

BULLETIN DE LA S. M. F.

E. CAHEN

Sur une généralisation de la formule qui donne la constante d'Euler

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 227-229

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__227_1

© Bulletin de la S. M. F., 1894, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

**SUR UNE GÉNÉRALISATION DE LA FORMULE QUI DONNE LA CONSTANTE
D'EULER;**

Par M. E. CAHEN.

On sait que la constante d'Euler est définie par la formule

$$(1) \quad C = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n \right).$$

Considérons l'expression

$$(2) \quad \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s} - \frac{n^{1-s} - 1}{1-s}$$

où nous supposerons que s est une quantité dont la partie réelle est comprise entre 0 et 1. Cette expression se réduit à

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \log n$$

pour $s = 1$.

On démontre facilement que l'expression (2) a une limite

pour $n = \infty$; nous allons voir de plus que cette limite est

$$\zeta(s) + \frac{1}{1-s},$$

$\zeta(s)$ étant la fonction bien connue de Riemann.

Plus simplement, la limite de

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s} - \frac{n^{1-s}}{1-s}$$

est $\zeta(s)$.

En effet, soit

$$\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s} - \frac{n^{1-s}}{1-s} = \zeta_n(s).$$

Alors

$$\begin{aligned} \zeta_n(s) - \zeta_{n-1}(s) &= \frac{1}{n^s} - \frac{n^{1-s} - (n-1)^{1-s}}{1-s} \\ &= - \left(\frac{s}{1.2} \frac{1}{n^{s+1}} + \frac{s(s+1)}{1.2.3} \frac{1}{n^{s+2}} + \dots \right). \end{aligned}$$

Faisons dans cette égalité $n = 2, 3, \dots, n$ et ajoutons; puis faisons croître n indéfiniment. Nous obtenons, en remarquant que la partie réelle de s est plus grande que zéro, par hypothèse,

$$\lim \zeta_n(s) = 1 - \frac{1}{1-s} - \left\{ \frac{s}{1.2} [\zeta(s+1) - 1] + \frac{s(s+1)}{1.2.3} [\zeta(s+2) - 1] + \dots \right\}.$$

Or

$$1 - \frac{1}{1-s} + \frac{s}{1.2} + \frac{s(s+1)}{1.2.3} + \dots$$

est nul, comme on le voit en développant $(1-1)^{1-s}$ d'après la formule du binôme.

Il reste donc

$$\lim \zeta_n(s) = - \sum_{p=1}^{\infty} \frac{s(s+1) \dots (s+p-1)}{1.2 \dots p(p+1)} \zeta(s+p).$$

Donc, pour démontrer que $\lim \zeta_n(s) = \zeta(s)$, il suffit de démontrer que

$$(3) \quad \sum_{p=0}^{\infty} \frac{s(s+1) \dots (s+p-1)}{1.2 \dots p(p+1)} \zeta(s+p) = 0.$$

Pour démontrer cette formule, on peut se servir de l'expression suivante de $\zeta(s)$

$$\zeta(s) = \frac{\Gamma(1-s)}{2i\pi} \int_c \frac{x^{s-1} dx}{e^{-x} - 1},$$

l'intégrale étant prise le long d'un contour enveloppant l'origine, mais aucun autre zéro de la fonction $e^{-x} - 1$, et s'étendant à l'infini du côté des x négatifs.

La formule (3) à démontrer devient alors

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \int_c \frac{dx}{e^{-x} - 1} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{s(s+1)\dots(s+p-1)}{1.2\dots p(p+1)} \Gamma(1-s-p) x^{s+p-1}.$$

Or

$$\sum_{p=0}^{\infty} \frac{s(s+1)\dots(s+p-1)}{1.2\dots p(p+1)} \Gamma(1-s-p) x^{s+p-1} = -x^{s-2} \Gamma(1-s)(e^{-x} - 1);$$

donc la formule à démontrer se réduit à

$$0 = -\frac{\Gamma(1-s)}{2i\pi} \int_c x^{s-2} dx.$$

Elle est alors évidente, puisque la partie réelle de s est plus petite que 1.

Remarquons que la formule

$$\zeta(s) = \lim_{n=\infty} \left(\frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \dots + \frac{1}{n^s} - \frac{n^{1-s}}{1-s} \right)$$

que nous venons de démontrer pour les valeurs de s , dont la partie réelle est comprise entre 0 et 1, est d'ailleurs évidente pour celles dont la partie réelle est plus grande que 1.

Pour $s = 1$, elle donne la formule (1), car on sait que

$$\zeta(s) = C + \frac{1}{1-s} + A(s-1) + B(s-1)^2 + \dots$$
