BULLETIN DE LA S. M. F.

E. GENTY

Sur les surfaces à courbure totale constante

Bulletin de la S. M. F., tome 22 (1894), p. 106-109

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1894__22__106_1>

SUR LES SURFACES A COURBURE TOTALE CONSTANTE;

Par M. E. Genty.

Dans son remarquable Mémoire *Sur les congruences de droites et sur la théorie des surfaces,* M. Cosserat donne un certain nombre de formules, qui établissent une liaison étroite entre la théorie des surfaces et celle des congruences des droites.

Nous allons montrer, dans cette Note, comment la théorie des congruences conduit simplement, pour les surfaces à courbure totale constante, aux transformations de MM. Bianchi et Bäcklund (Darboux, *Leçons,* t. III, p. 420 à 438).

En conservant toutes les notations de M. Cosserat, on sait que la demi-distance focale ρ d'une congruence rectiligne donnée par la représentation sphérique de ses développables satisfait à l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} + \beta \frac{\partial \rho}{\partial u} + \beta_1 \frac{\partial \rho}{\partial v} + \left(\frac{\partial \beta}{\partial u} + \frac{\partial \beta_1}{\partial u} + f\right)\rho = 0. \tag{1}$$

Si l'on a

$$\frac{\partial \beta}{\partial u} + \frac{\partial \beta_1}{\partial v} + f = 0, \tag{2}$$

l'équation (1) sera vérifiée par $\rho = \text{const.}$, et, dans ce cas, les équations qui expriment que les lignes de courbure se correspondent sur les deux nappes de la surface focale prennent la forme

$$\frac{\beta}{\alpha_1} = \frac{\gamma}{\beta_1} = \frac{\beta_1 \gamma - \beta^2 - g}{\beta_1^2 - \alpha_1 \beta + e} = -\frac{g}{e}.$$

ou

$$(3) \qquad \begin{cases} e\beta + g\alpha_1 = 0, \\ e\gamma + g\beta_1 = 0. \end{cases}$$

Or on a

$$h^2\alpha_1 = e\left(\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial v}\right) - \frac{f}{2}\frac{\partial e}{\partial u},$$

$$h^2\beta = \frac{g}{2}\frac{\partial e}{\partial v} - \frac{f}{2}\frac{\partial g}{\partial u},$$

$$h^2\beta_1 = \frac{e}{2}\frac{\partial g}{\partial u} - \frac{f}{2}\frac{\partial e}{\partial v},$$

$$h^2\gamma = g\left(\frac{\partial f}{\partial v} - \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial u}\right) - \frac{f}{2}\frac{\partial g}{\partial v},$$

où l'on a posé

$$h^2 = ef - g^2.$$

En tenant compte de ces relations, on met les équations (3) sous la forme

$$\frac{\partial \log f^2}{\partial u} = \frac{\partial \log(eg)}{\partial u},$$

$$\frac{\partial \log f^2}{\partial v} = \frac{\partial \log(eg)}{\partial v};$$

d'où

$$\frac{f^2}{eg} = \cos^2\theta = \text{const.},$$

ce qui montre que les plans tangents aux points F_1 et F_2 des deux nappes de la surface focale se coupent sous un angle constant θ.

La réciproque est évidente et, si ρ et θ sont des constantes, les lignes de courbure et, par suite aussi, les lignes asymptotiques se correspondent sur les deux nappes de la surface focale.

La courbure totale au point F_1 de la première nappe a alors pour expression, en supposant $2\rho = 1$,

$$\frac{1}{R_1 R'_1} = \frac{h^2\gamma}{g^2\beta_1} = -\frac{h^2}{eg} = -\sin^2\theta;$$

on trouve de même, pour la courbure totale au point F_2 de la seconde nappe,

$$\frac{1}{R_2 R'_2} = \frac{h^2\alpha_1}{e^2\beta} = -\sin^2\theta;$$

donc les deux nappes de la surface focale ont leur courbure totale constante et égale à $-\sin^2\theta$.

Les lignes de courbure des deux nappes ont pour équation

$$(4) \qquad \beta\beta_1\, du^2 + (\beta_1\gamma - \beta^2 - g)\, du\, dv - \beta\gamma\, dv^2 = 0,$$

et l'équation définissant les rayons de courbure principaux de la seconde nappe prend la forme

$$(5) \qquad \alpha_1 h^2 R^2 - h\sqrt{e}(\alpha_1\beta + \beta_1^2 + e)R + e^2\beta = 0.$$

Soit (du, dv) l'une des solutions de l'équation (4); le plan normal à cette direction mené par le point F_1, lequel est un plan principal de la nappe (F_1), rencontre la normale de la seconde nappe en un point A, et, si l'on désigne par R la distance F_2A, on reconnaît très simplement que cette distance est définie par l'équation

$$\beta_1\, du - \beta\, dv + \frac{h R\, dv}{\sqrt{e}} = 0.$$

Si l'on élimine du et dv entre cette équation et l'équation (4), il vient

$$\beta(\beta\sqrt{e} - hR)^2 + \sqrt{e}(\beta_1\gamma - \beta^2 - g)(\beta\sqrt{e} - hR) - \beta\beta_1\gamma e = 0.$$

En développant cette équation et tenant compte des relations (3), on retrouve l'équation (5). Donc :

Si deux surfaces se correspondent point par point de telle manière que la distance entre ces deux points soit constante, et que les deux plans tangents en ces deux points contiennent la droite qui les joint et forment entre eux un angle constant θ, *les lignes de courbure et les lignes asymptotiques se correspondent sur ces deux surfaces, pour lesquelles les courbures totales sont constantes et égales à* $-\frac{\sin^2\theta}{p^2}$, p *étant la distance constante des deux points correspondants.*

Pour $\theta = 90^\circ$, on a la transformation de M. Bianchi; si θ est un angle quelconque, on a la transformation de M. Bäcklund.

Dans le premier cas, la congruence est une congruence de normales et l'équation (1) devient

$$(6) \qquad \frac{\partial\beta}{\partial u} + \frac{\partial\beta_1}{\partial v} = 0.$$

On en déduit immédiatement

$$eg = \varphi(u)\psi(v),$$

ou, en particularisant convenablement les paramètres,

$$eg = 1. \tag{7}$$

La relation qui précède, jointe à $f = 0$, caractérise la représentation sphérique des surfaces pour lesquelles la différence des rayons de courbure est constante.

Remarquons enfin que, dans ce cas, l'élément linéaire de la surface (F_1) a pour expression

$$ds^2 = (\beta_1\, du - \beta\, dv)^2 + e\, dv^2\,;$$

or la relation (6) montre qu'on peut poser

$$\beta_1\, du - \beta\, dv = du_1.$$

On a donc

$$ds^2 = du_1^2 + e\, dv^2,$$

ce qui montre que v est le paramètre d'un système de lignes géodésiques sur (F_1). On verrait de même que u est le paramètre d'un système de lignes géodésiques sur (F_2).

Les trajectoires orthogonales de ces géodésiques se correspondent sur les deux nappes et elles ont pour équation différentielle

$$\beta_1\, du - \beta\, dv = 0,$$

ou

$$e\frac{\partial g}{\partial u}\, du - g\frac{\partial e}{\partial v}\, dv = 0,$$

ou encore

$$\frac{\partial \log e}{\partial v}\, dv - \frac{\partial \log g}{\partial u}\, du = 0,$$

ou enfin, en tenant compte de la relation (7),

$$\frac{\partial \log e}{\partial u}\, du + \frac{\partial \log e}{\partial v}\, dv = 0.$$

Donc leur équation finie est $e = \text{const.}$