Bulletin de la S. M. F.

A. Demoulin

Sur une classe particulière de courbes gauches

Bulletin de la S. M. F., tome 21 (1893), p. 8-13

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__8_1>

Sur une classe particulière de courbes gauches;
par M. Demoulin.

1. Dans une Note intitulée : *Quelques remarques relatives à la théorie des courbes gauches* (²), nous avons démontré le théorème suivant :

Lors du déplacement du trièdre principal relatif à une courbe à torsion constante, l'axe hélicoïdal instantané décrit, par rapport à ce trièdre, un conoïde de Plücker.

(²) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XX, p. 43.

Par des considérations de Géométrie cinématique, encore inédites, M. Mannheim a étendu ce théorème aux courbes de M. Bertrand. Nous nous proposons, dans cette Note, de chercher toutes les courbes jouissant de la propriété en question.

2. Soient Ox, Oy, Oz respectivement la tangente, la normale principale et la binormale en un point quelconque O d'une courbe gauche (Γ). L'axe hélicoïdal, relatif au déplacement élémentaire du trièdre formé par ces trois droites, a pour équations

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{z}{x} &= -\frac{\tau}{\rho}, \\ y &= \frac{\rho\tau^2}{\rho^2+\tau^2}, \end{aligned} \right.$$

ρ et τ désignant respectivement le rayon de courbure et le rayon de torsion de la courbe (Γ) au point O.

Ces équations montrent que l'axe hélicoïdal coupe à angle droit la normale principale; par suite, si une courbe est telle que l'axe hélicoïdal instantané décrive, par rapport au trièdre principal, un conoïde de Plücker, ce conoïde admettra nécessairement l'axe des y comme ligne de striction.

3. Cherchons l'équation la plus générale d'un conoïde de Plücker occupant, par rapport aux axes des coordonnées, la position indiquée. L'équation la plus simple de ce conoïde est

$$axz + y(x^2+z^2) = 0,$$

a désignant une constante. Si l'on imprime à cette surface un mouvement hélicoïdal mesuré par une translation α le long de l'axe des y et par une rotation ω autour de cet axe, l'équation du conoïde deviendra

$$a(x\cos\omega + z\sin\omega)(x\cos\omega - z\sin\omega) + (y-\alpha)(x^2+z^2) = 0,$$

ou, après quelques réductions,

$$\mathrm{A}xz + \mathrm{B}x^2 + \mathrm{C}z^2 + \mathrm{D}y(x^2+z^2) = 0,$$

A, B, C, D désignant des constantes indépendantes.

4. Cela posé, remplaçons dans l'équation ci-dessus y et $\frac{z}{x}$ par les valeurs (1); il viendra

$$(2) \qquad \frac{\mathrm{A}}{\rho} + \frac{\mathrm{B}}{\tau^2} - \frac{\mathrm{C}}{\rho\tau} + \frac{\mathrm{D}}{\rho^2} = 0.$$

Cette relation caractérise complètement les courbes cherchées. L'hypothèse $B = 0$ donne les courbes de M. Bertrand :

$$A - \frac{C}{\tau} + \frac{D}{\rho} = 0.$$

5. Faisons, dans (2), $C = 0$; nous aurons

$$\frac{A}{\rho} + \frac{B}{\tau^2} + \frac{C}{\rho^2} = 0. \tag{2}'$$

La courbe définie par cette équation constitue la solution la plus générale du problème suivant :

En un point O *d'une courbe* (Γ), *on mène une normale* OA *faisant un angle constant avec la normale principale à la courbe* (Γ) *en ce point. On demande de trouver toutes les courbes* (Γ) *telles que les droites* OA *soient les binormales d'une autre courbe* (Γ').

Soit O' le point où la droite OA s'appuie sur la courbe (Γ'). Posons $OO' = l$ et appelons $(0, \beta, \gamma)$ les cosinus directeurs de la droite OA par rapport aux axes Ox, Oy, Ox du trièdre principal relatif au point O.

Rappelons maintenant quelques résultats concernant la théorie des courbes gauches. Soient (x, y, z) les coordonnées d'un point O' par rapport aux axes du trièdre principal relatif à un point O d'une courbe gauche quelconque. Si ce trièdre se déplace de manière que la vitesse du point O soit constante et égale à l'unité, les composantes de la vitesse et de l'accélération du point O' seront

$$V_x = 1 - ry + \frac{dx}{ds}, \qquad J_x = -rV_y + \frac{dV_x}{ds},$$

$$V_y = rx - pz + \frac{dy}{ds}, \qquad J_y = rV_x - pV_z + \frac{dV_y}{ds},$$

$$V_z = py + \frac{dz}{ds}. \qquad J_z = pV_y + \frac{dV_z}{ds}.$$

Dans ces formules, s désigne l'arc de la courbe; on a posé, pour la simplicité,

$$r = \frac{1}{\rho}, \qquad p = -\frac{1}{\tau}.$$

Dans le cas actuel,

$$x = 0, \qquad y = l\beta, \qquad z = l\gamma;$$

par suite

$$V_x = 1 - rl\beta,$$
$$V_y = -pl\gamma + \beta\frac{dl}{ds},$$
$$V_z = pl\beta + \gamma\frac{dl}{ds}.$$

