BULLETIN DE LA S. M. F.

D. ANDRÉ

Mémoire sur les séquences des permutations circulaires

Bulletin de la S. M. F., tome 23 (1895), p. 122-184
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1895__23__122_0>

MÉMOIRE SUR LES SÉQUENCES DES PERMUTATIONS CIRCULAIRES;

Par M. Désiré André.

INTRODUCTION.

1. Le présent Mémoire est un travail d'ensemble sur les *séquences des permutations circulaires*. Nous nous y proposons de traiter, en une seule fois, pour les séquences de ces permutations, la plupart des questions que nous avons traitées, dans nos Mémoires antérieurs ([1]), pour les *séquences des permutations rectilignes,* c'est-à-dire des permutations ordinaires. Les six Chapitres dont ce Mémoire se compose sont tous consacrés à cet unique objet.

2. Nous définissons d'abord (Ch. I) les permutations circulaires des n premiers nombres, et nous leur étendons les notions de *maxima,* de *minima* et de *séquences*.

Désignant par $Q_{n,s}$ le nombre des permutations circulaires de n éléments qui présentent chacune s séquences, nous étudions (Ch. II) le nombre $Q_{n,2}$ des permutations circulaires qui présentent le moins de séquences, et les nombres $Q_{2\nu,2\nu}$, $Q_{2\nu-1,2\nu-2}$ de celles qui en présentent le plus.

De la considération des nombres $Q_{n,s}$, nous déduisons (Ch. III) une *formule* tout à fait *fondamentale,* reliant ces nombres entre eux, permettant de les calculer de proche en proche et d'en former un tableau triangulaire que nous nommons le *triangle des séquences des permutations circulaires*.

Les *colonnes verticales* de ce triangle s'étendent indéfiniment vers le bas. Nous montrons (Ch. IV) que les nombres composant chacune d'elles sont les termes d'une série récurrente proprement

([1]) *Mémoire sur le nombre des permutations alternées* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 1881); *Étude sur les maxima, minima et séquences des permutations* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure,* 1884); *Mémoire sur le triangle des séquences* (*Savants étrangers,* t. XXXII); *Mémoire sur les permutations quasi alternées* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées,* 1895).

dite; nous donnons l'ordre de cette série, ainsi que son équation génératrice.

Les *lignes horizontales* du triangle ont chacune un nombre limité de termes. Nous regardons ces termes (Ch. V) comme les coefficients d'un certain polynôme entier en x ; nous calculons, pour $x = 1$, les deux premières dérivées de ce polynôme; nous en déduisons la somme et la valeur moyenne des nombres de séquences des permutations circulaires de n éléments, la somme et la valeur moyenne des carrés de ces mêmes nombres.

Enfin (Ch. VI), nous formons une série entière en x et en y, qui est convergente pour les valeurs suffisamment petites de ces variables, et dont la somme, que nous donnons explicitement, est la fonction génératrice du *triangle tout entier*.

3. Comme nous l'avons dit en commençant (1), les différentes questions que nous traitons ainsi pour les permutations circulaires sont du nombre de celles que nous avons traitées autrefois pour les permutations rectilignes. Aussi, constamment, dans le présent travail, nous inspirons-nous de nos Mémoires antérieurs, en reproduisons-nous l'ordre et les méthodes. En particulier, nos trois derniers Chapitres sont une imitation presque servile de notre *Mémoire sur le triangle des séquences* des permutations rectilignes.

C'est pour cela, dans ces trois derniers Chapitres, que nous nous servons, pour ainsi dire, exclusivement du calcul, tandis que, dans les trois précédents, nous avons uniquement recours à des raisonnements directs, purement combinatoires.

4. Dans l'étude des permutations, comme dans la théorie des nombres et peut-être dans toute l'analyse du discontinu, il suffit d'une très légère différence dans les définitions et les énoncés, pour en produire d'énormes dans les résultats. La très légère différence qui existe, comme on le verra (6), entre la définition des permutations circulaires et celle des permutations rectilignes produit ainsi, quand on passe de celles-ci à celles-là, de continuelles simplifications, des transformations inattendues, et aussi, à un certain point de vue, un véritable appauvrissement.

Ces simplifications se manifestent dans la plupart des formules. Elles proviennent de ce que les permutations rectilignes, à cause de leurs éléments extrêmes, présentent une certaine irrégularité, tandis que les permutations circulaires, où ces éléments extrêmes n'existent point, nous offrent une régularité absolue.

Les transformations dont nous venons de parler sont celles de plusieurs propriétés asymptotiques des permutations rectilignes en propriétés habituelles des permutations circulaires. Ce fait si remarquable tient à ce que ces propriétés asymptotiques des permutations rectilignes se rapportent à des permutations où le nombre des éléments est infiniment grand et où, par conséquent, l'irrégularité due aux éléments extrêmes est infiniment atténuée.

Quant à l'appauvrissement que nous avons signalé, il résulte de ce que, dans les permutations circulaires, le nombre des séquences est toujours pair (**16**). On ne peut donc partager ces permutations en deux espèces, comme nous l'avons fait pour les permutations rectilignes, d'après le nombre pair ou impair de leurs séquences. Il n'existe donc, dans les permutations circulaires, rien qui rappelle ce partage, non plus que les théorèmes si curieux auxquels il nous a conduit.

5. Il y a plusieurs années que nous avons imaginé d'étendre aux permutations circulaires les notions de maxima, de minima et de séquences qu'on n'avait encore considérées que pour les permutations rectilignes. C'est en 1893 (1) que nous avons fait connaître cette extension. Le présent Mémoire contient les résultats que nous avions obtenus alors, et tous ceux que de nouvelles recherches nous ont fait trouver depuis. Nous avons énoncé les principaux d'entre eux, sans explications ni démonstrations, dans une Note présentée à l'Académie des Sciences, dans la séance du 1er avril 1895.

CHAPITRE PREMIER.

DÉFINITIONS PRÉLIMINAIRES.

I. — Définition et nombre des permutations circulaires.

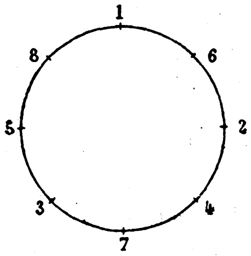
6. Divisons une circonférence en n parties égales ou inégales, et, aux n points de division, plaçons, dans un ordre quelconque,

(1) Au Congrès des Sociétés savantes, le 5 avril.

n nombres distincts, ou, plus simplement, comme nous le ferons toujours, les n premiers nombres. Nous formons ainsi une *permutation circulaire* de ces n premiers nombres.

Telle est la permutation (*fig.* 1) où n est égal à 8.

Fig. 1.



7. Pour lire une permutation circulaire des n premiers nombres, on peut évidemment commencer par l'un quelconque des nombres qui la composent, et tourner dans un sens quelconque autour de la circonférence qui la supporte. Nous conviendrons de commencer toujours par le nombre 1, et de tourner toujours dans le sens direct, c'est-à-dire dans le sens opposé à celui de la rotation des aiguilles d'une montre.

La permutation circulaire qu'on vient de considérer (6) se lira donc

$$1 \quad 8 \quad 5 \quad 3 \quad 7 \quad 4 \quad 2 \quad 6.$$

8. D'après ces conventions, chaque permutation circulaire des n premiers nombres se confond, à la lecture, avec une permutation rectiligne, c'est-à-dire avec une permutation ordinaire, composée de ces mêmes nombres et commençant par l'unité. Il s'ensuit immédiatement que le nombre de ces permutations circulaires est juste égal au nombre de ces permutations rectilignes.

Or, le nombre des permutations rectilignes des n premiers nombres est égal à $n!$ Le nombre de celles qui commencent par l'unité en est la $n^{\text{ième}}$ partie. Donc :

Le nombre des permutations circulaires des n premiers nombres est égal à la $n^{\text{ième}}$ partie de $n!$, c'est-à-dire à $(n-1)!$

9. Mais il ne faudrait point conclure, de nos conventions sur la lecture des permutations circulaires, que nous regardons ces

permutations comme ayant chacune un premier et un dernier élément, un commencement et une fin.

Le caractère propre des permutations circulaires, c'est de n'avoir ni commencement, ni fin; de former chacune un ensemble d'une régularité parfaite, où tous les éléments sont traités de même, chaque élément s'y trouvant toujours placé entre deux autres éléments.

Les permutations rectilignes ne présentent point cette régularité. Leur premier et leur dernier élément n'y sont point placés entre deux autres. Ils introduisent ainsi, dans ces permutations, une certaine irrégularité.

C'est d'ailleurs, comme nous l'avons déjà dit (4), cette régularité absolue des permutations circulaires qui explique les simplifications continuelles qui se produisent dans les formules, quand on passe des permutations rectilignes aux permutations circulaires.

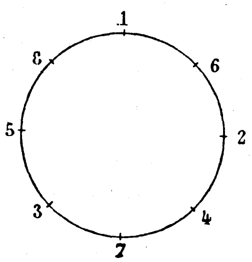
II. — Maxima, minima et séquences.

10. Considérons une permutation circulaire quelconque des n premiers nombres, et, dans cette permutation, l'un quelconque des nombres qui la composent.

Ce nombre est, pour nous, un *maximum,* s'il est plus grand que chacun de ses deux voisins; un *minimum,* s'il est moindre que chacun d'eux.

Dans cette même permutation, nous appelons *séquence* une suite de nombres juxtaposés, dont le premier est un maximum, le dernier un minimum, ou réciproquement, mais dont aucun intermédiaire n'est ni un maximum, ni un minimum.

Fig. 2.

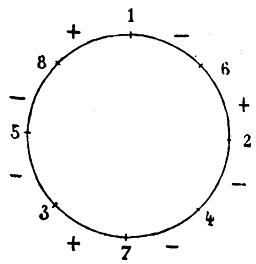


Dans la permutation circulaire (*fig.* 2), il y a trois maxima, 8, 7, 6; trois minima, 1, 3, 2; six séquences, 18, 853, 37, 742, 26, 61.

11. On pourrait aussi, dans une permutation circulaire quelconque, définir les maxima, minima et séquences à l'aide des signes des n différences qu'on obtient lorsque, tournant autour de la circonférence en sens direct, on retranche chaque nombre du suivant. Les n signes trouvés ainsi forment une nouvelle permutation circulaire, composée d'éléments de deux sortes : des signes $+$ et des signes $-$. A chaque variation $+-$ correspond évidemment un maximum; à chaque variation $-+$ correspond un minimum; à chaque suite de signes identiques allant d'une variation à une autre correspond une séquence.

C'est ce que l'on voit très clairement sur la *fig.* 3.

Fig. 3.



12. Ces définitions si simples se simplifient encore à l'aide du procédé suivant.

Considérons la circonférence qui supporte une permutation circulaire quelconque des n premiers nombres et, en même temps, la surface cylindrique dont cette circonférence est la section droite; traçons, sur cette surface, les génératrices passant par les points où les n nombres sont placés; prenons sur elles, à partir de la circonférence et en allant vers le haut, n longueurs proportionnelles à ces nombres; joignons enfin l'extrémité de chacune de ces longueurs à l'extrémité de la suivante par le plus petit arc possible d'hélice : nous obtenons, sur le cylindre, une ligne brisée fermée, qui est une représentation graphique de la permutation.

Cette ligne brisée évidemment présente n côtés et n sommets, Un sommet placé plus haut que ses deux voisins correspond à un maximum ; un sommet placé plus bas correspond à un minimum ; une suite de côtés, tous montants ou tous descendants, allant d'un minimum à un maximum ou réciproquement, correspond à une séquence montante ou descendante de la permutation.

13. Nous venons, en quelque sorte, de donner trois définitions des maxima, minima et séquences des permutations circulaires. Les séquences évidemment sont les unes montantes, les autres descendantes. Elles peuvent avoir aussi des longueurs variables, qu'on évalue, suivant la définition qu'on adopte, par le nombre des éléments, des signes ou des côtés qui correspondent à chaque séquence.

Dans la permutation circulaire citée plus haut, à la séquence 8 5 3 correspondent trois éléments, qui sont les nombres 8, 5 et 3 ; deux signes, qui sont deux signes — ; deux côtés, qui sont tous deux descendants.

14. D'ailleurs, les définitions qui précèdent sont pour ainsi dire identiques à celles que nous avons données pour les permutations rectilignes, dans notre *Étude sur les maxima, minima et séquences des permutations.*

Cette extension aux permutations circulaires des notions de maxima, de minima et de séquences était très naturelle et très simple. Comme nous l'avons déjà dit (5), nous l'avons fait connaître pour la première fois en 1893, dans l'une des séances du Congrès des Sociétés savantes.

III. — Remarques sur les maxima, minima et séquences.

15. Si l'on considère la ligne brisée cylindrique correspondant à une permutation circulaire quelconque des n premiers nombres, on s'aperçoit facilement que, dans cette ligne, les maxima alternent avec les minima. Il s'ensuit immédiatement que :

Dans toute permutation circulaire des n premiers nombres, il y a juste autant de minima qu'il y a de maxima.

16. On voit aussi facilement, sur la ligne brisée cylindrique, que les séquences de cette ligne sont alternativement montantes et descendantes. Par conséquent :

Dans toute permutation circulaire des n premiers nombres, il y a un nombre pair de séquences.

Ce nombre pair est, d'ailleurs, égal au nombre total des maxima et des minima, puisque, d'une part, chaque séquence aboutit à un maximum ou à un minimum; et que, de l'autre, chaque maximum ou minimum est l'extrémité d'une séquence.

17. Nous avons partagé [1], il y a quelque temps déjà, les permutations rectilignes des n premiers nombres en deux *espèces*, d'après le nombre pair ou impair des séquences qu'elles présentent; et ce mode de partage nous a conduit [2] à des propositions nombreuses et importantes.

Il ne peut point s'étendre aux permutations circulaires, celles-ci ayant toujours un nombre pair de séquences. C'est là une différence nouvelle et profonde entre les permutations rectilignes et les permutations circulaires. C'est, comme nous l'avons dit plus haut (**4**), pour la théorie des permutations circulaires, la cause d'un véritable appauvrissement.

18. Dans les permutations circulaires des n premiers nombres, il est facile de voir entre quelles limites peuvent varier le nombre des maxima, celui des minima et celui des séquences.

Le nombre des maxima, comme celui des minima, est au moins égal à 1. Le nombre des séquences est au moins égal à 2.

Que n soit pair et égal à 2ν, ou impair et égal à $2\nu+1$, le nombre des maxima, comme celui des minima, est, au plus, égal à ν; le nombre des séquences est, au plus, égal à 2ν.

Pour ne parler que des séquences, on peut donc dire :

Si l'on désigne par ν la partie entière de la moitié de n, le nombre des séquences d'une permutation circulaire quelconque de n éléments ne peut prendre que l'une des ν valeurs

$$2, 4, 6, \ldots, 2\nu.$$

---

(1) Dans une Note présentée à la Société philomathique de Paris, le 27 juin 1891.

(2) Voyez : *Sur le partage en quatre groupes des permutations des n premiers nombres* (*Bulletin de la Société philomathique*, Paris, 1892-1893); *Mémoire sur le triangle des séquences* (*Recueil des savants étrangers*, t. XXXII).

19. D'après ce qui précède, dans toute permutation circulaire, le nombre des maxima, celui des minima et celui des séquences sont trois nombres liés entre eux de telle sorte que la connaissance de l'un quelconque des trois entraîne immédiatement celle des deux autres. Il suffit donc, pour étudier ces trois nombres, de s'occuper d'un seul d'entre eux. Nous ne nous occuperons, dans tout ce qui va suivre, que du seul nombre des séquences.

