dans ce cas, il est facile de faire disparaître les intégrales des équations (23); il suffit de remplacer f et φ par une dérivée seconde f'' et une dérivée première φ' et d'employer l'intégration par parties; on obtient

$$\begin{aligned} x, x'_1 &= aY(f' - Xf'') \pm X + a(\varphi - X\varphi'), \\ y, y_1 &= \quad Y \mp af, \\ z, z'_1 &= \quad Yf'' \pm \frac{a}{2} X^2 + \varphi'. \end{aligned}$$

Il suffit alors de prendre pour f *et* φ *deux fonctions algébriques quelconques pour obtenir deux surfaces réglées algébriques applicables avec parallélisme des génératrices.*

Cette remarque n'est pas sans intérêt, car, étant donnée une surface réglée algébrique, il n'y a aucune raison pour que la surface réglée applicable sur celle-ci avec parallélisme des génératrices soit elle-même algébrique; par exemple, si la première surface est un hyperboloïde de révolution, on sait que la seconde est un hélicoïde réglé, c'est-à-dire *une surface transcendante.*

Cas ou la surface (Σ) est une quadrique dénuée de centre.

L'équation de la surface (Σ) peut alors s'écrire

$$Z = m^2 X^2 - n^2 Y^2, \tag{24}$$

m et n désignant deux constantes réelles ou purement imaginaires.

En portant d'abord l'expression (24) de Z dans l'équation (5), on voit que la fonction $Z_1(X, Y)$ doit satisfaire à l'équation

$$n^2 \frac{\partial^2 Z_1}{\partial X^2} - m^2 \frac{\partial^2 Z_1}{\partial Y^2} = 0;$$

il en résulte pour Z_1 l'expression

$$Z_1 = f'(mX + nY) + \varphi'(mX - nY),$$

f et φ étant deux fonctions arbitraires et f', φ' désignant les dérivées de ces fonctions par rapport à leurs arguments respectifs.

Les équations (3) et (4) donnent ensuite

$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial X^2} = -2m^2 n(f'' - \varphi'') + 2m^2 n^2 Y(f''' + \varphi'''),$$
$$\frac{\partial^2 Y_1}{\partial X \partial Y} = 2mn^3(f''' - \varphi'''),$$

et, par intégration,

$$\frac{\partial Y_1}{\partial X} = 2mn^2 Y(f'' + \varphi'') - 2mn(f' - \varphi'),$$

en négligeant une constante que l'on peut supposer contenue dans f' ou dans φ'.

On tire maintenant de la seconde des équations (2)

$$\frac{\partial Y_1}{\partial Y} = 2n^3 Y(f'' - \varphi''),$$

expression qui, rapprochée de la valeur ci-dessus de $\frac{\partial Y_1}{\partial X}$, conduit à

$$Y_1 = 2n^2 Y(f' + \varphi') - 2n(f - \varphi).$$

Enfin, d'après la première et la dernière des équations (2), on a

$$\frac{\partial X_1}{\partial X} = -2m^3 X(f'' + \varphi''),$$

$$\frac{\partial X_1}{\partial Y} = -2m^2 n X(f'' - \varphi'') + 2mn(f' - \varphi'),$$

et, en intégrant,

$$X_1 = -2m^2 X(f' + \varphi') + 2m(f + \varphi).$$

La surface (Σ_1) est, en définitive, représentée par les équations

$$(25)\qquad \begin{cases} X_1 = 2m(f + \varphi) - 2m^2 X(f' + \varphi'), \\ Y_1 = -2n(f - \varphi) + 2n^2 Y(f' + \varphi'), \\ Z_1 = f' + \varphi', \end{cases}$$

et, en vertu des relations (1), les surfaces (σ) et (σ_1) ont pour équations

$$(26)\qquad \begin{cases} x, x_1 = \pm 2m(f + \varphi) \mp 2m^2 X(f' + \varphi') + X, \\ y, y_1 = \mp 2n(f - \varphi) \pm 2n^2 Y(f' + \varphi') + Y, \\ z, z_1 = \pm (f' + \varphi') + m^2 X^2 - n^2 Y^2, \end{cases}$$

les signes supérieurs se rapportant à (σ) et les signes inférieurs à (σ_1).