En exprimant que la vitesse du point O′ est perpendiculaire à O′O, on trouve que l doit être constant; les composantes de la vitesse se réduisent donc à

$$(3) \qquad \left\{\begin{aligned} V_x &= 1 - rl\beta, \\ V_y &= -pl\gamma, \\ V_z &= pl\beta. \end{aligned}\right.$$

On trouve ensuite, pour les composantes de l'accélération,

$$(4) \qquad \left\{\begin{aligned} J_x &= l\gamma pr - l\beta r', \\ J_y &= r(1 - lr\beta)) - p^2 l\beta - l\gamma p', \\ J_z &= -p^2 l\gamma + l\beta p', \end{aligned}\right.$$

les accents dénotant des dérivées relatives à l'arc.

La binormale à la courbe (Γ′) au point O′ est évidemment parallèle au vecteur dont les composantes N_x, N_y, N_z sont données par les formules

$$N_x = V_y J_z - V_z J_y,$$
$$N_y = V_z J_x - V_x J_z,$$
$$N_z = V_x J_y - V_y J_x.$$

A cause des relations (3) et (4), les valeurs de N_x, N_y, N_z peuvent s'écrire, toutes réductions faites,

$$(5) \qquad \left\{\begin{aligned} N_x &= pl[p^2 l - \beta r(1 - \beta r l)], \\ N_y &= p^2 l(\beta\theta' + \gamma), \\ N_z &= r + p^2 r l^2 - 2r^2 l\beta - l\beta p^2 + l^2 r^3 \beta^2 + p^2\gamma l\theta', \end{aligned}\right.$$

pourvu qu'on pose

$$(6) \qquad -l\beta\frac{r}{p} + \frac{1}{p} = \theta, \qquad \frac{d\theta}{ds} = \theta'.$$

Exprimons que la binormale de la courbe (Γ′) au point O′ coïncide avec $O'O$; nous aurons

$$\frac{N_x}{0} = \frac{N_y}{\beta} = \frac{N_z}{\gamma},$$

ou, en tenant compte des formules précédentes,

$$p^2 l - \beta r(1 - \beta r l) = 0,$$
$$\gamma^2 p l = \beta(r + p^2 r l^2 - 2r^2 l\beta - l\beta p^2 + l^2 r^3 p^2).$$

Or il est aisé de voir que ces deux conditions rentrent l'une dans l'autre. Les courbes cherchées sont donc définies par l'équation

$$\frac{\beta}{\rho} = l\left(\frac{\beta^2}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^2}\right), \tag{7}$$

laquelle a le même degré de généralité que l'équation $(2)'$.

Notre assertion se trouve donc justifiée.

Si $\beta = 1$, la droite OO' coïncide avec la normale principale Oy et l'équation (7) devient

$$\frac{1}{\rho} = l\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^2}\right).$$

Elle définit les courbes dont les normales principales sont les binormales d'une autre courbe.

6. Les formules établies au n° 5 permettent de résoudre un certain nombre de problèmes relatifs aux courbes gauches. Posons-nous, par exemple, cette question :

En un point O *d'une courbe gauche* (Γ), *on mène une normale* OA *faisant avec la normale principale un angle constant. Trouver toutes les courbes* (Γ) *pour lesquelles les droites* OA *seront les normales principales d'une autre courbe* (Γ').

Soit O' le point où la droite OA rencontre la courbe (Γ'). On démontrera, comme précédemment, que la longueur $OO' = l$ doit être constante. On achèvera d'exprimer toutes les conditions du problème en écrivant que la droite OO' est perpendiculaire à la binormale de la courbe (Γ') au point O', ce qui donnera

$$\beta N_y + \gamma N_x = 0,$$

ou, en tenant compte des formules (5),

$$\gamma r[(1 - rl\beta)^2 + p^2 l^2] + p^2 l\theta' = 0. \tag{8}$$

En prenant pour θ une fonction arbitraire de l'arc s, les équations (6) et (8), résolues par rapport à r et à p, nous donneront la courbure et la torsion de toutes les courbes satisfaisant à la question. Nous trouverons ainsi

$$-\frac{1}{\rho} = \frac{l\theta'}{\gamma(\theta^2 + l^2)},$$
$$-\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\theta} + \frac{l^2\beta\theta'}{\gamma\theta(\theta^2 + l^2)}.$$