CHAPITRE II.

GÉNÉRALITÉS SUR LES NOMBRES $Q_{n,s}$.

I. — Définition des nombres $Q_{n,s}$.

20. Considérons toutes les permutations circulaires des n premiers nombres. Nous pouvons évidemment les classer ainsi : celles qui ont 2 séquences; celles qui en ont 4; celles qui en ont 6; ...; celles qui en ont 2ν.

Dans le présent Mémoire, nous désignerons toujours par $Q_{n,s}$ le nombre des permutations circulaires de n éléments qui présentent chacune s séquences.

21. Il suffit d'un peu de patience pour déterminer directement les valeurs de $Q_{n,s}$ qui correspondent aux plus petites valeurs des indices n et s. On trouve ainsi

$$
\begin{array}{ll}
Q_{2,2}=1, & \\
Q_{3,2}=2, & \\
Q_{4,2}=4, & Q_{4,4}=\ 2, \\
Q_{5,2}=8, & Q_{5,4}=16.
\end{array}
$$

Et ce qui nous frappe d'abord, c'est que, à l'exception du premier, tous ces nombres sont pairs.

22. Ce n'est point là un fait particulier. A l'exception de $Q_{2,2}$, les nombres $Q_{n,s}$ sont tous pairs. Nous nous appuierons, pour le démontrer, sur la considération des permutations circulaires *inverses* des n premiers nombres.

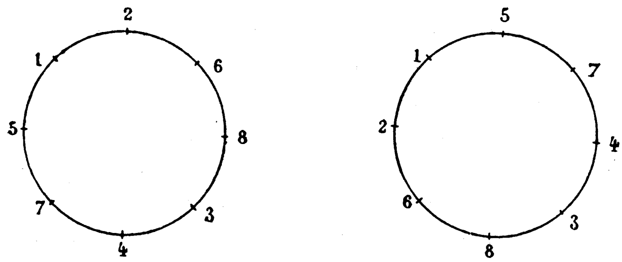
23. La définition des permutations circulaires inverses n'est que l'extension, aux permutations circulaires, de la définition

que nous avons donnée autrefois ([1]) pour les permutations rectilignes inverses.

Deux permutations circulaires des n premiers nombres sont inverses l'une de l'autre lorsque ces nombres s'y succèdent dans deux ordres absolument inverses.

Telles sont les deux permutations circulaires (*fig.* 4).

Fig. 4.



24. La définition même des permutations circulaires inverses nous fournit un moyen simple de former l'inverse d'une permutation circulaire donnée.

Considérons, en effet, une permutation circulaire quelconque des n premiers nombres; lisons-la en nous conformant aux conventions que nous avons faites (7) et, à mesure que nous en nommons les n éléments, écrivons ceux-ci, en tournant en sens rétrograde, sur une seconde circonférence partagée préalablement en n parties. Les nombres que nous écrivons sur cette nouvelle circonférence forment la permutation circulaire inverse de la permutation circulaire donnée, et il est évident que, si l'on opérait de la même façon sur cette seconde permutation, on retrouverait la première.

25. Cette manière si simple de passer d'une permutation circulaire à son inverse, et de revenir de celle-ci à celle-là, fait bien ressortir ce fait important :

Deux permutations circulaires inverses l'une de l'autre sont deux permutations conjuguées; en d'autres termes, deux permutations circulaires étant données, si la seconde est l'inverse de la première, réciproquement la première est l'inverse de la seconde.

([1]) *Sur le partage en quatre groupes...* (*Bulletin de la Société philomathique de Paris,* 1892-1893).

26. Il est évident, d'ailleurs, sauf dans le cas où $n = 2$, que deux permutations circulaires inverses diffèrent forcément l'une de l'autre.

Il est évident aussi que les séquences de ces permutations se correspondent chacune à chacune; et que, par conséquent, dans ces permutations, elles sont en nombre égal.

27. Cela étant, supposons n supérieur à 2; et, parmi les permutations circulaires des n premiers nombres, considérons celles qui présentent chacune s séquences.

Dans le système que forment celles-ci, prenons une permutation circulaire quelconque. Son inverse est une seconde permutation circulaire, qui diffère de la première et qui fait aussi partie du système. Donc les permutations circulaires considérées s'associent deux à deux. Donc leur nombre total est un nombre pair. Nous avons désigné ce nombre total par $Q_{n,s}$. Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Pour toutes les valeurs de n supérieures à 2, *et quel que soit s, le nombre* $Q_{n,s}$ *est un nombre pair.*

28. On voit aisément pourquoi ce théorème est en défaut lorsque n égale 2. C'est qu'il n'existe qu'une seule permutation circulaire de deux nombres, et que cette permutation est à elle-même son inverse.

II. — Expression de $Q_{n,2}$.

29. Aucune permutation circulaire des n premiers nombres ne peut avoir moins de deux séquences; mais il y en a qui en ont juste deux : telle est la permutation circulaire qui se lit

$$1 \; 2 \; 3 \; \ldots \; n,$$

et qui présente la seule séquence montante $1\,2\,3 \ldots n$, et la seule séquence descendante $n\,1$.

30. Nous considérons les permutations circulaires des n premiers nombres; nous désignons par $Q_{n,2}$ le nombre de celles qui présentent chacune deux séquences, et nous nous proposons de déterminer l'expression de $Q_{n,2}$ en fonction de n.

31. Pour y arriver, prenons l'une quelconque de ces permutations. Si nous la lisons conformément à nos conventions (7), c'est-à-dire en partant du nombre 1 et tournant en sens direct, nous y trouvons, d'abord, une séquence montante allant du minimum 1 au maximum n; ensuite, une séquence descendante allant du maximum n au minimum 1.

Les nombres compris dans la séquence montante, entre 1 et n, appartiennent évidemment à la suite

$$2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ n-1,$$

et se succèdent par ordre de grandeurs croissantes; les nombres compris dans la séquence descendante, entre n et 1, sont les nombres de cette même suite qui ne figurent pas dans la séquence montante, et ils se succèdent par ordre de grandeurs décroissantes.

Évidemment, une permutation circulaire des n premiers nombres, qui ne présente que deux séquences, est complètement déterminée dès que l'on connaît ceux des nombres 2, 3, 4, ..., $n-1$, qui appartiennent à sa séquence montante.

32. Les permutations circulaires des n premiers nombres, qui présentent chacune deux séquences, peuvent évidemment se classer ainsi :

Celles qui ne contiennent aucun nombre entre 1 et n dans leur séquence montante; celles qui en contiennent un; celles qui en contiennent deux; ...; celles qui en contiennent $n-2$.

Il n'existe qu'une seule des permutations considérées où il n'y ait aucun nombre entre 1 et n, dans la séquence montante.

Il en existe autant, présentant un seul nombre entre 1 et n, qu'il y a de combinaisons 1 à 1 de $n-2$ objets.

Il en existe autant, présentant deux nombres entre 1 et n, qu'il y a de combinaisons 2 à 2 de $n-2$ objets; etc.

Il en existe autant, présentant $n-2$ nombres entre 1 et n, qu'il y a de combinaisons $n-2$ à $n-2$ de $n-2$ objets.

33. Si nous désignons, suivant l'usage, par C_{n-2}^1, par C_{n-2}^2, ..., par C_{n-2}^{n-2} les nombres des combinaisons simples de $n-2$ objets 1 à 1, puis 2 à 2, ..., puis $n-2$ à $n-2$, nous pouvons donc

dire qu'il y a autant de permutations circulaires des n premiers nombres présentant chacune deux séquences, qu'il y a d'unités dans la somme

$$1 + C_{n-2}^{1} + C_{n-2}^{2} + \ldots + C_{n-2}^{n-2},$$

c'est-à-dire dans la somme des coefficients du développement de la puissance $(n-2)^{\text{ième}}$ d'un binôme. Or, on sait que la somme de ces coefficients est égale à la $(n-2)^{\text{ième}}$ puissance de 2. Donc :

Si l'on désigne par $Q_{n,2}$ *le nombre des permutations circulaires des n premiers nombres qui présentent chacune deux séquences, on a identiquement*

$$Q_{n,2} = 2^{n-2}.$$

Telle est l'expression cherchée de $Q_{n,2}$ en fonction de n.

34. Nous avons trouvé précédemment (**21**) que les nombres

$$Q_{2,2},\quad Q_{3,2},\quad Q_{4,2},\quad Q_{5,2}$$

avaient pour valeurs respectives

$$1,\quad 2,\quad 4,\quad 8,$$

c'est-à-dire

$$2^0,\quad 2^1,\quad 2^2,\quad 2^3.$$

Cette vérification si simple de notre expression générale de $Q_{n,2}$ a un grand avantage : elle nous montre que cette expression subsiste même pour $n = 2$, et, par conséquent, qu'elle est vraie pour toutes les valeurs possibles de n.

35. Dans notre *Mémoire sur le triangle des séquences* des permutations rectilignes ([1]), nous avons démontré un théorème général d'où il résulte, comme cas particulier, que si l'on désigne par $P_{n,2}$ le nombre des permutations rectilignes de n éléments qui présentent chacune deux séquences, et que l'on fasse croître n indéfiniment, on a

$$\lim \frac{P_{n+1,2}}{P_{n,2}} = 2.$$

([1]) *Recueil des savants étrangers*, t. XXXII.

D'après l'expression de $Q_{n,2}$ en fonction de n que nous avons donnée plus haut (33), on a, quel que soit n,

$$\frac{Q_{n+1,2}}{Q_{n,2}} = 2.$$

C'est là un premier exemple de ces transformations dont nous avons parlé précédemment (4), et en vertu desquelles une propriété asymptotique des permutations rectilignes se change en une propriété habituelle des permutations circulaires.

III. — Propriétés des nombres $Q_{2\nu,2\nu}$.

36. Considérons les permutations circulaires des n premiers nombres, en supposant n pair et égal à 2ν.

Aucune permutation de cette sorte ne peut avoir plus de 2ν séquences. Nous nous proposons d'étudier le nombre de celles qui en ont juste 2ν, c'est-à-dire le nombre $Q_{2\nu,2\nu}$.

37. Une permutation circulaire des 2ν premiers nombres, qui présente 2ν séquences, présente autant de séquences qu'elle contient d'éléments; autant de séquences, par conséquent, qu'il y a de côtés dans la ligne brisée cylindrique correspondante.

Il s'ensuit que, dans cette ligne brisée, les côtés sont alternativement montants et descendants; en d'autres termes, qu'il ne s'y trouve jamais deux côtés consécutifs tous deux montants ou tous deux descendants.

Nous avons appelé *permutations rectilignes alternées* (1) celles dont la ligne brisée a ainsi ses côtés alternativement montants et descendants. Par une extension toute naturelle, nous appellerons les permutations circulaires dont nous nous occupons dans ce paragraphe *permutations circulaires alternées.*

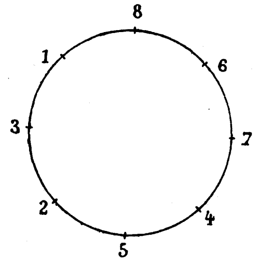
38. Prenons l'une quelconque de ces permutations circulaires alternées des 2ν premiers nombres; supprimons-y le nombre 2ν; coupons la circonférence au point où était placé ce nombre; puis, en tournant en sens direct, développons suivant une droite l'arc

(1) *Mémoire sur les permutations alternées* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1881).

qui supporte les $2\nu - 1$ autres nombres. Nous obtenons ainsi une permutation rectiligne alternée des $2\nu - 1$ premiers nombres, commençant par une séquence montante et finissant par une séquence descendante.

Pour donner un exemple, prenons (*fig.* 5) une permutation

Fig. 5.



circulaire alternée quelconque des huit premiers nombres; supprimons-y le nombre 8; coupons la circonférence au point où était ce nombre; et, tournant en sens direct, développons, suivant une droite, l'arc qui supporte les sept premiers nombres. Nous obtenons la permutation rectiligne alternée des sept premiers nombres

$$1 \quad 3 \quad 2 \quad 5 \quad 4 \quad 7 \quad 6.$$

qui commence par la séquence montante 13, et finit par la séquence descendante 76.

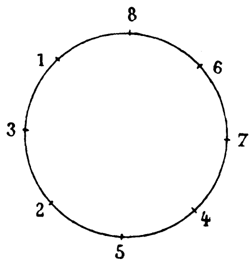
39. Considérons, au contraire, une permutation rectiligne alternée quelconque des $2\nu - 1$ premiers nombres, commençant par une séquence montante et finissant, forcément, par une séquence descendante; à sa gauche écrivons le nombre 2ν; puis enroulons, en tournant en sens direct, la permutation rectiligne ainsi formée autour d'une circonférence. Nous obtenons une permutation circulaire alternée des 2ν premiers nombres.

Pour donner un exemple, considérons la permutation

$$1 \quad 3 \quad 2 \quad 5 \quad 4 \quad 7 \quad 6,$$

qui est une permutation alternée des sept premiers nombres, commençant par une séquence montante et finissant par une séquence descendante. Opérons sur elle comme nous venons de le dire : nous obtenons la permutation circulaire alternée (*fig.* 6), qui est une permutation circulaire alternée des huit premiers nombres.

Fig. 6.



40. Nous voyons que le procédé direct, indiqué d'abord (38), nous permet, étant donnée une permutation circulaire alternée quelconque des 2ν premiers nombres, d'en déduire une permutation rectiligne alternée des $2\nu - 1$ premiers nombres, commençant par une séquence montante et finissant par une séquence descendante.

Nous voyons que le procédé inverse, indiqué ensuite (39), nous permet, étant donnée une permutation rectiligne alternée quelconque des $2\nu - 1$ premiers nombres, commençant par une séquence montante et finissant par une séquence descendante, d'en déduire une permutation circulaire alternée des 2ν premiers nombres.

Nous voyons de plus, sur nos exemples mêmes, que si deux permutations alternées, l'une circulaire, l'autre rectiligne, sont telles que notre procédé direct permette de passer de la première à la seconde, réciproquement notre procédé inverse permet de revenir de la seconde à la première.

41. Il suit immédiatement de là que les permutations circulaires alternées des 2ν premiers nombres correspondent, chacune à chacune, aux permutations rectilignes alternées des $2\nu - 1$ premiers nombres, qui commencent par une séquence montante et finissent par une séquence descendante.

Or, il y a évidemment autant de permutations rectilignes alternées des $2\nu - 1$ premiers nombres, commençant par une séquence montante et finissant par une séquence descendante, qu'il y a de permutations rectilignes alternées des mêmes nombres, commençant par une séquence descendante et finissant par une séquence montante.

Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Le nombre des permutations circulaires alternées des 2ν *premiers nombres est juste égal à la moitié du nombre des permutations rectilignes alternées des* $2\nu - 1$ *premiers nombres.*

42. Dans notre *Mémoire sur le nombre des permutations alternées* [1], nous avons démontré que le coefficient de $\frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}$ dans le développement de $\tang x$, suivant les puissances croissantes de x, n'était autre chose que la moitié du nombre des permutations rectilignes alternées des $2\nu - 1$ premiers nombres. De là ce théorème :

Le nombre $Q_{2\nu,2\nu}$ *des permutations circulaires alternées des* 2ν *premiers nombres n'est autre chose que le coefficient de* $\frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}$ *dans le développement de* $\tang x$ *suivant les puissances croissantes de* x.