Pour faire une application des équations (26), prenons

$$f = \frac{1}{6}(mX + nY)^3,$$

$$\varphi = -\frac{1}{6}(mX - nY)^3,$$

puis

$$m^2 = n^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Les surfaces (Σ) et (Σ_1), qui ont en général les équations (24) et (25), ont ici pour équations

$$Z = \frac{1}{\sqrt{2}} (X^2 - Y^2),$$

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= -X^2 Y + \frac{Y^3}{3}, \\ Y_1 &= XY^2 - \frac{X^3}{3}, \\ Z_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} XY. \end{aligned}\right.$$

On voit que (Σ) *est un paraboloïde hyperbolique équilatère.*

Donnons maintenant au système d'axes OX, OY une rotation autour de l'origine, dans le plan XOY, à l'aide des formules de transformation

$$X = X' \cos\alpha - Y' \sin\alpha,$$
$$Y = X' \sin\alpha + Y' \cos\alpha,$$

et prenons pour α l'un des angles définis par

$$\cos 2\alpha = -\sin 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

On trouve que les deux surfaces (Σ) et (Σ_1) ont pour équation, avec les nouvelles coordonnées X', Y', Z et X'_1, Y'_1, Z_1, en supprimant les accents

$$Z = \frac{X^2}{2} + XY - \frac{Y^2}{2},$$

$$\left\{\begin{aligned} X_1 &= -XY^2 + \frac{X^3}{3}, \\ Y_1 &= -X^2 Y + \frac{Y^3}{3}, \\ Z_1 &= -\frac{X^2}{2} + XY + \frac{Y_2}{2}. \end{aligned}\right.$$

Pour obtenir les équations de (σ) et de (σ_1), il suffit d'appliquer les relations (1) à ces nouvelles coordonnées, car le changement d'axes n'a pas modifié les relations géométriques qui existent entre les quatre surfaces (σ), (σ_1), (Σ), (Σ_1) ; on trouve ainsi, en continuant de désigner par x, y, z, x_1, y_1, z_1 les coordonnées de (σ) et (σ_1) après le changement d'axes

$$(27) \qquad \left\{\begin{aligned} x &= X - XY^2 + \frac{X^3}{3}, & x_1 &= X + XY^2 - \frac{X^3}{3}, \\ y &= Y - X^2 Y + \frac{Y^3}{3}, & y_1 &= Y + X^2 Y - \frac{Y^3}{3}, \\ z &= 2XY, & z_1 &= X^2 - Y^2. \end{aligned}\right.$$

On reconnaît en (σ_1) *la surface minima d'Enneper* rapportée à ses lignes de courbure.

Quant à (σ), si l'on calcule pour cette surface les six rotations p, q, r, p_1, q_1, r_1 considérées par Codazzi, p, q, r se rapportant au déplacement le long de la courbe $Y = \text{const.}$, et p_1, q_1, r_1 au déplacement le long de la courbe $X = \text{const.}$, on trouve

$$p_1 = q = 0.$$

Cela veut dire que, sur (σ), X et Y sont les paramètres des lignes asymptotiques; ainsi les lignes asymptotiques de (σ) correspondent aux lignes de courbure de (σ_1) et sont par suite rectangulaires ; il suit de là que (σ) est *la surface minima adjointe à la surface d'Enneper.*

Si l'on désigne par c, c', c'' les cosinus directeurs de la normale à (σ) et par c_1, c'_1, c''_1 les cosinus directeurs de la normale à (σ_1), ces normales étant dirigées de manière à former avec les tangentes aux courbes $X = \text{const.}$ et $Y = \text{const.}$ deux trièdres *de même signe* attachés aux deux surfaces, on trouve

$$c = \frac{-2X}{1 + X^2 + Y^2}, \qquad c_1 = \frac{-2Y}{1 + X^2 + Y^2},$$

$$c' = \frac{2Y}{1 + X^2 + Y^2}, \qquad c'_1 = \frac{-2X}{1 + X^2 + Y^2},$$

$$c'' = \frac{1 - X^2 - Y^2}{1 + X^2 + Y^2}, \qquad c''_1 = \frac{1 - X^2 - Y^2}{1 + X^2 + Y^2},$$

expressions qui montrent que *les normales aux deux surfaces deviennent parallèles et de même sens si l'on donne à* (σ) *une rotation positive de* $90°$ *autour de* Oz.

