BULLETIN DE LA S. M. F.

H. DE LA GOUPILLIÈRE

Théorème sur le centre des moyennes distances

Bulletin de la S. M. F., tome 21 (1893), p. 5-8

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__5_1>

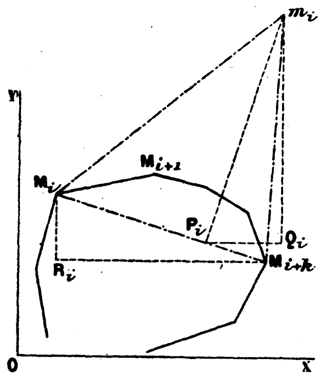
MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Théorème sur le centre des moyennes distances;
par M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

1. *Considérant un polygone plan quelconque de n côtés, on réunit consécutivement ses sommets de k en k par des cordes de jonction. Sur ces diverses cordes on construit des polygones de p côtés, tous semblables entre eux, mais d'ailleurs sans aucune relation avec la forme du proposé. Le centre des moyennes distances des np sommets de ces n polygones sera toujours le même que celui des n sommets du proposé.*

Pour établir cette proposition, commençons par envisager le cas d'un triangle $M_i m_i M_{i+k}$, toujours semblable à lui-même, construit sur la corde variable M_iM_{i+k} du polygone proposé; et rapportons la figure à un système d'axes rectangulaires XOY.

Fig. 1.



L'abscisse du sommet m_i de ce triangle sera égale à celle du pied P_i de sa hauteur m_iP_i, augmentée de la projection P_iQ_i de cette hauteur sur l'axe OX. Le triangle $M_im_iM_{i+k}$ restant semblable à un type déterminé, le point P_i partage sa base M_iM_{i+k} dans un rapport fixe. Son abscisse peut donc s'exprimer, en fonction de celles X_i, X_{i+k} des extrémités, sous la forme

$$\frac{\alpha X_i + \beta X_{i+k}}{\alpha + \beta}.$$

En second lieu, les triangles $m_iP_iQ_i$ et $M_iM_{i+k}R_i$ sont semblables l'un à l'autre, comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires. Il en résulte que P_iQ_i est avec M_iR_i, ou $Y_i - Y_{i+k}$, dans le rapport constant de m_iP_i à M_iM_{i+k}. On peut donc représenter ce segment par

$$\gamma(Y_i - Y_{i+k}).$$

Il s'ensuit, pour l'abscisse x_i du point m_i, l'expression

$$x_i = \frac{\alpha X_i + \beta X_{i+k}}{\alpha + \beta} + \gamma(Y_i - Y_{i+k}).$$

Reproduisons cette équation n fois, en remplaçant successivement l'indéterminée i par les nombres 1, 2, 3, ..., n; et ajoutons membre à membre. Chaque ordonnée Y_j apparaîtra deux fois dans le résultat avec les coefficients γ et $-\gamma$. Tous les Y disparaissent par suite identiquement. Chaque abscisse X_j figurera de son côté deux fois avec les coefficients

$$\frac{\alpha}{\alpha+\beta}, \quad \frac{\beta}{\alpha+\beta},$$

dont la somme se réduit à l'unité. Il vient dès lors simplement

$$x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n = X_1+X_2+X_3+\ldots+X_n.$$

2. Considérons maintenant un polygone de p côtés construit sur la corde M_iM_{i+k}, et réunissons chacun de ses $p-2$ sommets m_i, autres que ceux M_i, M_{i+k} qui lui sont communs avec le proposé, à ces deux derniers par des droites de jonction. Ces divers points deviendront individuellement les sommets de triangles qui restent semblables à eux-mêmes quand on passe d'une corde à l'autre en faisant varier i. L'équation précédente leur est donc applicable, et l'on peut écrire en abrégé

$$\Sigma X_i = \Sigma x_i,$$

en étendant par la pensée la somme qui figure dans le second membre aux n sommets *homologues* d'un sommet choisi à volonté parmi les $p-2$ non communs au proposé.

Écrivons cette égalité successivement pour ces $p-2$ points, et encore pour les deux derniers qui fournissent à cet égard de simples identités. Ajoutant le tout membre à membre, on obtiendra

$$p\Sigma X = \Sigma\Sigma x,$$

ou, en divisant par np,

$$\frac{\Sigma X}{n} = \frac{\Sigma\Sigma x}{np},$$

ce qui démontre la proposition, puisque l'axe des abscisses reste absolument quelconque.

3. Il serait aisé, au moyen d'hypothèses particulières, variées de diverses manières, de constituer certains énoncés plus simples et parfois plus expressifs. Quelques-uns d'entre eux ont même pu déjà se rencontrer, par exemple le suivant.

Faisons $k=1$, de manière à prendre pour cordes les côtés eux-mêmes; et en second lieu $p=3$, en réduisant à des triangles les polygones semblables entre eux. Nous retrouverons ainsi le théorème général de M. Laisant (1).

---

(1) LAISANT, *Sur quelques propriétés des polygones* (*Association française*

4. On peut concevoir que des constructions convenablement imaginées aient pour résultat de réduire indéfiniment les dimensions du système quand on les répète successivement sur les polygones ainsi dérivés les uns des autres, et fassent converger ces derniers vers un point. S'il en est ainsi, ce point, quel que soit le mode de construction capable de cette particularité, ne pourra être que le centre des moyennes distances du polygone proposé.

Je citerai comme exemple cette remarque déjà connue [1] que, si l'on joint ensemble les milieux des côtés d'un polygone, puis les milieux des côtés de cette nouvelle figure, et ainsi de suite indéfiniment, les polygones successifs tendent indéfiniment à se réduire au centre des moyennes distances des sommets du proposé.

---

pour l'avancement des Sciences, Comptes rendus du Congrès du Havre, 1877, p. 144).

Si en outre on aplatit le triangle sur sa base, on obtient une propriété identique pour le polygone formé par les points qui divisent dans un rapport fixe les côtés du polygone; en d'autres termes, pour des mobiles qui décriraient ces côtés uniformément, ou, plus généralement, avec des vitesses constamment proportionnelles à ces côtés, en partant tous à la fois des divers sommets pour atteindre ensemble le sommet suivant. [Laisant, *Sur certaines propriétés des centres de gravité* (*Bulletin de la Société mathématique de France,* 1882, t. X, p. 40). — Laquière, *Sur le théorème de M. Laisant relatif à certaines propriétés du centre de gravité* (*Ibid.,* p. 132). — Resal, Note *Sur la généralisation d'un théorème de Pappus* (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* 2e série, t. XX, p. 337)].

Si l'on fait encore en particulier $n = 3$, en réduisant à un triangle le polygone proposé, l'on retrouve par cette voie un théorème de Pappus.

[1] D'Ocagne, *Sur une suite de polygones tels que chacun d'eux soit formé en joignant les milieux des côtés du précédent* (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles,* 9e année, 1885-1886, p. 237).