43. Cette propriété du nombre des permutations circulaires alternées nous paraît très remarquable. Elle nous rappelle les propriétés analogues que nous avons obtenues, dans le Mémoire cité plus haut, pour les nombres des permutations rectilignes alternées. Il y a cependant entre celles-ci et celle-là une différence fort grande. Les nombres des permutations rectilignes alternées figuraient par leurs moitiés, les uns dans le développement de $\tang x$, les autres dans celui de $\operatorname{séc} x$. Les nombres des permutations circulaires alternées ne figurent que dans le premier de ces développements. La raison de cette différence, c'est que, dans les permutations rectilignes alternées, le nombre des éléments de chaque permutation est tantôt pair, tantôt impair, tandis que, dans les permutations circulaires alternées, il y a toujours, forcément, dans chaque permutation, un nombre pair d'éléments.

---

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquees*, 1881.

IV. — Propriétés des nombres $Q_{2\nu-1,\,2\nu-2}$.

44. Les permutations circulaires alternées des 2ν premiers nombres sont, parmi les permutations circulaires de ces 2ν éléments, celles qui contiennent le plus grand nombre de séquences.

Parmi les permutations circulaires des $2\nu-1$ premiers nombres, celles qui contiennent le plus grand nombre de séquences sont celles qui en contiennent $2\nu-2$. Ce sont ces dernières que nous considérons maintenant.

45. Ces permutations circulaires des $2\nu-1$ premiers nombres, qui contiennent chacune $2\nu-2$ séquences, ne sont point alternées, puisqu'elles présentent chacune plus d'éléments que de séquences. Mais, comme nous allons le voir, il s'en faut de si peu qu'elles ne soient alternées qu'il nous paraît tout naturel de les nommer *permutations circulaires quasi alternées*, ainsi que nous l'avons fait [1] pour les permutations rectilignes où le nombre des séquences est inférieur de deux unités au nombre des éléments.

46. Prenons l'une quelconque de ces permutations circulaires quasi alternées, et considérons la ligne brisée cylindrique qui la représente. Comme le nombre des côtés y dépasse d'une unité celui des séquences, il y a forcément, dans cette ligne, une séquence et une seule composée de deux côtés. En d'autres termes, dans cette ligne, il y a forcément un couple et un seul composé de deux côtés consécutifs tous deux montants ou tous deux descendants.

Abandonnant la considération de la ligne brisée cylindrique, on peut dire aussi que, dans toute permutation circulaire quasi alternée des $2\nu-1$ premiers nombres, sur les $2\nu-2$ séquences que cette permutation présente, il y en a $2\nu-3$ composées chacune de deux nombres, et une seule composée de trois.

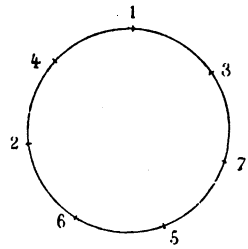
C'est ce qui arrive dans la permutation circulaire (*fig.* 7), qui

---

[1] *Mémoire sur les permutations quasi alternées*....

nous présente sept éléments et six séquences. Les cinq séquences

Fig. 7.



14, 42, 26, 65, 57 sont somposées chacune de deux nombres. La séquence 731 est seule composée de trois.

47. Supposons-nous donnée une permutation circulaire quasi alternée des $2\nu - 1$ premiers nombres. Comme nous venons de le dire (**46**), elle nous présente une séquence, et une seule, composée de trois nombres. Entre les deux plus petits de ces trois nombres, insérons le nombre 2ν. Nous obtenons évidemment une permutation circulaire des 2ν premiers nombres, qui a deux séquences de plus que la permutation précédente; qui en a, par conséquent, 2ν; et qui est, par conséquent, alternée.

Pour donner un exemple de cette opération, considérons la permutation circulaire quasi alternée (*fig.* 8), formée de sept éléments. La séquence seule composée de trois nombres est la sé-

Fig. 8.

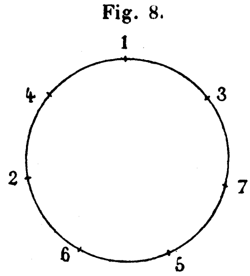
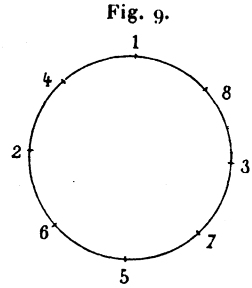


Fig. 9.



quence 731. Si, entre les deux plus petits, 3 et 1, de ces nombres, nous insérons le nombre 8, nous obtenons la nouvelle permutation circulaire (*fig.* 9), qui est formée de huit éléments, et qui est alternée.

48. Supposons-nous donnée, au contraire, une permutation circulaire alternée quelconque des 2ν premiers nombres; et supprimons-y le nombre 2ν. Nous obtenons une permutation circulaire quasi alternée des $2\nu - 1$ premiers nombres, dans laquelle la seule séquence composée de trois nombres nous présente toujours, pour les deux plus petits, les deux nombres qui comprenaient entre eux le nombre supprimé 2ν.

Pour donner un exemple de cette opération, qui est l'inverse de celle que nous venons d'indiquer (47), considérons la permutation circulaire alternée des huit premiers nombres (*fig.* 10); et supprimons-y le nombre 8. Nous obtenons la seconde permutation

Fig. 10.

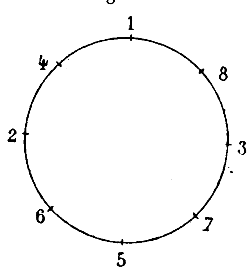
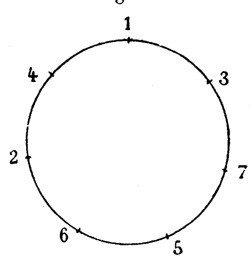


Fig. 11.



circulaire (*fig.* 11), qui est une permutation quasi alternée, formée des sept premiers nombres, et dont la seule séquence composée de trois nombres est la séquence 731, où les deux nombres les plus petits sont précisément ceux qui, dans la permutation circulaire précédente, comprenaient entre eux le nombre supprimé 8.

49. Nous voyons que le procédé direct, indiqué d'abord (47), nous permet, étant donnée une permutation circulaire quasi alternée quelconque des $2\nu - 1$ premiers nombres, d'en déduire une permutation circulaire alternée des 2ν premiers nombres.

Nous voyons que le procédé inverse, indiqué ensuite (48), nous permet, étant donnée une permutation circulaire alternée quelconque des 2ν premiers nombres, d'en déduire une permutation circulaire quasi alternée des $2\nu - 1$ premiers nombres.

Nous voyons de plus, sur nos exemples mêmes, que deux permutations circulaires étant données, l'une quasi alternée et l'autre alternée, si notre procédé direct permet de passer de la première à la seconde, réciproquement notre procédé inverse permet de revenir de la seconde à la première.

50. Il suit immédiatement de là que les permutations circulaires quasi alternées des $2\nu - 1$ premiers nombres, d'une part, et les permutations circulaires alternées des 2ν premiers nombres, de l'autre, se correspondent chacune à chacune. Ces permutations, par conséquent, sont en nombre égal. Donc :

Il y a autant de permutations circulaires quasi alternées des $2\nu - 1$ premiers nombres qu'il y a de permutations circulaires alternées des 2ν premiers nombres.

51. Si nous nous rappelons la signification du symbole $Q_{n,s}$, nous voyons que le nombre des permutations circulaires quasi alternées des $2\nu - 1$ premiers nombres se représente par $Q_{2\nu-1,2\nu-2}$ et que celui des permutations circulaires alternées des 2ν premiers nombres se représente par $Q_{2\nu,2\nu}$. La proposition précédente (50) peut donc s'énoncer ainsi :

Pour toute valeur de ν égale ou supérieure à 2, on a identiquement

$$Q_{2\nu-1,2\nu-2} = Q_{2\nu,2\nu}.$$

52. Si nous nous rappelons de même le rôle (42) que remplit $Q_{2\nu,2\nu}$ dans le développement de $\tang x$, nous pouvons donner, pour la même proposition encore, ce troisième énoncé :

Le nombre des permutations circulaires quasi alternées des $2\nu - 1$ premiers nombres est juste égal au coefficient de $\frac{x^{2\nu-1}}{(2\nu-1)!}$ dans le développement de $\tang x$ *suivant les puissances croissantes de x.*

53. Dans notre *Mémoire sur les permutations rectilignes quasi alternées* (¹), considérant, d'une part, le nombre des permutations rectilignes quasi alternées de n éléments, de l'autre, celui des permutations rectilignes alternées de $n + 1$ éléments,

(¹) Déjà cité.

nous avons montré que, lorsque n croissait indéfiniment, ces deux nombres étaient deux infiniment grands dont le rapport tendait vers l'unité. C'était là une propriété asymptotique des permutations rectilignes.

L'égalité

$$Q_{2\nu-1,2\nu-2} = Q_{2\nu,2\nu},$$

que nous venons d'établir (51), et qui peut s'écrire

$$\frac{Q_{2\nu-1,2\nu-2}}{Q_{2\nu,2\nu}} = 1,$$

nous fait voir que, dans les permutations circulaires, cette propriété n'est plus seulement asymptotique, mais subsiste pour toutes les valeurs finies de ν.

Voilà un deuxième exemple d'une propriété asymptotique des permutations rectilignes qui se transforme en une propriété habituelle des permutations circulaires.

54. La considération des permutations circulaires quasi alternées met en évidence une différence nouvelle et profonde entre les permutations circulaires et les permutations rectilignes des n premiers nombres.

Que n soit pair ou impair, parmi les permutations rectilignes des n premiers nombres, il y a toujours, à la fois, des permutations alternées et des permutations quasi alternées.

Au contraire, dans les permutations circulaires des n premiers nombres, il n'existe jamais, à la fois, des permutations de ces deux sortes. Lorsque n est pair, il existe des permutations alternées et il n'en existe point de quasi alternées. Et c'est l'inverse lorsque n est impair.

CHAPITRE III.

FORMULE FONDAMENTALE ET TRIANGLE.

I. — Formule fondamentale.

55. Évidemment, toute permutation circulaire des n premiers nombres peut être regardée comme provenant d'une certaine permutation circulaire des $n-1$ premiers nombres, où l'on a introduit le nombre n à une certaine place. Nous sommes conduits, par

cette remarque, à chercher comment varie le nombre des séquences d'une permutation circulaire des $n-1$ premiers nombres lorsque l'on introduit, dans cette permutation, le nombre n à une place quelconque.

56. Dans une permutation circulaire des $n-1$ premiers nombres, il existe évidemment $n-1$ intervalles, c'est-à-dire $n-1$ places où l'on peut introduire un nombre nouveau.

Ces $n-1$ places sont de deux sortes, et de deux sortes seulement, savoir :

1° Celles qui touchent un maximum;

2° Celles qui n'en touchent aucun.

Il est d'ailleurs bien clair, puisque les maxima alternent avec les minima, qu'il n'y a aucune place touchant deux maxima.

57. Prenons une permutation circulaire quelconque des $n-1$ premiers nombres et, dans cette permutation, introduisons le nombre n, d'abord dans une place de la première sorte, ensuite, dans une de la seconde.

Lorsque la place est de la première sorte, c'est-à-dire touche un maximum, le nombre des séquences, par l'introduction de n, n'éprouve aucun changement.

Lorsque la place est de la seconde sorte, c'est-à-dire ne touche aucun maximum, ce nombre augmente de deux unités.

Ces résultats sont à peu près évidents. Ils le deviennent tout à fait si l'on considère la ligne brisée cylindrique correspondant à la permutation.

58. Avant d'aller plus loin, nous ferons observer que, dans chacun des deux cas examinés ci-dessus (57), l'introduction de n fait varier d'un nombre pair le nombre des séquences. Or, dans une permutation circulaire de deux éléments, il y a deux séquences. Donc :

Dans une permutation circulaire quelconque, le nombre des séquences est un nombre pair.

Nous retrouvons ainsi l'un des premiers théorèmes que nous ayons démontrés (16).

59. Cette observation faite, demandons-nous quelles sont les permutations circulaires des $n-1$ premiers nombres qui, par l'introduction de n, donnent des permutations circulaires des n premiers nombres présentant chacune s séquences.

Ces permutations sont évidemment : d'une part, celles qui contiennent déjà s séquences, et où l'on place n à côté d'un maximum; de l'autre, celles qui contiennent seulement $n-2$ séquences, mais où l'on ne place pas n à côté d'un maximum.

Donc, les permutations circulaires de n éléments, contenant chacune s séquences, peuvent être regardées comme provenant, les unes des permutations circulaires de $n-1$ éléments qui présentent chacune s séquences, les autres de celles qui en présentent chacune $s-2$.

60. D'après les notations que nous avons choisies (20), il y a $Q_{n-1,s}$ permutations circulaires de $n-1$ éléments, présentant s séquences. Dans chacune d'elles, le nombre des maxima est la moitié de s, et le nombre des places touchant un maximum est par conséquent s. Le nombre des permutations circulaires de n éléments, présentant s séquences, et provenant de ces permutations de $n-1$ éléments, est donc égal au produit $sQ_{n-1,s}$.

Il y a de même $Q_{n-1,s-2}$ permutations circulaires de $n-1$ éléments, présentant $s-2$ séquences. Dans chacune d'elles, le nombre des places touchant un maximum est $s-2$; le nombre de celles qui n'en touchent aucun est, par suite, $(n-1)-(s-2)$, c'est-à-dire $n-s+1$. Le nombre des permutations circulaires de n éléments, présentant s séquences et provenant de ces nouvelles permutations circulaires de $n-1$ éléments, est donc égal au produit $(n-s+1)Q_{n-1,s-2}$.

Nous tirons immédiatement, de ces énumérations, le résultat suivant :

Le nombre total $Q_{n,s}$ des permutations circulaires des n premiers nombres, qui présentent chacune s séquences, est donné par la formule

$$Q_{n,s} = s\,Q_{n-1,s} + (n-s+1)\,Q_{n-1,s-2},$$

où le nombre n est au moins égal à 3.

61. Dans nos premières recherches sur les séquences ([1]), nous avons établi, pour les permutations rectilignes, une formule remarquable dont nous nous sommes servis constamment, en la nommant formule fondamentale. La formule que nous venons d'établir ici (60), pour les permutations circulaires, lui est fort analogue, et son importance n'est pas moindre. C'est sur elle que nous allons fonder toute la suite de nos recherches : elle sera la *formule fondamentale* du présent Mémoire. D'ailleurs, cette formule n'est pas nouvelle; nous l'avons donnée, pour la première fois, en 1893 ([2]), au Congrès des Sociétés savantes.

II. — Premières conséquences de notre formule fondamentale.

62. Avant d'utiliser notre formule fondamentale (60) pour le calcul des nombres $Q_{n,s}$, nous pouvons en déduire facilement un certain nombre de théorèmes.

63. D'abord il est bien clair, d'après cette formule, que si tous les nombres

$$Q_{n-1,2}, \quad Q_{n-1,4}, \quad Q_{n-1,6}, \quad \ldots,$$

qui ont pour premier indice $n - 1$, sont pairs, les nombres

$$Q_{n,2}, \quad Q_{n,4}, \quad Q_{n,6}, \ldots,$$

qui ont pour premier indice n, sont également pairs.

Or, comme nous l'avons vu (21), $Q_{3,2}$ est égal à 2. Donc :

Pour toutes les valeurs de n supérieures à 2, *le nombre* $Q_{n,s}$ *est un nombre pair.*

C'est là un théorème que nous avons déjà énoncé et démontré (27).

