Bulletin de la S. M. F.

P. Adam

Théorème sur la déformation des surfaces de translation

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 204-209
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__204_0>

THÉORÈME SUR LA DÉFORMATION DES SURFACES DE TRANSLATION;

Par M. Paul ADAM.

Dans un récent article *Sur la déformation des surfaces* (1), j'ai été amené à considérer les deux surfaces suivantes :

$$(1)\qquad \begin{cases} x = 2u^2 + v^2, \\ y = -2av, \\ z = 2bu, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} x_1 = -2\int\sqrt{b^2+3u^2}\,du, \\ y_1 = u^2 + 2v^2, \\ z_1 = 2\int\sqrt{a^2-3v^2}\,dv, \end{cases}$$

qui sont applicables l'une sur l'autre et dont la première est un paraboloïde elliptique.

La forme des équations ci-dessus montre que *ces deux surfaces sont engendrées par la translation plane d'une courbe plane* (u) *ou* (v) *invariable de forme et de grandeur*, et que, pour chacune d'elles, *les deux systèmes de courbes génératrices* (u) *et* (v) *sont dans des plans rectangulaires*.

Je vais démontrer que, d'une manière générale :

***Pour qu'une surface* (S), *engendrée par la translation plane d'une courbe plane invariable de forme et de grandeur, puisse se déformer en conservant ce mode de génération, avec correspondance des deux systèmes de courbes génératrices* (u) *et* (v) *sur* (S) *et sur sa transformée* (S_1), *il faut et il suffit que ces deux systèmes de courbes soient dans des plans rectangulaires*.**

Supposons en effet que ces courbes génératrices soient

1° Pour (S), les courbes (v), dans les plans parallèles à xOy, et les courbes (u), dans des plans parallèles entre eux et à Ox;

---

(1) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XXIII, p. 106.

2° Pour (S_1), les courbes (u), dans des plans parallèles à xOy, et les courbes (v), dans des plans parallèles entre eux et à Ox.

Les équations de (S) et de (S_1) pourront s'écrire

$$\begin{aligned} x &= U_0 + V_0, & x_1 &= U_1 + V_1, \\ y &= U + mv, & y_1 &= V_2 + m_1 u, \\ z &= v, & z_1 &= u. \end{aligned}$$

Il s'agit de démontrer que, si (S) et (S_1) sont applicables l'une sur l'autre, c'est-à-dire si l'on a

$$(3) \qquad \left\{ \begin{aligned} U_0'^2 + U'^2 &= U_1'^2 + m_1^2 + 1, \\ V_0'^2 + m^2 + 1 &= V_1'^2 + V_2'^2, \\ U_0' V_0' + m U' &= U_1' V_1' + m_1 V_2', \end{aligned} \right.$$

les constantes m et m_1 sont nulles.

La troisième des équations (3), différentiée par rapport à u puis à v, donne

$$U_0'' V_0'' = U_1'' V_1''$$

En laissant de côté les hypothèses $V_0'' = 0$, $U_1'' = 0$, qui donnent des cylindres, on a donc

$$\frac{U_0''}{U_1''} = \frac{V_1''}{V_0''} = a,$$

a désignant une constante, et en intégrant

$$(4) \qquad \left\{ \begin{aligned} U_0 &= a U_1 + bu, \\ V_1 &= a V_0 + cv. \end{aligned} \right.$$

Ces expressions, substituées dans la dernière équation (3), fournissent

$$(5) \qquad c U_1' - m U' = b V_0' - m_1 V_2' = g,$$

g étant une nouvelle constante arbitraire.