En résumé :

La surface minima d'Enneper et son adjointe peuvent être disposées de manière que le lieu des milieux des cordes joignant les points correspondants soit un paraboloïde hyperbolique équilatère.

Cas ou la surface (Σ) est une quadrique a centre.

L'équation de la surface (Σ) peut s'écrire, dans ce cas,

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

a, b, c étant réels ou purement imaginaires.

Supposons calculées les coordonnées de la surface correspondante (Σ_1) ; les coordonnées des deux surfaces (σ) et (σ_1) applicables l'une sur l'autre ont, comme nous le savons, pour coordonnées

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} x &= X + X_1, & x_1 &= X - X_1, \\ y &= Y + Y_1, & y_1 &= Y - Y_1, \\ z &= Z + Z_1, & z_1 &= Z - Z_1. \end{aligned}\right.$$

Posons

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{X}{a} &= X', & aX_1 &= X'_1, \\ \frac{Y}{b} &= Y', & bY_1 &= Y'_1, \\ \frac{Z}{c} &= Z', & cZ_1 &= Z'_1. \end{aligned}\right.$$

Ainsi qu'on le voit tout de suite, les deux surfaces (σ') et (σ'_1), de coordonnées

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} x' &= X' + X'_1, & x'_1 &= X' - X'_1, \\ y' &= Y' + Y'_1, & y'_1 &= Y' - Y'_1, \\ z' &= Z' + Z'_1, & z'_1 &= Z' - Z'_1, \end{aligned}\right.$$

sont aussi applicables l'une sur l'autre. Or, pour celles ci, les deux surfaces jouant le rôle de (Σ) et de (Σ_1), surfaces que nous désignerons par (Σ') et (Σ'_1), ont pour coordonnées respectives X', Y', Z' et X'_1, Y'_1, Z'_1, et (Σ') satisfait à l'équation

$$X'^2 + Y'^2 + Z'^2 - 1 = 0,$$

c'est-à-dire que (Σ') est une sphère.

Ainsi, *à tout couple* $(\sigma), (\sigma_1)$ *de surfaces applicables tel que* (Σ) *soit une quadrique à centre, correspond un couple* (σ') (σ'_1) *tel que* (Σ') *soit une sphère.*

La réciproque est vraie et se démontre en remontant des équations (30) aux équations (28) à l'aide de la transformation (29).

Or, si le couple $(\sigma'), (\sigma'_1)$ est tel que (Σ') soit une sphère, le couple composé de (σ') et de la surface (σ'_2) symétrique de (σ'_1) par rapport à l'origine est tel que la corde joignant les points correspondants ait une longueur constante. Par conséquent, *la recherche des couples* (σ), (σ_1) *de surfaces applicables tels que la surface* (Σ) *soit une quadrique à centre se ramène à la recherche des couples de surfaces* (σ'), (σ'_2) *applicables avec invariabilité de la distance des points correspondants.*

Ces couples (σ'), (σ'_2) ont été étudiés par Ribaucour.

Récemment, M. Caronnet a donné un moyen simple et élégant de calculer leurs coordonnées que j'appelle x', y', z' et x'_2, y'_2, z'_2 (¹).