64. Reprenons notre formule fondamentale

$$Q_{n,s} = s\,Q_{n-1,s} + (n - s + 1)\,Q_{n-1,s-2},$$

([1]) *Étude sur les maxima, minima et séquences*... (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure,* 1884).

([2]) *Voir* le *Journal officiel* du 6 avril 1893.

et remplaçons-y s par 2; elle devient

$$Q_{n,2} = 2\,Q_{n-1,2} + (n-1)\,Q_{n-1,0}.$$

Or, il est évident que $Q_{n-1,0}$ est nul. Donc nous avons

$$Q_{n,2} = 2\,Q_{n-1,2};$$

et, puisque $Q_{2,2}$ est égal à l'unité, nous pouvons énoncer cette proposition :

Pour toutes les valeurs possibles de n, on a identiquement

$$Q_{n,2} = 2^{n-2}.$$

C'est là un théorème que nous avons encore, précédemment (33), énoncé et démontré.

65. Reprenons toujours notre formule fondamentale

$$Q_{n,s} = s\,Q_{n-1,s} + (n-s+1)\,Q_{n-1,s-2},$$

et remplaçons-y n et s chacun par 2ν. Nous obtenons ce résultat

$$Q_{2\nu,2\nu} = 2\nu\,Q_{2\nu-1,2\nu} + Q_{2\nu-1,2\nu-2}.$$

Or, il n'existe aucune permutation circulaire contenant plus de séquences qu'elle ne contient d'éléments. Donc $Q_{2\nu-1,2\nu}$ est nul. Donc :

On a identiquement

$$Q_{2\nu-1,\,2\nu-2} = Q_{2\nu,\,2\nu}.$$

Et c'est là un troisième théorème que nous avons déjà rencontré et signalé comme très remarquable (51).

66. Les trois théorèmes qui précèdent, et que nous avions déjà démontrés tous les trois d'une manière absolument directe, découlent aussi, on le voit, d'une façon immédiate, de notre formule fondamentale. Ils en constituent en quelque sorte une triple vérification.

III. — Triangle des séquences des permutations circulaires.

67. Comme nous l'avons dit (60), notre formule fondamentale

$$Q_{n,s} = s\,Q_{n-1,s} + (n - s + 1)\,Q_{n-1,\,s-2}$$

est vraie dès que n égale 3.

Nous avons obtenu auparavant (21) ce résultat très simple

$$Q_{2,2} = 1.$$

Connaissant ce résultat et cette formule, il est clair que nous pouvons calculer de proche en proche tous les nombres $Q_{n,s}$.

68. Nous disposerons ces différents nombres de manière à en former le triangle

$$\begin{array}{llll}
Q_{2,2} & & & \\
Q_{3,2} & & & \\
Q_{4,2} & Q_{4,4} & & \\
Q_{5,2} & Q_{5,4} & & \\
Q_{6,2} & Q_{6,4} & Q_{6,6} & \\
Q_{7,2} & Q_{7,4} & Q_{7,6} & \\
Q_{8,2} & Q_{8,4} & Q_{8,6} & Q_{8,8} \\
Q_{9,2} & Q_{9,4} & Q_{9,6} & Q_{9,8} \\
\multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}$$

qui est analogue au triangle de Pascal, et où le nombre $Q_{n,2\sigma}$ se trouve à l'intersection de la colonne de rang σ et de la ligne de rang $n - 1$.

69. Si nous calculons les valeurs numériques de tous les nombres $Q_{n,s}$ dont nous venons d'écrire les symboles, nous obtenons, à la place du triangle littéral précédent, le triangle numérique que voici :

$$\begin{array}{cccc}
1 & & & \\
2 & & & \\
4 & 2 & & \\
8 & 16 & & \\
16 & 88 & 16 & \\
32 & 416 & 272 & \\
64 & 1824 & 2880 & 272 \\
128 & 7680 & 24576 & 7936 \\
\multicolumn{4}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}$$

70. Si l'on considère ce triangle numérique, on constate immédiatement que les trois théorèmes rappelés plus haut (63, 64, 65) y sont tous vérifiés; en d'autres termes, on constate que :

1° A l'exception du premier, tous les éléments du triangle sont des nombres pairs;

2° Les éléments composant la première colonne ne sont autre chose que les puissances successives de 2 ;

3° Le nombre des permutations circulaires quasi alternées de $2\nu - 1$ éléments, et le nombre des permutations circulaires alternées de 2ν éléments, sont des nombres égaux.

71. Le triangle que nous venons de donner, d'abord sous forme littérale, ensuite sous forme numérique, est fort analogue au triangle des séquences des permutations rectilignes. Nous l'appellerons le *triangle des séquences des permutations circulaires;* et nous en étudierons d'abord les colonnes, ensuite les lignes, enfin l'ensemble tout entier.

CHAPITRE IV.

COLONNES DU TRIANGLE.

I. — Définition des séries verticales.

72. Les *colonnes verticales,* ou plus simplement les *colonnes* qui composent le triangle des séquences des permutations circulaires, sont caractérisées par le second indice des nombres $Q_{n,s}$ qu'elles contiennent. La première contient les nombres $Q_{n,2}$; la deuxième, les nombres $Q_{n,4}$; la $\sigma^{\text{ième}}$, les nombres $Q_{n,2\sigma}$.

73. Ces mêmes colonnes s'étendent indéfiniment vers le bas. Le terme placé en haut, c'est-à-dire le premier terme de chacune d'elles, est $Q_{2,2}$ pour la première, $Q_{4,4}$ pour la deuxième, $Q_{2\sigma,2\sigma}$ pour la $\sigma^{\text{ième}}$.

Nous avons d'ailleurs étudié déjà le premier et le second terme de chaque colonne, c'est-à-dire le terme $Q_{2\sigma,2\sigma}$, qui est le nombre des permutations circulaires alternées de 2σ éléments, et le terme $Q_{2\sigma+1,2\sigma}$, qui est le nombre des permutations circulaires quasi alternées de $2\sigma + 1$ éléments.

74. Les nombres qui composent la colonne de rang σ sont, de haut en bas,

$$Q_{2\sigma,2\sigma},\quad Q_{2\sigma+1,2\sigma},\quad Q_{2\sigma+2,2\sigma},\quad Q_{2\sigma+3,2\sigma},\ \ldots.$$

Ces nombres croissent au delà de toute limite. On voit, en effet, sur notre formule fondamentale (60), que, dans la colonne de rang σ, chaque terme est supérieur à celui qui le précède immédiatement, multiplié par 2σ.

75. Nous relions ces nombres les uns aux autres à l'aide de la série entière

$$Q_{2\sigma,2\sigma} + Q_{2\sigma+1,2\sigma}z + Q_{2\sigma+2,2\sigma}z^2 + Q_{2\sigma+3,2\sigma}z^3 + \ldots,$$

où z représente une variable indépendante; et nous appelons cette série la *série verticale correspondant à la colonne de rang* σ, ou plus simplement la *série verticale de rang* σ.

II. — Convergence des séries verticales.

76. Nous avons trouvé précédemment (33)

$$Q_{n,2} = 2^{n-2}.$$

Il résulte de là que, dans la première de nos séries verticales, le terme général est $2^{n-2}z^{n-2}$; par suite, que cette première série est une progression géométrique de raison $2z$; par suite, enfin, que cette série est convergente toutes les fois que z, en valeur absolue, est inférieur à $\frac{1}{2}$.

77. Ainsi, la série verticale de rang 1 est convergente toutes les fois que z, en valeur absolue, est inférieur à l'inverse de 2. Nous allons montrer que la série verticale de rang σ est convergente toutes les fois que z, en valeur absolue, est inférieur à l'inverse de 2σ.

Nous prouverons pour cela que, si cette propriété est vraie pour la série de rang $\sigma - 1$, elle l'est aussi forcément pour la série de rang σ.

78. Reprenons notre formule fondamentale

$$Q_{n,s} = s\,Q_{n-1,s} + (n - s + 1)\,Q_{n-1,s-2},$$

et remplaçons-y successivement n par les t valeurs $s+1$, $s+2$, $s+3$, ..., $s+t$. Nous obtenons les égalités

$$\begin{aligned}
Q_{s+1,s} &= s\,Q_{s,s} + 2\,Q_{s,s-2},\\
Q_{s+2,s} &= s\,Q_{s+1,s} + 3\,Q_{s+1,s-2},\\
Q_{s+3,s} &= s\,Q_{s+2,s} + 4\,Q_{s+2,s-2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
Q_{s+t,s} &= s\,Q_{s+t-1,s} + (t+1)\,Q_{s+t-1,s-2}.
\end{aligned}$$

Multiplions la première de ces égalités par s^{t-1}, la deuxième par s^{t-2}, la troisième par s^{t-3}, ..., la dernière par 1; puis ajoutons-les toutes membres à membres. Nous arrivons, après quelques réductions évidentes, à l'égalité

$$Q_{s+t,s} = \begin{cases} s^t Q_{s,s},\\ \quad + [2s^{t-1}Q_{s,s-2} + 3s^{t-2}Q_{s+1,s-2} + \ldots + (t+1)Q_{s+t-1,s-2}],\end{cases}$$

qui se compose de ces trois parties : le terme unique, placé au premier membre; le terme unique, qui commence le second; l'ensemble des termes, compris entre crochets.

79. Nous allons étudier successivement chacune de ces parties, en nous rappelant que s est toujours pair et en le remplaçant par 2σ; en nous rappelant aussi que la série verticale de rang $\sigma-1$ est convergente, par hypothèse, pour toutes les valeurs absolues de z inférieures à l'inverse de $2\sigma-2$, et en désignant, dans ces circonstances, par $W_{\sigma-1}$ la somme de cette série.

80. Le terme unique $Q_{s+t,s}$, placé au premier membre, n'est autre chose que le coefficient de z^t, dans la série verticale de rang σ.

Le terme unique $s^tQ_{s,s}$, qui commence le second membre, est évidemment le coefficient de z^t dans le produit

$$(1 + sz + s^2z^2 + s^3z^3 + \ldots)Q_{s,s},$$

c'est-à-dire dans le développement de

$$\frac{1}{1-sz}Q_{s,s},$$

lequel est convergent toutes les fois que z, en valeur absolue, est inférieur à l'inverse de 2σ.

Quant à la quantité entre crochets :

$$2s^{t-1}Q_{s,s-2}+3s^{t-2}Q_{s+1,s-2}+4s^{t-3}Q_{s+2,s-2}+\ldots+(t+1)Q_{s+t-1,s-2},$$

elle est le coefficient de z^t dans le produit de la série

$$1+sz+s^2z^2+s^3z^3+\ldots$$

par la série

$$2Q_{s,s-2}z+3Q_{s+1,s-2}z^2+4Q_{s+2,s-2}z^3+\ldots.$$

Or, celle-ci est juste égale à la dérivée $W'_{\sigma-1}$, diminuée de $Q_{s-1,s-2}$. Donc cette dernière partie n'est autre chose que le coefficient de z^t dans le développement de

$$\frac{1}{1-sz}(W'_{\sigma-1}-Q_{s-1,s-2})$$

lequel est encore convergent toutes les fois que z, en valeur absolue, est inférieur à l'inverse de s, c'est-à-dire à l'inverse de 2σ.

81. Il suit de tout cela que le coefficient de z^t, dans la série verticale de rang σ, est égal au coefficient de z^t dans le développement de

$$\frac{1}{1-sz}Q_{s,s}+\frac{1}{1-sz}(W'_{\sigma-1}-Q_{s-1,s-2}).$$

Or, d'après ce que nous avons vu précédemment (51),

$$Q_{s,s}-Q_{s-1,s-2}=0.$$

Donc $Q_{s+t,s}$ n'est autre chose que le coefficient de z^t dans le développement de la fonction

$$\frac{1}{1-sz}W'_{\sigma-1},$$

c'est-à-dire dans un développement qui est convergent toutes les fois que z, en valeur absolue, est inférieur à l'inverse de 2σ.

Mais $Q_{s+t,s}$ est le coefficient de z^t dans le développement de la série verticale de rang σ. Donc, finalement :

Une série verticale de rang quelconque σ est convergente toutes les fois que z, en valeur absolue, est inférieur à l'inverse de 2σ.

82. Ce résultat est tout à fait analogue à celui que nous avons trouvé autrefois ([1]), pour la convergence des séries verticales, dans le triangle des séquences des permutations rectilignes.

L'analogie se transforme même en identité, si l'on considère, non plus le rang σ de la colonne, mais le second indice 2σ, c'est-à-dire s, de chacun des termes $Q_{n,s}$ qui la composent.

III. — Fonctions génératrices des colonnes.

83. Comme nous venons de le voir (81), la série verticale de rang σ est toujours convergente pour les valeurs absolues, suffisamment petites, de la variable z.

Représentons toujours par W_σ la fonction de z qui en est la somme. Cette fonction W_σ sera, suivant l'expression consacrée, la *fonction génératrice* des coefficients de cette série, c'est-à-dire la fonction génératrice des nombres

$$Q_{2\sigma,2\sigma},\quad Q_{2\sigma+1,2\sigma},\quad Q_{2\sigma+2,2\sigma},\quad \ldots,$$

qui composent la colonne de rang σ. Pour abréger, nous la nommerons simplement la *fonction génératrice* de la colonne de rang σ.

84. D'après ce que nous venons de voir (81), la série verticale de rang σ se confond avec le développement de

$$\frac{1}{1-sz}W'_{\sigma-1},$$

où s est le double de σ. Nous avons donc identiquement

$$W_\sigma = \frac{1}{1-2\sigma z}W'_{\sigma-1}.$$

Telle est l'équation *aux différences mêlées*, qui relie entre elles deux consécutives quelconques de nos fonctions génératrices. S'il était permis de faire abstraction de la convergence des séries, on pourrait déduire cette équation, sans aucun calcul, de notre formule fondamentale; on pourrait dire qu'elle n'en est qu'une conséquence évidente.

([1]) *Mémoire sur le triangle des séquences*....

85. Considérons la première colonne du triangle des séquences des permutations circulaires. Ses termes sont

$$1,\quad 2,\quad 2^2,\quad 2^3,\quad 2^4,\quad \ldots.$$

La série correspondante est

$$1 + 2z + 2^2z^2 + 2^3z^3 + 2^4z^4 + \ldots,$$

c'est-à-dire la progression géométrique ayant pour premier terme 1 et pour raison $2z$. Sa fonction génératrice nous est donc donnée par la formule

$$W_1 = \frac{1}{1-2z}.$$

De là, nous déduisons immédiatement, à l'aide de la formule (84) qui précède :

$$W_2 = \frac{2}{(1-2z)^2(1-4z)},$$

$$W_3 = \frac{16(1-3z)}{(1-2z)^3(1-4z)^2(1-6z)},$$

$$W_4 = \frac{16(17-184z+636z^2-720z^3)}{(1-2z)^4(1-4z)^3(1-6z)^2(1-8z)};$$

et ainsi de suite.

86. Les quatre expressions, que nous venons de trouver pour W_1, W_2, W_3, W_4, sont quatre fractions rationnelles. La formule (84)

$$W_\sigma = \frac{1}{1-2\sigma z} W'_{\sigma-1}$$

nous montre que, si $W_{\sigma-1}$ est une fraction rationnelle, W_σ en est une aussi. Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

La fonction génératrice de chaque colonne du triangle est une fraction rationnelle, c'est-à-dire le quotient de deux polynômes entiers en z.

