BULLETIN DE LA S. M. F.

L. RAFFY

Recherches sur les surfaces harmoniques. Résumé

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 63-66
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__63_1>

RECHERCHES SUR LES SURFACES HARMONIQUES (RÉSUMÉ);

Par M. L. Raffy.

Les recherches que je vais résumer se rapportent à une classe très étendue de surfaces dont la propriété caractéristique ne semble pas avoir été remarquée avant Jacobi. Elle consiste dans la possibilité, pour leur élément linéaire, d'acquérir la forme

$$ds^2 = (U - V)(U_1\, du^2 + V_1\, dv^2),$$

les U étant des fonctions de la seule variable u, et les V de v. Ce n'est pas ici le lieu de rappeler comment Jacobi, ayant ramené à cette forme l'élément linéaire des quadriques, a déterminé les lignes géodésiques de ces surfaces; ni comment Liouville a étendu à toutes les surfaces de la classe ce résultat important, extension qui pouvait, comme on sait, s'obtenir sans modifier en quoi que ce fût la méthode de Jacobi. Ainsi se trouvait fondée la théorie des surfaces dont nous allons nous occuper et que nous proposons d'appeler *surfaces harmoniques*. On pensera avec nous que cette dénomination est amplement justifiée, qu'elle s'impose presque, si l'on veut bien être attentif à l'identité des problèmes fondamentaux concernant l'élément linéaire de ces surfaces et les équations qui ont reçu le nom d'*équations harmoniques*. Je n'insisterai pas sur cette identité, qui se manifeste à toutes les pages du chapitre que M. Darboux consacre à ces équations dans ses *Leçons sur la théorie générale des surfaces* (1). Il était d'ailleurs indispensable de rappeler par un adjectif la propriété de ces surfaces, pour pouvoir caractériser brièvement celles qui la possèdent à divers titres. Il existe, en effet, des surfaces dont l'élément linéaire peut être ramené de *deux* manières différentes, et, par suite, d'une infinité de manières, à l'une des formes équivalentes

$$ds^2 = (U - V)(U_1\, du^2 + V_1\, dv^2),$$
$$ds^2 = (U - V)(du^2 + dv^2),$$
$$ds^2 = [\varphi(x+y) - f(x-y)]\, dx\, dy.$$

qui seront pour nous les *formes harmoniques*. A ces surfaces nous donnons le nom de surfaces *doublement harmoniques*. Les surfaces *simplement harmoniques* sont celles qui ne jouissent pas de cette propriété. Les éléments linéaires sont désignés comme les surfaces auxquelles ils appartiennent.

Bien que Liouville eût appelé l'attention sur les surfaces harmoniques en étudiant leurs géodésiques et en déterminant les formes harmoniques de l'élément linéaire du plan, la théorie de ces surfaces semble avoir été délaissée jusqu'à l'époque où M. Massieu, s'occupant après M. Bertrand des intégrales algébriques des problèmes de la Dynamique, fit connaître, dans sa thèse (1861), deux propositions de la plus haute importance, relatives, la première aux surfaces de révolution, qui sont des surfaces harmoniques particulières ($f = 0$), la seconde aux surfaces

(1) T. II, Livre IV, Chap. IX.

harmoniques proprement dites. Les résultats de M. Massieu se trouvant exposés, complétés même, dans l'ouvrage de M. Darboux ([1]), nous ne les transcrivons pas ici tout au long. Nous prenons d'ailleurs le second comme point de départ de toute notre première partie.

Quelques années après M. Massieu, Ossian Bonnet, dans l'importante *Addition* jointe à son *Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée* ([2]), s'est occupé incidemment des surfaces harmoniques. Il a montré que les quadriques sont les seules surfaces dont l'élément linéaire acquière la forme harmonique quand on les rapporte aux paramètres u et v de leurs lignes de courbure.

M. Dini ([3]) a fait connaître en 1869 cette propriété générale des surfaces harmoniques : *Si deux surfaces sont telles qu'il existe entre les points réels de l'une et ceux de l'autre une correspondance conservant les lignes géodésiques, ces deux surfaces sont harmoniques.* On dit qu'on peut faire la *représentation géodésique* de l'une sur l'autre.

C'est peut-être en étudiant de plus près ce problème de la représentation géodésique, sans exclure les correspondances imaginaires, que M. Lie a été conduit à la recherche toute différente des transformations infinitésimales qui conservent les géodésiques d'une même surface. Il a publié sur cette question un Mémoire étendu ([4]) dont nous parlerons plus loin, et dans lequel apparaît la notion d'élément linéaire doublement harmonique. Nous n'en retiendrons ici qu'une proposition détachée (note 5), sur laquelle nous n'aurons pas à revenir : *Toute surface minima, qui est en même temps une surface harmonique, est applicable sur une surface de révolution.*

Plus récemment encore, M. Darboux, dans son ouvrage déjà cité (Livre IV, Chap. IX), a fait connaître un élément linéaire réductible d'une infinité de manières à la forme harmonique; et il a signalé comme devant faire le sujet d'une recherche difficile

---

([1]) T. III, Livre VI, Chap. II.

([2]) *Journal de l'École Polytechnique*, 42e Cahier; 1867.

([3]) *Annali di Matematica*, t. III.

([4]) *Untersuchungen über geodätische Curven* (*Mathem. Annalen*, t. XX; 1882).

la détermination générale de tous les éléments linéaires jouissant de la même propriété. En outre, il a indiqué (Livre VI, Chap. II) un moyen d'obtenir ceux de ces éléments linéaires qui conviennent à des surfaces de révolution.

Dans un tout autre ordre d'idées, M. Weingarten a obtenu deux résultats de la plus haute importance. Il a d'abord (¹) déterminé *toutes* les surfaces admettant l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + 2(u - v^2)\,dv^2,$$

qui est harmonique comme appartenant à une quadrique (paraboloïde imaginaire). Généralisant ensuite (²) la transformation qui lui avait réussi dans ce cas, il en a déduit *toutes* les surfaces dont l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + 2\left(u + \frac{v}{a} + e^{2av}\right) dv^2$$

convient à d'autres paraboloïdes, imaginaires aussi.

Tout ce qui constitue aujourd'hui la théorie des surfaces harmoniques, en dehors des travaux que nous venons d'énumérer, est contenu, à fort peu de chose près, dans nos *Recherches*. C'est ce qui résulte du rapport présenté à l'Académie des Sciences (³) sur le concours dont cette théorie a fait le sujet. Le mémoire couronné traite exclusivement des éléments linéaires doublement harmoniques, dont la détermination complète forme la seconde partie de mon travail. Un autre, qui a partagé avec le mien une mention honorable, ne contient, sauf quelques théorèmes communs aux trois mémoires approuvés, que les deux beaux résultats mentionnés ci-dessus, le second trouvé sans nul doute avant que M. Weingarten le publiât.

(A suivre.)

(¹) *Göttinger Nachrichten;* 1887.
(²) *Comptes rendus Acad. des Sciences,* t. CXII; 1891.
(³) *Ibid.*, séance du 19 décembre 1892, t. CXV, p. 1122.