En se reportant au travail de M. Caronnet, dans lequel il faut faire $l = 2$, puisque la transformation (29) rend égale à 2 la longueur constante des cordes joignant les points correspondants de (σ') et de (σ'_2), on voit que les coordonnées de ces deux surfaces sont, avec nos notations, définies par les relations

$$x',\ y',\ z' = X'_1,\ Y'_1,\ Z'_1 + X',\ Y',\ Z',$$
$$x'_2,\ y'_2,\ z'_2 = X'_1,\ Y'_1,\ Z'_1 - X',\ Y',\ Z',$$

en prenant

$$X' = \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}, \qquad Y' = i\,\frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}, \qquad Z' = \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta}, \tag{31}$$

et, pour X'_1, Y'_1, Z'_1, les racines des trois équations

(32) (²)
$$\left\{\begin{aligned}&(1-\beta^2)X'_1 + i(1+\beta^2)Y'_1 - 2\beta Z'_1 = 4B,\\&(1-\alpha^2)X'_1 - i(1+\alpha^2)Y'_1 - 2\alpha Z'_1 = 4A,\\&(\alpha+\beta)X'_1 + i(\alpha-\beta)Y'_1 + (1-\alpha\beta)Z'_1\\&\qquad = 2(A\beta + B\alpha) - (1+\alpha\beta)(A' + B'),\end{aligned}\right.$$

A est une fonction arbitraire de α, et B une fonction arbitraire de β.

(¹) *Bulletin de la Société mathématique*, t. XXI, p. 134.

(²) Je signale ici une erreur d'impression au commencement de l'équation (5') du travail de M. Caronnet ; il faut lire

$$-(\alpha + \beta)x + \ldots.$$

Je remplace d'ailleurs, dans ce travail, A par $4A$, et B par $4B$.

En résolvant le système (32) par rapport à X'_1, Y'_1, Z'_1, on trouve

$$
(33)\quad \begin{cases}
X'_1 = \dfrac{2(A+B)-(\alpha+\beta)(A'+B')}{1+\alpha\beta}, \\[2ex]
Y'_1 = i\,\dfrac{2(A-B)-(\alpha-\beta)(A'+B')}{1+\alpha\beta}, \\[2ex]
Z'_1 = -\dfrac{2(A\beta+B\alpha)+(1-\alpha\beta)(A'+B')}{1+\alpha\beta}.
\end{cases}
$$

Des expressions (31) et (33), et des relations (29), on déduit aisément X, Y, Z, X_1, Y_1, Z_1, et ces valeurs portées dans les équations (28) donnent enfin, pour les équations des couples (σ), (σ_1) applicables de manière que (Σ) soit une quadrique à centre,

$$
(34)\quad \begin{cases}
x,\ x_1 = \dfrac{a(\alpha+\beta) \pm \frac{1}{a}\left[2(A+B)-(\alpha+\beta)(A'+B')\right]}{1+\alpha\beta}, \\[2ex]
y,\ y_1 = i\,\dfrac{b(\alpha-\beta) \pm \frac{1}{b}\left[2(A-B)-(\alpha-\beta)(A'+B')\right]}{1+\alpha\beta}, \\[2ex]
z,\ z_1 = \dfrac{c(1-\alpha\beta) \mp \frac{1}{c}\left[2(A\beta+B\alpha)+(1-\alpha\beta)(A'+B')\right]}{1+\alpha\beta},
\end{cases}
$$

les signes supérieurs se rapportant à (σ), et les signes inférieurs à (σ_1).

Pour que (σ) et (σ_1) soient des surfaces réelles, il faut :

1° Si (Σ) est un ellipsoïde, c'est-à-dire si a, b, c sont réels, que α et β, A et B soient imaginaires conjugués ;

2° Si (Σ) est un hyperboloïde à une nappe, c'est-à-dire si a et c sont réels et b purement imaginaire, que α, β, A, B soient réels ;

3° Enfin, si (Σ) est un hyperboloïde à deux nappes, c'est-à-dire si c est réel et a, b purement imaginaires, que α et $-\beta$, A et $-$B soient imaginaires conjugués.

Si l'on fait $a = b = c = \frac{l}{2}$ dans les équations (34), et si l'on change les signes de x_1, y_1, z_1, ces équations définissent, sous une forme assez simple, les couples de surfaces applicables, tels que la corde joignant les points correspondants soit constante et égale à l.