87. D'après ce qui précède (86), nous pouvons dire à volonté que W_σ est la fonction génératrice ou la fraction génératrice de la colonne de rang σ.

Nous pouvons aussi poser

$$W_\sigma = \frac{A_\sigma}{B_\sigma},$$

A_σ et B_σ désignant deux polynômes entiers en z.

Quant à ces deux polynômes, c'est-à-dire aux deux termes de la fraction génératrice, nous allons les étudier l'un après l'autre, en commençant par le dénominateur B_σ.

IV. — Dénominateur de W_σ.

88. Si nous nous reportons aux expressions de W_1, W_2, W_3, W_4, que nous avons obtenues précédemment (85), nous en déduisons aussitôt, pour les dénominateurs B_1, B_2, B_3, B_4, les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
B_1 &= (1-2z),\\
B_2 &= (1-2z)^2(1-4z),\\
B_3 &= (1-2z)^3(1-4z)^2(1-6z),\\
B_4 &= (1-2z)^4(1-4z)^3(1-6z)^2(1-8z),
\end{aligned}$$

qui nous donnent une première idée de la composition génér[ale] du dénominateur B_σ.

89. Bien que ces expressions de B_1, B_2, B_3, B_4 soient assez simples, nous les modifierons en posant

$$\begin{aligned}
F_2 &= (1-2z),\\
F_4 &= (1-2z)(1-4z),\\
F_6 &= (1-2z)(1-4z)(1-6z),\\
F_8 &= (1-2z)(1-4z)(1-6z)(1-8z);
\end{aligned}$$

et ainsi de suite.

Nous aurons alors

$$\begin{aligned}
B_1 &= F_2,\\
B_2 &= F_2F_4,\\
B_3 &= F_2F_4F_6,\\
B_4 &= F_2F_4F_6F_8.
\end{aligned}$$

Par rapport aux facteurs linéaires en z, dont elles sont le produit, les quantités F sont de véritables *factorielles*. Par rapport à leurs facteurs F, les premiers dénominateurs B sont des factorielles aussi : ce sont *des factorielles de factorielles*.

90. Rappelons-nous la relation

$$W_\sigma = \frac{1}{1-2\sigma z} W'_{\sigma-1},$$

et supposons que l'on ait

$$B_{\sigma-1} = F_2 F_4 F_6 \ldots F_{2\sigma-2}.$$

Nous avons alors

$$W_{\sigma-1} = \frac{A_{\sigma-1}}{B_{\sigma-1}} = \frac{A_{\sigma-1}}{F_2 F_4 F_6 \ldots F_{2\sigma-2}}.$$

La règle pour calculer la dérivée d'un quotient nous donne d'ailleurs

$$W'_{\sigma-1} = \frac{B_{\sigma-1} A'_{\sigma-1} - A_{\sigma-1} B'_{\sigma-1}}{B^2_{\sigma-1}}.$$

Or, $B'_{\sigma-1}$ admet tous les facteurs du premier degré en z qui figurent dans $B_{\sigma-1}$ avec des exposants moindres chacun d'une unité. Donc $B'_{\sigma-1}$ est divisible par $B_{\sigma-2}$ qui est justement le produit de tous ces facteurs, affectés des exposants ainsi diminués. Les deux termes de $W'_{\sigma-1}$ sont donc divisibles par ce produit. En effectuant ces divisions et remarquant que le nouveau numérateur n'est autre chose que A_σ, nous trouvons ce résultat très simplifié

$$W'_{\sigma-1} = \frac{A_\sigma}{B_{\sigma-1} F_{2\sigma-2}}.$$

Portons cette expression de $W'_{\sigma-1}$ dans l'égalité qui nous donne W_σ; il nous vient

$$W_\sigma = \frac{A_\sigma}{(1 - 2\sigma z) B_{\sigma-1} F_{2\sigma-2}}.$$

Or,

$$(1 - 2\sigma z) F_{2\sigma-2} = F_{2\sigma}.$$

Donc

$$W_\sigma = \frac{A_\sigma}{B_{\sigma-1} F_{2\sigma}};$$

et, par conséquent,

$$B_\sigma = F_2 F_4 F_6 \ldots F_{2\sigma}.$$

91. Ainsi l'expression que nous avons trouvée (89) pour les quatre dénominateurs B_1, B_2, B_3, B_4 subsiste pour B_σ dès qu'elle est vraie pour $B_{\sigma-1}$. Donc, cette expression est générale, et nous pouvons énoncer ce théorème :

Si l'on pose

$$F_{2t} = (1 - 2z)(1 - 4z)(1 - 6z) \ldots (1 - 2tz),$$

on a identiquement

$$B_\sigma = F_2 F_4 F_6 \ldots F_{2\sigma},$$

pour l'expression du dénominateur B_σ *de la fraction génératrice* W_σ.

On peut remarquer, d'ailleurs, que cette expression de B_σ est toujours une factorielle de factorielles.

92. Pour obtenir le degré β_σ du dénominateur B_σ, il suffit de considérer l'expression de B_σ que l'on vient de trouver (**91**), et de remarquer que F_{2t} est toujours du degré t. On voit immédiatement alors que le degré de B_σ est égal à la somme des σ premiers nombres. On a donc

$$\beta_\sigma = \frac{\sigma(\sigma+1)}{2}.$$

Tel est le degré cherché.

93. Quant au coefficient du dernier terme dans le développement de B_σ suivant les puissances ascendantes de z, c'est évidemment le produit des coefficients des termes du degré le plus élevé dans chacun des facteurs

$$F_2, \quad F_4, \quad F_6, \quad \ldots, \quad F_{2\sigma}.$$

Or, dans F_{2t}, ce coefficient est évidemment

$$(-1)^t 2.4.6\ldots(2t).$$

Si donc nous posons d'une façon générale

$$2.4.6\ldots(2t) = I_{2t},$$

et que nous désignions par b_σ *le dernier coefficient de* B_σ, *nous avons identiquement*

$$b_\sigma = (-1)^{\frac{\sigma(\sigma+1)}{2}} I_2 I_4 I_6 \ldots I_{2\sigma}.$$

Telle est l'expression du dernier coefficient. C'est encore, nous le voyons, une factorielle de factorielles.

94. Tous ces résultats, de même que la plupart de ceux qui vont suivre, sont encore, sinon identiques, du moins fort analogues à ceux que nous avons donnés, pour les permutations rectilignes, dans notre *Mémoire sur le triangle des séquences*.

V. — Numérateur de W_σ.

95. Nous ne chercherons point la composition du numérateur A_σ de la fraction génératrice W_σ. Supposant ce numérateur ordonné suivant les puissances croissantes de z, nous nous bornerons à en calculer le degré et le dernier coefficient.

Nous prendrons, d'ailleurs, pour point de départ de ces deux calculs, la formule

$$A_\sigma = \frac{B_{\sigma-1} A'_{\sigma-1} - A_{\sigma-1} B'_{\sigma-1}}{B_{\sigma-2}},$$

que nous avons établie (90) précédemment.

96. Si nous désignons par α_σ le degré du numérateur A_σ et continuons de désigner par β_σ celui du dénominateur B_σ, la formule que nous venons de rappeler (95) nous donne immédiatement l'égalité

$$\alpha_\sigma = \beta_{\sigma-1} + \alpha_{\sigma-1} - 1 - \beta_{\sigma-2},$$

qui peut s'écrire

$$\alpha_\sigma - \alpha_{\sigma-1} = (\beta_{\sigma-1} - \beta_{\sigma-2}) - 1.$$

Nous tirons de là les $\sigma - 2$ équations

$$\begin{aligned}
\alpha_3 - \alpha_2 &= (\beta_2 - \beta_1) - 1,\\
\alpha_4 - \alpha_3 &= (\beta_3 - \beta_2) - 1,\\
\alpha_5 - \alpha_4 &= (\beta_4 - \beta_3) - 1,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\alpha_{\sigma-1} - \alpha_{\sigma-2} &= (\beta_{\sigma-2} - \beta_{\sigma-3}) - 1,\\
\alpha_\sigma - \alpha_{\sigma-1} &= (\beta_{\sigma-1} - \beta_{\sigma-2}) - 1,
\end{aligned}$$

que nous ajoutons membres à membres.

Par cette addition, nous trouvons finalement

$$\alpha_\sigma - \alpha_2 = (\beta_{\sigma-1} - \beta_1) - (\sigma - 2).$$

Or, comme nous l'avons vu (85, 92),

$$\alpha_2 = 0, \qquad \beta_1 = 1, \qquad \beta_{\sigma-1} = \frac{(\sigma-1)\sigma}{2}.$$

Donc

$$\alpha_\sigma = \frac{(\sigma-1)\sigma}{2} - 1 - (\sigma - 2),$$

c'est-à-dire

$$\alpha_\sigma = \frac{(\sigma - 2)(\sigma - 1)}{2}.$$

Tel est le degré cherché.

97. On peut remarquer que cette formule nous donne immédiatement l'identité

$$\alpha_\sigma = \beta_{\sigma-2};$$

et que cette identité à son tour nous conduit à la relation

$$\alpha_\sigma = \beta_\sigma - (2\sigma - 1).$$

98. Supposons toujours le numérateur A_σ ordonné suivant les puissances croissantes de z, et cherchons le dernier coefficient a_σ de ce numérateur.

Pour l'obtenir, reprenons encore la formule

$$A_\sigma = \frac{B_{\sigma-1} A'_{\sigma-1} - A_{\sigma-1} B'_{\sigma-1}}{B_{\sigma-2}},$$

et remarquons que les polynômes

$$B_{\sigma-1}, \qquad A'_{\sigma-1}, \qquad A_{\sigma-1}, \qquad B'_{\sigma-1}, \qquad B_{\sigma-2},$$

qui figurent à son second membre, ont pour derniers coefficients respectifs

$$b_{\sigma-1}, \qquad \alpha_{\sigma-1} a_{\sigma-1}, \qquad a_{\sigma-1}, \qquad \beta_{\sigma-1} b_{\sigma-1}, \qquad b_{\sigma-2}.$$

Remplaçant, dans ce second membre, ces polynômes par ces coefficients, nous trouvons, après réduction,

$$a_\sigma = (\alpha_{\sigma-1} - \beta_{\sigma-1})\, a_{\sigma-1} \frac{b_{\sigma-1}}{b_{\sigma-2}}.$$

Or, comme nous l'avons vu (97, 93),

$$\alpha_{\sigma-1} - \beta_{\sigma-1} = -(2\sigma - 3),$$

$$b_{\sigma-1} = (-1)^{\frac{(\sigma-1)\sigma}{2}} I_2 I_4 I_6 \ldots I_{2\sigma-2},$$

$$b_{\sigma-2} = (-1)^{\frac{(\sigma-2)(\sigma-1)}{2}} I_2 I_4 I_6 \ldots I_{2\sigma-}$$

Donc

$$a_\sigma = (-1)^\sigma (2\sigma - 3) I_{2\sigma-2} a_{\sigma-1}.$$

C'est là une formule de récurrence qui va nous permettre de calculer a_σ en fonction même de σ.

99. Elle nous donne immédiatement les $\sigma - 1$ égalités

$$\begin{aligned}
a_2 &= (-1)^2.1\, I_2 a_1,\\
a_3 &= (-1)^3.3\, I_4 a_2,\\
a_4 &= (-1)^4.5\, I_6 a_3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots,\\
a_\sigma &= (-1)^\sigma (2\sigma - 3)\, I_{2\sigma-2} a_{\sigma-1}.
\end{aligned}$$

Multiplions toutes ces égalités membres à membres et simplifions, en nous rappelant que a_1 est (85) égal à l'unité. Nous trouvons

$$a_\sigma = (-1)^{\frac{\sigma(\sigma+1)}{2}-1}.1.3.5\dots(2\sigma-3)\, I_2 I_4 I_6 \dots I_{2\sigma-2}.$$

Telle est l'expression de a_σ en fonction de σ. C'est encore une factorielle de factorielles.

100. On voit que cette expression de a_σ est un peu plus compliquée que celle de b_σ. Il existe entre les deux une relation simple. Considérons, en effet, l'expression de a_σ que nous venons de trouver (99) et l'expression de b_σ que nous avons trouvée (93) autrefois. En divisant la première par la seconde et simplifiant, nous trouvons

$$\frac{a_\sigma}{b_\sigma} = -\frac{1.3.5\dots(2\sigma-3)}{2.4.6\dots(2\sigma-2)}\,\frac{1}{2\sigma},$$

et cette relation nous paraît assez remarquable.

VI. — Propriétés des termes de la colonne σ.

101. Dans ses études sur le développement, suivant les puissances ascendantes de la variable, d'une fraction rationnelle quelconque, Moivre a montré [1] que les coefficients de ce développement forment une série récurrente proprement dite, d'un ordre égal au degré du dénominateur de la fraction développée.

Nous avons vu que les termes composant la colonne de rang σ sont les coefficients du développement de la fraction rationnelle

(1) *Miscellanea analytica.*

W_σ, dont le dénominateur est d'un degré égal à β_σ, c'est-à-dire à $\frac{\sigma(\sigma+1)}{2}$.

De là cette proposition :

Les nombres composant la colonne de rang σ forment une série récurrente proprement dite, et l'ordre de cette série est égal à $\frac{\sigma(\sigma+1)}{2}$.

102. On appelle équation génératrice d'une série récurrente proprement dite la transformée en $\frac{1}{z}$ de l'équation qu'on obtiendrait en égalant à zéro le polynôme entier en z qui forme le dénominateur de la fraction génératrice. Il nous suffira donc, pour écrire cette équation génératrice, de nous rappeler la composition du dénominateur B_σ de la fraction W_σ.

Nous arrivons ainsi à ce théorème :

Si l'on pose, d'une façon générale,

$$G_{2t} = (z-2)(z-4)(z-6)\ldots(z-2t),$$

la série récurrente formée par les termes composant la colonne de rang σ a pour équation génératrice l'équation

$$G_2 G_4 G_6 \ldots G_{2\sigma} = 0.$$

Le premier membre de cette équation est du degré $\frac{\sigma(\sigma+1)}{2}$. Il est encore, d'ailleurs, une factorielle de factorielles.

103. Dire que les termes de la colonne σ forment une série récurrente proprement dite d'ordre β_σ, c'est dire qu'il existe, entre $\beta_\sigma + 1$ termes consécutifs quelconques de cette colonne, une relation linéaire, homogène, à coefficients constants. C'est cette relation qu'on appelle l'*échelle de récurrence* de la série. Nous pouvons l'écrire facilement, car elle présente, comme on le sait, les mêmes coefficients que l'équation génératrice, et que cette équation (**102**) nous est déjà connue.

Supposons, par exemple, qu'on nous demande l'échelle de récurrence de la troisième colonne. L'équation génératrice des termes de cette colonne est

$$G_2 G_4 G_6 = 0,$$

ou bien

$$(z-2)^3(z-4)^2(z-6) = 0,$$

ou bien enfin

$$z^6 - 20z^5 + 160z^4 - 656z^3 + 1456z^2 - 1664z + 768 = 0.$$

D'après ce qui précède, l'échelle de récurrence sera

$$Q_{n,6} - 20\,Q_{n-1,6} + 160\,\;Q_{n-2,6} - 656\,\;Q_{n-3,6} \\ + 1456\,Q_{n-4,6} - 1664\,Q_{n-5,6} + 768\,Q_{n-6,6} = 0.$$

104. Depuis les travaux d'Euler et de Lagrange sur les séries récurrentes, on sait que, si l'on désigne par u_n le terme général d'une telle série, par r une racine quelconque de son équation génératrice et par ρ le degré de multiplicité de cette racine, on a identiquement

$$u_n = \sum \zeta_r . r^n,$$

ζ_r désignant un polynôme entier en n, du degré $\rho - 1$, et le signe Σ s'étendant à toutes les racines distinctes de l'équation génératrice.