Si l'on suppose $m \neq 0$, il est facile de voir qu'il faut aussi faire $m_1 \neq 0$ pour éviter que les deux surfaces (S) et (S_1) soient des cylindres. On peut alors tirer de (4) et (5) les expressions de U_0', U', V_1', V_2' en fonction de U_1' et de V_0', et en les portant dans les deux premières équations (3), on trouve

$$(a\,U_1' + b)^2 + \left(\frac{c\,U_1' - g}{m}\right)^2 = U_1'^2 + m_1^2 + 1,$$
$$(a\,V_0' + c)^2 + \left(\frac{b\,V_0' - g}{m_1}\right)^2 = V_0'^2 + m^2 + 1.$$

Si on laisse de côté les cylindres, ces relations doivent avoir lieu identiquement; de là les six équations

$$a^2 + \frac{c^2}{m^2} = 1, \qquad a^2 + \frac{b^2}{m_1^2} = 1,$$
$$ab - \frac{cg}{m^2} = 0, \qquad ac - \frac{bg}{m_1^2} = 0,$$
$$b^2 + \frac{g^2}{m^2} = m_1^2 + 1, \qquad c^2 + \frac{g^2}{m_1^2} = m^2 + 1.$$

On en déduit sans peine

$$m_1^2 = m^2, \qquad b^2 = c^2,$$

puis

$$g^2 = a^2 m^4 = m^2(m^2 - b^2) = m^2(m^2 - b^2) + m^2,$$

et, par conséquent,

$$m = m_1 = 0.$$

Réciproquement, si l'on suppose $m = m_1 = 0$, les équations de (S) et de (S_1) sont, aux notations près,

$$x = U + V, \qquad x_1 = U_1 + V_1,$$
$$y = u, \qquad y_1 = U_2,$$
$$z = v, \qquad z_1 = V_2,$$

et, pour que ces deux surfaces s'appliquent l'une sur l'autre, il suffit de prendre

$$U_1 = a\,U, \qquad U_2 = \int \sqrt{(1 - a^2)\,U'^2 + 1}\; du,$$
$$V_1 = \frac{V}{a}, \qquad V_2 = \int \sqrt{\left(1 - \frac{1}{a^2}\right)V'^2 + 1}\; dv.$$

Quand $a = 1$, (S_1) coïncide avec (S); si a décroît de 1 à zéro ou croît de 1 à ∞, (S_1) part de (S) et se déforme d'une manière continue sans que les courbes génératrices (u) et (v) cessent d'être planes et dans des plans rectangulaires.

Par exemple, si (S) est le paraboloïde

$$(6)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{u^2}{2p} + \dfrac{v^2}{2q}, \\ y = u, \\ z = v, \end{cases}$$

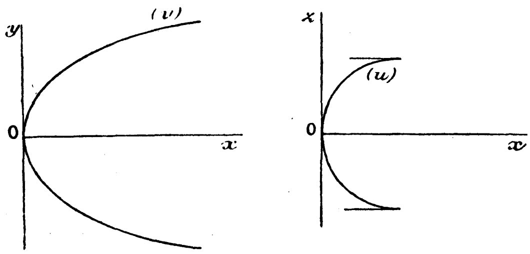
les équations de (S_1) seront

$$(7)\qquad \begin{cases} x_1 = a\dfrac{u^2}{2p} + \dfrac{1}{a}\dfrac{v^2}{2q}, \\ y_1 = \displaystyle\int\sqrt{(1-a^2)\frac{u^2}{p^2}+1}\,du, \\ z_1 = \displaystyle\int\sqrt{\left(1-\frac{1}{a^2}\right)\frac{v^2}{q^2}+1}\,dv. \end{cases}$$

Les surfaces (1) et (2) sont un cas particulier des surfaces (6) et (7).

En ce qui concerne celles-ci, si $0 < a < 1$, (S_1) s'applique sur une zone du paraboloïde comprise entre deux plans parallèles à xOy et d'autant plus large que a est plus voisin de 1. Les courbes (v) tracées sur (S_1) sont de forme parabolique; les courbes (u) sont au contraire limitées (*fig.* 1 et 2); (S_1) est engendrée par (v)

Fig. 1 et 2.