En remarquant que l'équation génératrice correspondant à la colonne de rang σ peut s'écrire

$$\prod_{1}^{\sigma}{}_t (z - 2t)^{\sigma+1-t} = 0$$

et en nous servant de la formule que nous venons de rappeler pour u_n, nous arrivons à cette proposition :

Le terme général $Q_{n,2\sigma}$ *de la colonne de rang* σ *est donné par la formule*

$$Q_{n,2\sigma} = \sum_{1}^{\sigma}{}_t \zeta_{2t} . (2t)^n,$$

dans laquelle ζ_{2t} *désigne un polynôme entier en n, du degré* $\sigma - t$.

105. Les valeurs particulières les plus simples que donne cette formule sont évidemment celles où σ est égal à 1 ou à 2. On trouve alors

$$Q_{n,2} = \frac{1}{4} \cdot 2^n,$$

$$Q_{n,4} = \left(\frac{1}{8} - \frac{n}{8}\right) 2^n + \frac{1}{32} \cdot 4^n,$$

l'indice n ne pouvant être inférieur à 2 dans la première égalité, ni à 4 dans la seconde.

106. L'expression que nous venons de donner (104) pour $Q_{n,2\sigma}$ et, plus généralement, toutes les propositions qui précèdent sur les colonnes verticales du triangle des séquences des permutations circulaires sont, on le voit, fort analogues à celles que nous avons données autrefois pour les colonnes verticales du triangle des séquences des permutations rectilignes. Mais elles sont toutes plus simples et s'obtiennent plus facilement. C'est là une particularité que nous avions signalée en commençant (4), et qui tient à la grande simplicité de notre formule fondamentale (60), ou plutôt, en dernière analyse, à la parfaite régularité des permutations circulaires.

CHAPITRE V.

LIGNES DU TRIANGLE.

I. — Définition des polynômes horizontaux.

107. Les *lignes horizontales,* ou plus simplement les *lignes* qui composent le triangle des séquences des permutations circulaires, sont caractérisées par le premier indice des nombres $Q_{n,s}$ qu'elles contiennent. Mais ce premier indice n'est point égal au rang de la ligne : lorsqu'il est n, le rang est seulement $n - 1$.

Afin d'abréger et de simplifier le langage, nous désignerons dorénavant chaque ligne, non point par le rang qu'elle occupe, mais par le premier indice des nombres qui la composent. La ligne d'indice n sera donc celle dont tous les termes ont n pour premier indice.

108. Ces lignes horizontales du triangle ont toutes une étendue limitée. Le nombre des termes de la ligne n est égal à ν, cette lettre ν désignant la partie entière de la moitié de n.

109. D'après ce que nous avons vu (**64**), le premier terme de la ligne d'indice n est toujours égal à 2^{n-2}.

Le dernier terme de la même ligne est $Q_{n,2\nu}$. C'est un nombre de permutations circulaires alternées lorsque n est pair; quasi alternées lorsque n est impair.

110. Il est d'ailleurs évident que la somme de tous les termes de la ligne d'indice n est égale au nombre total des permutations circulaires de n objets distincts, c'est-à-dire au produit des $n-1$ premiers nombres.

111. Les nombres qui composent la ligne d'indice n sont, de gauche à droite,

$$Q_{n,2}, \; Q_{n,4}, \; Q_{n,6}, \; \ldots, \; Q_{n,2\nu},$$

ν désignant toujours la partie entière de la moitié de n.

Pour découvrir les propriétés particulières de ces nombres, et étudier plus tard le triangle entier des séquences des permutations circulaires, nous relierons entre eux les nombres qui composent la ligne d'indice n, en les regardant comme les coefficients d'un même polynôme. Ce polynôme, que nous désignons par $K_n(x)$, ou plus simplement par K_n, est défini par l'égalité

$$K_n(x) = Q_{n,2} + Q_{n,4}x + Q_{n,6}x^2 + \ldots + Q_{n,2\nu}x^{\nu-1}.$$

Nous l'appelons le *polynôme horizontal correspondant à la ligne d'indice n*, ou plus simplement le *polynôme d'indice n*.

Il est évident, de plus, que ce polynôme n'existe que pour n supérieur à 1, et qu'il est toujours du degré $\nu - 1$.

II. — Relation entre deux polynômes horizontaux consécutifs.

112. Pour obtenir une relation entre deux polynômes horizontaux consécutifs quelconques, nous partirons de notre formule fondamentale

$$Q_{n,s} = sQ_{n-1,s} + (n-s+1)Q_{n-1,s-2},$$

que nous écrirons ainsi

$$Q_{n,s} = sQ_{n-1,s} - sQ_{n-1,s-2} + (n+1)Q_{n-1,s-2};$$

et nous distinguerons deux cas, selon que n sera pair ou impair.

113. Supposons, en premier lieu, n pair et égal à 2ν; écrivons ces ν égalités

$$\begin{aligned}
Q_{2\nu,2} &= 2Q_{2\nu-1,2},\\
Q_{2\nu,4} &= 4Q_{2\nu-1,4} - 4\,Q_{2\nu-1,2} \quad + (2\nu+1)Q_{2\nu-1,2},\\
Q_{2\nu,6} &= 6Q_{2\nu-1,6} - 6\,Q_{2\nu-1,4} \quad + (2\nu+1)Q_{2\nu-1,4},\\
Q_{2\nu,8} &= 8Q_{2\nu-1,8} - 8\,Q_{2\nu-1,6} \quad + (2\nu+1)Q_{2\nu-1,6},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
Q_{2\nu,2\nu} &= \ldots\ldots\ldots - 2\nu Q_{2\nu-1,2\nu-2} + (2\nu+1)Q_{2\nu-1,2\nu-2},
\end{aligned}$$

qui découlent toutes de notre formule fondamentale; puis multiplions la première d'entre elles par 1, la deuxième par x, la troisième par x^2, ..., la dernière par $x^{\nu-1}$.

Si nous ajoutons membres à membres, par colonnes, toutes ces égalités ainsi multipliées, nous trouvons un résultat pour les premiers membres, et trois pour les seconds.

Le résultat de l'addition des premiers membres est

$$Q_{2\nu,2} + Q_{2\nu,4}\,x + Q_{2\nu,6}\,x^2 + \ldots + Q_{2\nu,2\nu}\,x^{\nu-1},$$

c'est-à-dire le polynôme $K_{2\nu}$.

Les trois résultats de l'addition, par colonnes, des seconds membres sont

$$\begin{aligned}
&2[\,Q_{2\nu-1,2} + 2Q_{2\nu-1,4}x + 3Q_{2\nu-1,6}x^2 + \ldots + (\nu-1)Q_{2\nu-1,2\nu-2}x^{\nu-2}],\\
&-2[2Q_{2\nu-1,2}x + 3Q_{2\nu-1,4}x^2 + 4Q_{2\nu-1,6}x^3 + \ldots + \nu Q_{2\nu-1,2\nu-2}x^{\nu-1}],\\
&(2\nu+1)x[\,Q_{2\nu-1,2} + Q_{2\nu-1,4}x + Q_{2\nu-1,6}x^2 + \ldots + Q_{2\nu-1,2\nu-2}x^{\nu-2}];
\end{aligned}$$

ils ont pour sommes respectives

$$2\,\frac{d(x\mathrm{K}_{2\nu-1})}{dx}, \quad -2\,\frac{d(x^2\mathrm{K}_{2\nu-1})}{dx}, \quad (2\nu+1)x\mathrm{K}_{2\nu-1}.$$

Il s'ensuit immédiatement cette relation

$$\mathrm{K}_{2\nu} = 2\,\frac{d}{dx}[(x - x^2)\mathrm{K}_{2\nu-1}] + (2\nu+1)x\mathrm{K}_{2\nu-1},$$

entre les deux polynômes horizontaux consécutifs $\mathrm{K}_{2\nu}$ et $\mathrm{K}_{2\nu-1}$.

114. Supposons, en second lieu, n impair et égal à $2\nu+1$;

écrivons ces $\nu+1$ égalités

$$\begin{aligned}
Q_{2\nu+1,2} &= 2\ Q_{2\nu,2},\\
Q_{2\nu+1,4} &= 4\ Q_{2\nu,4} - 4\ Q_{2\nu,2} + (2\nu+2)Q_{2\nu,2},\\
Q_{2\nu+1,6} &= 6\ Q_{2\nu,6} - 6\ Q_{2\nu,4} + (2\nu+2)Q_{2\nu,4},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
Q_{2\nu+1,2\nu} &= 2\nu Q_{2\nu,2\nu} - 2\nu Q_{2\nu,2\nu-2} + (2\nu+2)Q_{2\nu,2\nu-2},\\
0 &= \dots\dots\dots - (2\nu+2)Q_{2\nu,2\nu} + (2\nu+2)Q_{2\nu,2\nu},
\end{aligned}$$

dont les ν premières résultent de notre formule fondamentale, et dont la dernière est évidente; puis multiplions la première d'entre elles par 1, la deuxième par x, la troisième par x^2, ..., la dernière par x^ν.

Si nous ajoutons membres à membres, par colonnes, toutes ces égalités ainsi multipliées, nous trouvons un résultat pour les premiers membres, et trois pour les seconds.

Le résultat de l'addition des premiers membres est

$$Q_{2\nu+1,2} + Q_{2\nu+1,4}x + Q_{2\nu+1,6}x^2 + \dots + Q_{2\nu+1,2\nu}x^{\nu-1},$$

c'est-à-dire le polynôme $K_{2\nu+1}$.

Les trois résultats de l'addition, par colonnes, des seconds membres sont

$$\begin{aligned}
&2[\ Q_{2\nu,2} + 2Q_{2\nu,4}x + 3Q_{2\nu,6}x^2 + \dots + \nu Q_{2\nu,2\nu}x^{\nu-1}],\\
&-2[2Q_{2\nu,2}x + 3Q_{2\nu,4}x^2 + 4Q_{2\nu,6}x^3 + \dots + (\nu+1)Q_{2\nu,2\nu}x^\nu],\\
&(2\nu+2)x[\ Q_{2\nu,2} + Q_{2\nu,4}x + Q_{2\nu,6}x^2 + \dots + Q_{2\nu,2\nu}x^{\nu-1}];
\end{aligned}$$

ils ont pour sommes respectives

$$2\frac{d(xK_{2\nu})}{dx}, \quad -2\frac{d(x^2K_{2\nu})}{dx}, \quad (2\nu+2)xK_{2\nu}.$$

Il s'ensuit immédiatement cette relation

$$K_{2\nu+1} = 2\frac{d}{dx}[(x-x^2)K_{2\nu}] + (2\nu+2)xK_{2\nu}$$

entre les deux polynômes horizontaux consécutifs $K_{2\nu+1}$ et $K_{2\nu}$.

115. Récrivons les deux égalités

$$\begin{aligned}
K_{2\nu} &= 2\frac{d}{dx}[(x-x^2)K_{2\nu-1}] + (2\nu+1)xK_{2\nu-1},\\
K_{2\nu+1} &= 2\frac{d}{dx}[(x-x^2)K_{2\nu}] + (2\nu+2)xK_{2\nu},
\end{aligned}$$

que nous venons d'obtenir. Nous avons établi la première (113), en supposant n égal à 2ν; la seconde (114), en supposant n égal à $2\nu+1$. Réciproquement, si nous remplaçons 2ν dans la première par n, dans la seconde par $n-1$, nous obtenons la formule unique

$$K_n = 2\frac{d}{dx}[(x-x^2)K_{n-1}] + (n+1)xK_{n-1};$$

et si, dans cette formule unique, nous effectuons la différentiation indiquée, nous arrivons à ce théorème :

Deux polynômes horizontaux consécutifs quelconques sont toujours reliés entre eux par l'équation

$$K_n = [2+(n-3)x]K_{n-1} + 2(x-x^2)K'_{n-1},$$

dans laquelle K'_{n-1} *désigne la dérivée, par rapport à* x, *du polynôme* K_{n-1}.

116. L'équation *aux différences mêlées* que nous venons d'établir, et qui relie entre eux deux polynômes horizontaux consécutifs quelconques, est, dans l'étude de ces polynômes, la relation la plus importante. Parmi les nombreuses conséquences qu'elle entraîne, il en est deux qu'on peut obtenir immédiatement. Ce sont celles qu'on en tire en y remplaçant x par o, puis par 1, c'est-à-dire par les deux racines du binôme $x-x^2$, qui multiplie la dérivée K'_{n-1}.

117. Remplaçons x par o. La relation considérée (115) se réduit à

$$K_n(0) = 2K_{n-1}(0).$$

Or $K_n(0)$ et $K_{n-1}(0)$ ne sont respectivement autre chose que les premiers coefficients des polynômes $K_n(x)$ et $K_{n-1}(x)$, c'est-à-dire que les nombres $Q_{n,2}$ et $Q_{n-1,2}$. Donc, quel que soit n,

$$Q_{n,2} = 2Q_{n-1,2}.$$

Donc, *dans le triangle des séquences des permutations circulaires, les termes composant la première colonne verticale forment une progression géométrique dont la raison est* 2.

C'est là un résultat que nous avons déjà (76) démontré.

118. Remplaçons x par 1. Notre formule (**115**) se réduit à

$$K_n(1) = (n-1)K_{n-1}(1);$$

et, comme $K_2(1)$ est égal à 1, il s'ensuit

$$K_n(1) = 1.2.3\ldots(n-1) = (n-1)!$$

Or $K_n(1)$ n'est autre chose que la somme de tous les coefficients du polynôme $K_n(x)$. Donc

$$Q_{n,2} + Q_{n,4} + Q_{n,6} + \ldots + Q_{n,2\nu} = (n-1)!$$

C'est là un résultat à peu près évident, que nous avons d'ailleurs (**110**) indiqué plus haut.

III. — Valeurs, pour $x = 1$, de quelques dérivées de $K_n(x)$.

119. Considérons la formule

$$K_n(x) = [2 + (n-3)x]K_{n-1}(x) + 2(x - x^2)K'_{n-1}(x),$$

que nous venons d'établir (**115**), et prenons, par rapport à x, les dérivées d'ordre p de ses deux membres. Nous trouvons, après quelques réductions simples, l'égalité

$$K_n^{(p)}(x) = \left\{ \begin{aligned} & p(n-2p-1)K_{n-1}^{(p-1)}(x) \\ & + [2p + 2 + (n-4p-3)x]K_{n-1}^{(p)}(x) \\ & + 2(x - x^2)K_{n-1}^{(p+1)}(x). \end{aligned} \right.$$

Remplaçons maintenant x par 1, nous trouvons finalement

$$K_n^{(p)}(1) = \left\{ \begin{aligned} & p(n-2p-1)K_{n-1}^{(p-1)}(1) \\ & + (n-2p-1)K_{n-1}^{(p)}(1). \end{aligned} \right.$$

Cette nouvelle égalité nous permettrait de calculer de proche en proche, pour $x = 1$, les valeurs numériques des dérivées successives de nos polynômes horizontaux. Nous pourrions chercher à en déduire l'expression générale de $K_n^{(p)}(1)$ en fonction de n et de p. Nous nous bornerons à en tirer l'expression particulière de $K'_n(1)$ et celle de $K''_n(1)$.

120. Pour calculer $K'_n(1)$, remplaçons p par 1 dans la formule (**119**) qui nous donne $K_n^{(p)}(1)$. Nous obtenons

$$K'_n(1) = (n-3)K'_{n-1}(1) + (n-3)K_{n-1}^{(0)}(1).$$

Il est évident que $K_{n-1}^{(0)}(1)$ n'est autre chose que la valeur, pour $x = 1$, du polynôme $K_{n-1}(x)$. Cette valeur, comme on l'a vu (118), est égale à $(n-2)!$ Donc notre nouvelle formule se réduit à

$$K'_n(1) = (n-3)K'_{n-1}(1) + (n-3)(n-2)!;$$

et c'est de là que nous allons tirer $K'_n(1)$ en fonction de n.

121. Considérons pour cela cette formule de récurrence (120) entre $K'_n(1)$ et $K'_{n-1}(1)$. Par son aspect même, elle nous conduit à essayer si, en y mettant, à la place de $K'_n(1)$, le produit par $(n-1)!$ d'un polynôme du premier degré en n, on n'y satisferait point.

On arrive, par cette voie, à l'expression

$$K'_n(1) = \frac{n-3}{3}(n-1)!,$$

qui répond à la question toutes les fois que n est égal ou supérieur à 3.

122. Pour obtenir, en fonction de n, l'expression de $K''_n(1)$, revenons à la formule (119) qui nous donne $K_n^{(p)}(1)$; et, dans cette formule, remplaçons p par 2. Nous trouvons

$$K''_n(1) = (n-5)K''_{n-1}(1) + 2(n-5)K'_{n-1}(1).$$

Or

$$K'_{n-1}(1) = \frac{n-4}{3}(n-2)!$$

Donc

$$K''_n(1) = (n-5)K''_{n-1}(1) + 2(n-5)\frac{n-4}{3}(n-2)!$$

Et c'est de cette dernière égalité que nous nous proposons de tirer $K''_n(1)$ en fonction de n.

123. Considérons pour cela cette formule (122) de récurrence entre $K''_n(1)$ et $K''_{n-1}(1)$. Par son aspect même, elle nous conduit à essayer si, en y mettant à la place de $K''_n(1)$ le produit par $(n-1)!$ d'un polynôme du second degré en n, on n'y satisferait point.

On arrive, par cette voie, à l'expression

$$K''_n(1) = \frac{(n-5)(5n-18)}{45}(n-1)!,$$

qui répond à la question et qui est vraie toutes les fois que n est égal ou supérieur à 5.

IV. — Somme et valeur moyenne des nombres de séquences.

124. Considérons les deux égalités

$$K_n(1) = (n-1)!$$
$$K'_n(1) = \frac{n-3}{3}(n-1)!$$

dont la première est pour ainsi dire évidente, et dont la seconde a été établie (**121**) précédemment.

Si nous en écrivons les premiers membres sous forme développée, elles deviennent

$$Q_{n,2} + Q_{n,4} + Q_{n,6} + Q_{n,8} + \ldots + Q_{n,2\nu} = (n-1)!$$
$$Q_{n,4} + 2Q_{n,6} + 3Q_{n,8} + \ldots + (\nu-1)Q_{n,2\nu} = \frac{n-3}{3}(n-1)!;$$

et si nous ajoutons ces deux dernières relations membres à membres, après les avoir multipliées l'une et l'autre par 2, nous trouvons

$$2Q_{n,2} + 4Q_{n,4} + 6Q_{n,6} + \ldots + 2\nu Q_{n,2\nu} = \frac{2n}{3}(n-1)!$$

125. Le premier membre de cette nouvelle égalité n'est évidemment autre chose que le nombre total des séquences que présente le système complet des permutations circulaires des n premiers nombres, c'est-à-dire que la somme des nombres des séquences contenues dans toutes ces permutations. De là ce théorème :

Dans le système complet des permutations circulaires des n premiers nombres, si l'on désigne par l_n la somme des nombres de séquences de toutes les permutations, on a, pour toute valeur de n supérieure à 2

$$l_n = \frac{2n}{3}(n-1)!$$

126. Le nombre moyen des séquences que présente chaque permutation circulaire des n premiers nombres est le quotient du nombre total l_n des séquences de ces permutations circulaires par le nombre $(n-1)!$ de ces permutations circulaires elles-mêmes. Donc

Si l'on désigne par m_n le nombre moyen des séquences que présente chaque permutation circulaire des n premiers nombres, on a, pour toute valeur de n supérieure à 2,

$$m_n = \frac{2n}{3}.$$

127. Divisant par n les deux membres de cette dernière égalité, nous trouvons l'égalité nouvelle

$$\frac{m_n}{n} = \frac{2}{3};$$

de là ce théorème :

Dans les permutations circulaires, pour toute valeur de n supérieure à 2, le rapport du nombre moyen des séquences d'une permutation au nombre des éléments de cette permutation est toujours égal à $\frac{2}{3}$.

Dans les permutations rectilignes, ce même rapport, lorsque n croît indéfiniment, tend vers la limite $\frac{2}{3}$; mais, lorsque n est fini, sa valeur dépend de n. Le théorème que nous venons d'énoncer nous donne donc un nouvel exemple d'une propriété asymptotique des permutations rectilignes transformée en une propriété habituelle des permutations circulaires.

Ce théorème, d'ailleurs, nous semble fort remarquable. Nous l'avions obtenu il y a déjà longtemps; nous l'avons donné pour la première fois au mois d'avril 1893, dans l'une des séances (¹) du Congrès des Sociétés savantes.

V. — Somme et valeur moyenne des carrés des nombres de séquences.

128. Supposons formé le Tableau complet des permutations circulaires des n premiers nombres; et au-dessous de chacune de ces permutations écrivons le carré du nombre des séquences

(¹) *Voir* le *Journal officiel* du 6 avril 1893.

qu'elle renferme. Nous écrivons ainsi autant de carrés qu'il y a de permutations; et nous nous proposons de calculer, d'abord la somme de tous ces carrés, ensuite leur valeur moyenne.

129. Pour y arriver, écrivons, sous forme développée et en y remplaçant x par 1, le polynôme $K_n(x)$ et ses deux premières dérivées. Nous avons

$$\begin{array}{l} Q_{n,2}+Q_{n,4}+Q_{n,6}+Q_{n,8}+\ldots+Q_{n,2\nu};\\ Q_{n,4}+2Q_{n,6}+3Q_{n,8}+\ldots+(\nu-1)Q_{n,2\nu},\\ 1.2Q_{n,6}+2.3Q_{n,8}+\ldots+(\nu-2)(\nu-1)Q_{n,2\nu}.\end{array}$$

Ajoutons maintenant ces trois développements, en multipliant le premier par 4, le deuxième par 12, le troisième par 4, et en tenant compte de l'identité évidente

$$4+12(t-1)+4(t-2)(t-1)=(2t)^2.$$

Nous trouvons comme total

$$2^2Q_{n,2}+4^2Q_{n,4}+6^2Q_{n,6}+\ldots+(2\nu)^2Q_{n,2\nu},$$

c'est-à-dire la somme même des carrés des nombres de séquences.

130. Cette somme est donc égale à

$$4K_n(1)+12K'_n(1)+4K''_n(1).$$

Or, comme nous l'avons vu précédemment, les expressions

$$K_n(1),\quad K'_n(1),\quad K''_n(1)$$

ont pour valeurs respectives, en fonction de n,

$$(n-1)!,\quad \frac{n-3}{3}(n-1)!,\quad \frac{(n-5)(5n-18)}{45}(n-1)!.$$

En portant ces valeurs dans la somme trouvée, et en effectuant les calculs, nous arrivons au résultat suivant :

Dans le système complet des permutations circulaires des n premiers nombres, si l'on désigne par L_n *la somme des carrés des nombres de séquences de toutes ces permutations, on a, pour toute valeur de n supérieure à* 4,

$$L_n=\frac{4n(5n+2)}{45}(n-1)!$$

131. Pour avoir la valeur moyenne des carrés des nombres de séquences, nous divisons la somme L_n de ces carrés par leur nombre $(n-1)!$ Nous voyons alors que :

Si l'on désigne par M_n *la valeur moyenne des carrés des nombres de séquences, on a, pour toute valeur de n supérieure à 4,*

$$M_n = \frac{4n(5n+2)}{45}.$$

132. Cherchons le rapport de cette valeur moyenne M_n du carré du nombre des séquences d'une permutation circulaire au carré n^2 du nombre des éléments de cette permutation. Nous trouvons, pour toute valeur de n supérieure à 4,

$$\frac{M_n}{n^2} = \frac{4(5n+2)}{45n},$$

et nous arrivons immédiatement à ce théorème :

Lorsque n croît indéfiniment, le rapport de la valeur moyenne du carré du nombre des séquences d'une permutation circulaire au carré du nombre des éléments de cette même permutation tend vers la limite $\frac{4}{9}$.

133. Ce dernier résultat est le même que pour les permutations rectilignes. Il semble très curieux, si l'on remarque que $\frac{4}{9}$ est le carré de $\frac{2}{3}$.

134. D'ailleurs, c'est dans le Chapitre que nous finissons que se manifeste surtout l'appauvrissement dont nous avons parlé en commençant (4) et qui résulte de ce que les permutations circulaires ont toutes un nombre pair de séquences.

CHAPITRE VI.

ENSEMBLE DU TRIANGLE.

I. — Série génératrice de tout le triangle.

135. Prenons la suite indéfinie des polynômes horizontaux

$$K_2(x), \quad K_3(x), \quad K_4(x), \quad K_5(x), \quad \ldots,$$

et ajoutons ces polynômes, dans l'ordre même où ils se succèdent, après les avoir multipliés respectivement par les termes du développement de e^y, c'est-à-dire par les facteurs

$$1, \quad \frac{y}{1!}, \quad \frac{y^2}{2!}, \quad \frac{y^3}{3!}, \quad \ldots.$$

Nous formons ainsi la série

$$K_2(x) + \frac{y}{1!} K_3(x) + \frac{y^2}{2!} K_4(x) + \frac{y^3}{3!} K_5(x) + \ldots;$$

et cette série, entière et à deux variables, est la série que nous allons étudier.

136. Cette série se rapporte au triangle entier des séquences des permutations circulaires. Chaque nombre, en effet, de ce triangle figure comme facteur dans l'un des termes de cette série.

Il est facile de trouver le terme de la série où figure le nombre $Q_{n,s}$ du triangle. Ce terme appartient évidemment au produit

$$\frac{y^{n-2}}{(n-2)!} K_n(x);$$

c'est le terme

$$\frac{1}{(n-2)!} Q_{n,2\sigma} x^{\sigma-1} y^{n-2},$$

où la lettre σ désigne la moitié de s.

Nous sommes donc fondé à nommer cette série la *série génératrice du triangle* tout entier. C'est ainsi que nous la nommerons dorénavant.

137. D'après ce que nous savons sur les polynômes horizontaux, nous voyons immédiatement ce que devient cette série génératrice, lorsqu'on y remplace successivement x par 0 et par 1.

Lorsqu'on y remplace x par 0, chaque polynôme horizontal $K_n(x)$ se réduit à son premier terme, c'est-à-dire à 2^{n-2}. La série devient

$$1 + \frac{y}{1!} 2 + \frac{y^2}{2!} 2^2 + \frac{y^3}{3!} 2^3 + \ldots;$$

elle se réduit, par conséquent, au développement de e^{2y}.

Lorsqu'on y remplace x par 1, le polynôme $K_n(x)$ se réduit, quel que soit n, à la somme de tous ses coefficients, c'est-à-dire à

$n-1)!$, et la série considérée se réduit à la suite

$$1+2y+3y^2+4y^3+\ldots,$$

dont nous nous occuperons bientôt.

II. — Fonction génératrice de tout le triangle.

138. Considérons la série génératrice du triangle, et remplaçons-y à la fois x par 1, et y par 1. Puisque, quel que soit n,

$$K_n(1)=(n-1)!,$$

cette série se réduit à la suite

$$1+2+3+4+\ldots,$$

qui est évidemment divergente. Ainsi, la série génératrice est divergente, lorsque x et y sont tous les deux égaux à l'unité.

139. Dans cette même série génératrice, remplaçons par 1 la variable x seulement. Comme nous l'avons déjà vu, la série devient

$$1+2y+3y^2+4y^3+\ldots.$$

Or, dans cette nouvelle série, lorsque n croît indéfiniment, le rapport d'un terme au précédent a pour limite y. Donc cette nouvelle série est convergente toutes les fois que la valeur absolue de y est inférieure à l'unité.

Il est, d'ailleurs, facile de voir que, pour toutes ces valeurs de y, on a identiquement

$$1+2y+3y^2+4y^3+\ldots=\frac{1}{(1-y)^2}.$$

140. Ainsi, notre série génératrice est convergente lorsque x est égal à 1, et que y, en valeur absolue, est inférieur à ce nombre. Il s'ensuit immédiatement ce théorème :

La série génératrice du triangle des séquences des permutations circulaires est convergente pour toutes les valeurs de x et de y dont les modules sont l'un et l'autre inférieurs à l'unité.

On peut même faire remarquer que, pour toutes ces valeurs de x et de y, la série génératrice est, non pas simplement convergente, mais, suivant l'expression consacrée, *absolument convergente.*

141. Dans tout ce qui va suivre, nous supposerons que x et y soient réels, et que leurs valeurs absolues soient toutes les deux inférieures à l'unité.

La série génératrice sera donc toujours convergente. Sa somme sera donc toujours une fonction réelle bien déterminée des variables x et y. Nous désignerons cette fonction par $\xi(x, y)$ ou, plus simplement, par ξ, et nous l'appellerons la *fonction génératrice* du triangle des séquences des permutations circulaires.

142. Nous pouvons maintenant exprimer le nombre $Q_{n,2\sigma}$ à l'aide de la fonction génératrice ξ.

D'après ce qui précède (**136**), en effet, le terme de cette fonction où figure $Q_{n,2\sigma}$ est le terme

$$\frac{1}{(n-2)!} Q_{n,2\sigma} x^{\sigma-1} y^{n-2}.$$

Prenons la dérivée de ce terme $\sigma - 1$ fois par rapport à x, et $n-2$ fois par rapport à y. Nous trouvons pour résultat final $(\sigma - 1)! \, Q_{n,2\sigma}$. Or, ce résultat n'est autre chose que celui qu'on obtient en prenant la dérivée de la fonction génératrice $\sigma - 1$ fois par rapport à x, puis $n-2$ fois par rapport à y, et en remplaçant finalement chacune de ces variables par zéro. Nous avons donc

$$Q_{n,2\sigma} = \frac{1}{(\sigma-1)!} \left(\frac{\partial^{n+\sigma-3} \xi}{\partial x^{\sigma-1} \partial y^{n-2}} \right)_{\substack{x=0\\ y=0}}.$$

Telle est l'expression cherchée.