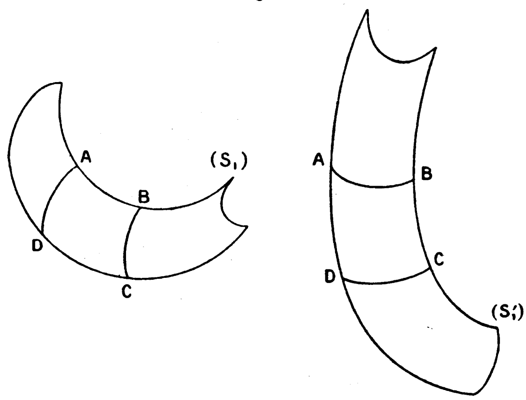


s'appuyant sur (u), ou inversement. Si le paraboloïde est elliptique, les courbes (u) et (v) tournent leurs concavités dans le même sens par rapport à l'axe Ox; s'il est hyperbolique, leurs concavités sont tournées en sens contraires.

Si a, qui était inférieur à 1, dépasse l'unité, les courbes (v) prennent la forme des courbes (u) et inversement, et (S_1) s'applique sur une zone du paraboloïde comprise entre deux plans parallèles à xOz.

Considérons la surface (S_1) qui correspond à une valeur a_1 de a comprise entre o et 1, et la surface (S'_1) qui correspond à la valeur $\frac{1}{a_1}$ de a; (S_1) et (S'_1) sont applicables l'une sur l'autre dans une région limitée par un quadrilatère curviligne ABCD (*fig.* 3),

Fig. 3.



avec correspondance des deux systèmes de courbes génératrices (u) et (v). Il est facile de voir que les (v) de (S_1) sont semblables aux (u) de (S'_1) avec rapport de similitude $\frac{p}{q}$, et que les (u) de (S_1) sont semblables aux (v) de (S'_1) avec rapport de similitude inverse $\frac{q}{p}$.

On a donc là l'exemple d'un réseau composé, dans chaque famille, de courbes égales, susceptible de se déformer de façon que les courbes de la première famille deviennent semblables aux courbes de la seconde avec un certain rapport de similitude k, et les courbes de la seconde semblables aux courbes de la première avec rapport de similitude $\frac{1}{k}$.

Les équations (7) constituent une solution, avec *une* constante arbitraire a, de la déformation du paraboloïde. Il est facile de trouver des surfaces formant une *intégrale complète* de ce problème, et même une intégrale contenant *sept* constantes arbitraires.

Supposons en effet que (S_1), au lieu d'être une surface engendrée par la translation plane d'une courbe plane, soit engendrée par la translation quelconque d'une courbe quelconque; ses équations seront de la forme

$$(8)\qquad \begin{cases} x_1 = U + V, \\ y_1 = U_1 + V_1, \\ z_1 = U_2 + V_2, \end{cases}$$

et elle sera applicable sur le paraboloïde (6) si l'on a

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{uv}{pq} = U'V' + U'_1 V'_1 + U'_2 V'_2, \\ \dfrac{u^2}{p^2} + 1 = U'^2 + U'^2_1 + U'^2_2, \\ \dfrac{v^2}{q^2} + 1 = V'^2 + V'^2_1 + V'^2_2. \end{cases}$$

La première de ces équations est vérifiée si l'on prend

$$(10)\qquad \begin{cases} U_1 = \dfrac{au^2}{2p} + bU, \\ U_2 = \dfrac{cu^2}{2p} + gU, \\ \dfrac{v^2}{2q} = aV_1 + cV_2, \\ V = -bV_1 - gV_2, \end{cases}$$

a, b, c, g étant quatre constantes arbitraires; si l'on tire U_1, U_2, V_1, V_2 de ces quatre relations et qu'on les porte dans les deux dernières relations (9), on obtient U et V par des quadratures; les formules (10) donnent ensuite U_1, U_2, V_1, V_2, et le système (8) définit alors une surface dépendant de quatre constantes arbitraires et applicable sur le paraboloïde.

Il n'y a plus qu'à opérer, suivant une remarque faite par Bour [1], une rotation des axes autour de l'origine pour introduire dans les équations de cette surface trois nouvelles constantes arbitraires.

---

[1] *Journal de l'École Polytechnique*, XXXIX^e Cahier.