III. — Équation aux dérivées partielles.

143. Pour obtenir l'équation *aux dérivées partielles* à laquelle satisfait la fonction génératrice $\xi(x, y)$, nous partirons de l'équation aux différences mêlées que nous avons trouvée dans notre cinquième Chapitre (**115**), et qui relie entre eux deux polynômes horizontaux consécutifs quelconques. Nous l'écrirons ainsi :

$$K_n = 2K_{n-1} + (n-3)x K_{n-1} + 2(x - x^2) K'_{n-1}.$$

144. Nous tirons immédiatement de cette relation les $n-2$ égalités suivantes :

$$\begin{array}{llll}
K_3 = 2K_2, & & & \\
K_4 = 2K_3 & + & 1xK_3 & + 2(x-x^2)K'_3, \\
K_5 = 2K_4 & + & 2xK_4 & + 2(x-x^2)K'_4, \\
K_6 = 2K_5 & + & 3xK_5 & + 2(x-x^2)K'_5, \\
\ldots\ldots & & & \ldots\ldots, \\
K_n = 2K_{n-1} & + & (n-3)xK_{n-1} & + 2(x-x^2)K'_{n-1}.
\end{array}$$

Multiplions-les, la première par 1, la deuxième par $\frac{y}{1!}$, la troisième par $\frac{y^2}{2!}$, la quatrième par $\frac{y^3}{3!}$, ..., la dernière par $\frac{y^{n-3}}{(n-3)!}$; puis ajoutons membres à membres, par colonnes, les nouvelles égalités ainsi obtenues.

Pour effectuer cette addition, nous avons à considérer quatre colonnes : une fournie par les premiers membres; trois fournies par les seconds. Nous allons calculer successivement les totaux de ces différentes colonnes.

145. Considérons la colonne formée par les premiers membres des équations ajoutées. Son total T est évidemment

$$K_3 + \frac{y}{1!}K_4 + \frac{y^2}{2!}K_5 + \ldots + \frac{y^{n-3}}{(n-3)!}K_n.$$

Il n'est autre chose que la dérivée partielle, par rapport à y, de la suite limitée

$$K_2 + \frac{y}{1!}K_3 + \frac{y^2}{2!}K_4 + \frac{y^3}{3!}K_5 + \ldots + \frac{y^{n-2}}{(n-2)!}K_n.$$

Cette suite limitée, à son tour, n'est que la somme des $n-1$ premiers termes de la série génératrice du triangle. Si donc nous désignons cette somme par ξ_{n-1}, nous avons l'identité

$$T = \frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial y},$$

qui nous donne, sous une forme simple, le total des premiers membres de nos équations.

146. Considérons la colonne formée par les premiers termes de tous les seconds membres. Son total T_1 est évidemment le double de la suite limitée

$$K_2 + \frac{y}{1!} K_3 + \frac{y^2}{2!} K_4 + \frac{y^3}{3!} K_5 + \ldots + \frac{y^{n-3}}{(n-3)!} K_{n-1}.$$

Cette suite limitée n'est autre chose que la somme des $n-2$ premiers termes de la série génératrice du triangle. Si donc nous désignons cette somme par ξ_{n-2}, nous avons l'identité

$$T_1 = 2\xi_{n-2},$$

qui nous donne le total de la première des colonnes formées par les seconds membres.

147. Considérons la colonne formée par les deuxièmes termes de tous les seconds membres. Son total T_2 est évidemment le produit par xy du polynôme

$$K_3 + \frac{y}{1!} K_4 + \frac{y^2}{2!} K_5 + \ldots + \frac{y^{n-4}}{(n-4)!} K_{n-1}.$$

Ce polynôme n'est autre chose que la dérivée partielle, par rapport à y, de la suite limitée

$$K_2 + \frac{y}{1!} K_3 + \frac{y^2}{2!} K_4 + \frac{y^3}{3!} K_5 + \ldots + \frac{y^{n-3}}{(n-3)!} K_{n-1}.$$

Cette suite limitée, à son tour, n'est que la somme des $n-2$ premiers termes de la série génératrice ξ. Si donc nous désignons cette somme par ξ_{n-2}, nous avons l'identité

$$T_2 = xy\,\frac{\partial \xi_{n-2}}{\partial y},$$

qui nous fait connaître le total de la deuxième des colonnes formées par les seconds membres.

148. Considérons enfin la colonne formée par les derniers termes de tous les seconds membres. Son total T_3 est évidemment le produit par $2(x-x^2)$ du polynôme

$$\frac{y}{1!} K'_3 + \frac{y^2}{2!} K'_4 + \frac{y^3}{3!} K'_5 + \ldots + \frac{y^{n-3}}{(n-3)!} K'_{n-1}.$$

Ce polynôme n'est autre chose que la dérivée partielle, par rapport à x, de la suite limitée

$$K_2 + \frac{y}{1!} K_3 + \frac{y^2}{2!} K_4 + \frac{y^3}{3!} K_5 + \ldots + \frac{y^{n-3}}{(n-3)!} K_{n-1}.$$

Or, nous avons rencontré déjà (**147**) cette suite limitée. Nous l'avons désignée alors par ξ_{n-2}. Nous avons donc l'identité

$$T_3 = 2(x - x^2) \frac{\partial \xi_{n-2}}{\partial x},$$

qui nous fait connaître le total de notre quatrième et dernière colonne.

149. En se reportant aux équations ajoutées précédemment (**144**), on voit immédiatement que l'on a

$$T = T_1 + T_2 + T_3.$$

Remplaçons ces quatre totaux par les valeurs que nous leur avons trouvées, nous obtenons l'équation

$$\frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial y} = 2\xi_{n-2} + xy \frac{\partial \xi_{n-2}}{\partial y} + 2(x - x^2) \frac{\partial \xi_{n-2}}{\partial x}.$$

Cette équation a lieu quels que soient n, x et y. Supposons x et y réels, et leurs valeurs absolues toutes deux inférieures à l'unité. D'après ce que nous avons vu précédemment (**141**), lorsque n croît indéfiniment, ξ_{n-2} tend vers la fonction génératrice ξ; les expressions $\frac{\partial \xi_{n-1}}{\partial y}$ et $\frac{\partial \xi_{n-2}}{\partial y}$ tendent chacune vers la dérivée partielle $\frac{\partial \xi}{\partial y}$; l'expression $\frac{\partial \xi_{n-2}}{\partial x}$ tend enfin vers $\frac{\partial \xi}{\partial x}$. A la limite donc l'équation précédente devient

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = 2\xi + xy \frac{\partial \xi}{\partial y} + 2(x - x^2) \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

ou bien

$$2(x^2 - x) \frac{\partial \xi}{\partial x} + (1 - xy) \frac{\partial \xi}{\partial y} = 2\xi;$$

et cette égalité exprime que la fonction génératrice $\xi(x, y)$ du triangle entier des séquences est l'une des fonctions, en nombre infini, qui satisfont à l'équation

$$2(x^2 - x) \frac{\partial \Xi}{\partial x} + (1 - xy) \frac{\partial \Xi}{\partial y} = 2\Xi,$$

laquelle est une équation *aux dérivées partielles*.

IV. — Intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles.

150. L'équation aux dérivées partielles que nous venons d'obtenir (**149**) est, à la fois, du premier ordre et du premier degré. Comme on le sait depuis Lagrange, il suffit, pour en former l'intégrale générale, de calculer deux solutions du système

$$\frac{dx}{2(x^2-x)} = \frac{dy}{1-xy} = \frac{d\Xi}{2\Xi},$$

qui est un système d'équations différentielles ordinaires, puis d'écrire que ces deux solutions sont fonctions l'une de l'autre.

151. Considérons d'abord l'équation

$$\frac{dx}{2(x^2-x)} = \frac{dy}{1-xy}.$$

C'est une équation différentielle ordinaire, du premier ordre et du premier degré, qui peut s'écrire

$$2(x^2-x)\frac{dy}{dx} + xy - 1 = 0.$$

En l'intégrant par le procédé habituel, on trouve

$$\mathrm{L}\,\frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} - y\sqrt{1-x} = \lambda,$$

λ désignant une constante arbitraire.

152. Considérons maintenant l'équation différentielle

$$\frac{dx}{x^2-x} = \frac{d\Xi}{\Xi},$$

dont l'intégration se réduit évidemment à une quadrature.

En effectuant cette quadrature, on arrive à ce résultat

$$\frac{x\Xi}{1-x} = \mu,$$

μ désignant encore une fonction arbitraire.

153. Pour former l'intégrale générale de l'équation aux dérivées partielles (149), il nous suffit à présent de poser

$$\mu = \Theta(\lambda),$$

Θ étant une fonction arbitraire, puis de remplacer, dans cette égalité, les constantes μ, λ par les expressions en x, en y et en Ξ, auxquelles elles sont égales. En opérant ainsi, nous arrivons à l'équation

$$\Xi = \frac{1-x}{x}\,\Theta\left(\mathrm{L}\,\frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} - y\sqrt{1-x}\right),$$

qui est l'intégrale générale cherchée.

Comme on peut le vérifier aisément, elle reproduit, par l'élimination de la fonction arbitraire, l'équation aux dérivées partielles (149) qu'il s'agissait d'intégrer.

V. — Fonction génératrice $\xi(x,y)$.

154. L'expression de Ξ que nous venons de former (153) est l'intégrale générale de notre équation aux dérivées partielles. Renfermant en elle une fonction arbitraire Θ, elle peut donner pour Ξ une infinité de fonctions différentes. Nous allons chercher, parmi ces fonctions en nombre infini, celle qui est précisément la fonction génératrice $\xi(x,y)$ du triangle des séquences des permutations circulaires.

155. Désignons par θ l'expression de Θ qui correspond à cette fonction génératrice ξ. Nous avons

$$\xi = \frac{1-x}{x}\,\theta\left(\mathrm{L}\,\frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}} - y\sqrt{1-x}\right).$$

Or, cette fonction génératrice ξ, lorsqu'on y remplace y par o, se réduit à $Q_{2,2}$, c'est-à-dire à 1.

Remplaçons ainsi y par o dans cette dernière relation. Nous trouvons

$$1 = \frac{1-x}{x}\,\theta\left(\mathrm{L}\,\frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\right);$$

et, par conséquent,

$$\theta\left(\mathrm{L}\,\frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}\right) = \frac{x}{1-x},$$

toutes les fois, d'ailleurs, que x est réel, et, en valeur absolue, inférieur à l'unité.

156. Pour obtenir l'expression même de cette fonction particulière θ, posons

$$\mathrm{L}\,\frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}=v.$$

Nous avons immédiatement

$$1+\sqrt{1-x}=\sqrt{x}.e^{v},$$

d'où il suit

$$1-\sqrt{1-x}=\sqrt{x}.e^{-v},$$

et, par conséquent,

$$x=\frac{4}{(e^{v}+e^{-v})^2}.$$

Portant ces résultats dans l'équation précédente (155), nous trouvons, toutes réductions faites,

$$\theta(v)=\frac{4}{(e^{v}-e^{-v})^2}.$$

Telle est l'expression de la fonction particulière $\theta(v)$.

157. Considérons cette fonction particulière $\theta(v)$ et remplaçons-y la variable v par l'expression

$$\mathrm{L}\,\frac{1+\sqrt{1-x}}{\sqrt{x}}-y\sqrt{1-x}.$$

Nous trouvons, par un calcul sans grandes difficultés, que cette fonction particulière prend la valeur θ_1 donnée par l'égalité

$$\theta_1=\frac{4x(1+\sqrt{1-x})^2\,e^{2y\sqrt{1-x}}}{[(1+\sqrt{1-x})^2-x\,e^{2y\sqrt{1-x}}]^2}.$$

C'est cette valeur que nous allons utiliser.

158. Remarquons pour cela que la fonction génératrice ξ est donnée (155) par la formule

$$\xi=\frac{1-x}{x}\theta_1;$$

et remplaçons, dans cette formule, θ_1 par l'expression que nous venons d'obtenir. Nous trouvons, après quelques réductions,

$$\xi=4\,\frac{(1+x)(1+\sqrt{1-x})^2\,e^{2y\sqrt{1-x}}}{[(1-\sqrt{1-x})^2+x\,e^{2y\sqrt{1-x}}]^2}.$$

Telle est *la fonction génératrice du triangle entier des séquences des permutations circulaires.*

VI. — Quelques vérifications.

159. Sous la forme où nous venons de la donner (158), la fonction génératrice du triangle se prête assez mal aux vérifications que nous voulons faire. En particulier, pour $x = 1$, son numérateur et son dénominateur s'annulent à la fois : elle devient en apparence indéterminée.

160. On peut éviter cet inconvénient en prenant l'expression de la fonction ξ et y remplaçant, au dénominateur, $e^{2y\sqrt{1-x}}$ par son développement. On s'aperçoit aussitôt que le produit $4(1-x)$ se trouve en facteur aux deux termes de la fonction ξ. En supprimant ce facteur commun, on supprime la cause de l'indétermination dont nous avons parlé, et l'on trouve

$$\xi = \frac{(1+\sqrt{1-x})^2 e^{2y\sqrt{1-x}}}{\left[1+\sqrt{1-x} - xy\left(1+\frac{2y\sqrt{1-x}}{2!}+\frac{4y^2(1-x)}{3!}+\ldots\right)\right]^2},$$

c'est-à-dire une nouvelle expression de la fonction génératrice $\xi(x,y)$, préférable de beaucoup à celle (158) que nous avons donnée plus haut.

161. Dans cette expression, remplaçons y par o, laissant x quelconque. Nous trouvons

$$\xi(x, 0) = 1.$$

Il en devait être ainsi, puisque, d'après sa définition même, lorsque y s'annule, la fonction ξ se réduit à son premier terme, c'est-à-dire à K_2, qui est égal à 1.

C'est d'ailleurs sur la connaissance de cette valeur de $\xi(x, 0)$ que nous nous sommes appuyé (155) pour particulariser la fonction arbitraire Θ.

162. Dans la même expression (160) de ξ, remplaçons x par o, sans toucher à y. Nous trouvons

$$\xi(0, y) = e^{2y},$$

résultat que nous avions obtenu précédemment (137), en le tirant de la définition même de la série génératrice du triangle.

163. Sans toucher à y, remplaçons encore, dans la fonction génératrice du triangle, x par 1. Nous trouvons immédiatement

$$\xi(1, y) = (1 - y)^{-2},$$

résultat qui nous était (139) déjà connu.

164. Les vérifications qui précèdent sont les plus simples possibles. On en pourrait évidemment effectuer une infinité d'autres.

En particulier, on pourrait considérer les dérivées partielles successives, par rapport à x, de la fonction génératrice ξ, et voir ce que ces dérivées deviennent lorsqu'on y remplace x par o. On obtiendrait ainsi des fonctions de y : ce seraient les sommes de séries, entières en y, dans chacune desquelles les différents termes contiendraient, comme facteurs, les nombres composant l'une des colonnes du triangle des séquences des permutations circulaires.

En particulier aussi, on pourrait calculer les dérivées successives, par rapport à y, de cette même fonction ξ, puis remplacer, dans ces dérivées, y par o : on devrait trouver finalement pour résultats les polynômes horizontaux K_2, K_3, K_4, ...

Au reste, ces différentes vérifications, dont nous avons effectué les premières, seraient de plus en plus laborieuses, et elles ne présenteraient qu'un très faible intérêt.

165. Quoi qu'il en soit, les études que nous venons de faire sur les permutations circulaires rappellent entièrement celles que nous avons faites autrefois sur les permutations rectilignes. Les trois derniers Chapitres du présent travail sont, pour ainsi parler, la reproduction, sous forme réduite, dans le même ordre et parfois dans les mêmes termes, des trois Chapitres composant notre Mémoire *Sur le triangle des séquences des permutations rectilignes.*