

# BULLETIN DE LA S. M. F.

H. DE LA GOUPILLIÈRE

## Théorème sur le centre des moyennes distances

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 21 (1893), p. 5-8

<[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1893\\_21\\_5\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893_21_5_1)>

© Bulletin de la S. M. F., 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>*

## MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

---

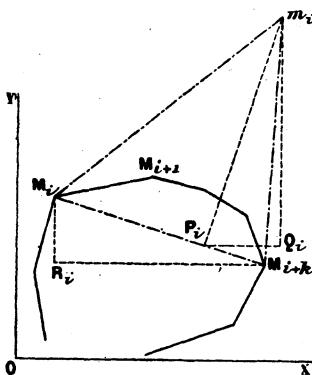
*Théorème sur le centre des moyennes distances;*  
par M. HATON DE LA GOUPILLIÈRE.

1. *Considérant un polygone plan quelconque de  $n$  côtés, on réunit consécutivement ses sommets de  $k$  en  $k$  par des cordes de jonction. Sur ces diverses cordes on construit des polygones de  $p$  côtés, tous semblables entre eux, mais d'ailleurs sans aucune relation avec la forme du proposé. Le centre des moyennes distances des  $np$  sommets de ces  $n$  polygones sera toujours le même que celui des  $n$  sommets du proposé.*

Pour établir cette proposition, commençons par envisager le cas d'un triangle  $M_i m_i M_{i+k}$ , toujours semblable à lui-même, con-

struit sur la corde variable  $M_i M_{i+k}$  du polygone proposé; et rapportons la figure à un système d'axes rectangulaires  $XOY$ .

Fig. 1.



L'abscisse du sommet  $m_i$  de ce triangle sera égale à celle du pied  $P_i$  de sa hauteur  $m_i P_i$ , augmentée de la projection  $P_i Q_i$  de cette hauteur sur l'axe  $OX$ . Le triangle  $M_i m_i M_{i+k}$  restant semblable à un type déterminé, le point  $P_i$  partage sa base  $M_i M_{i+k}$  dans un rapport fixe. Son abscisse peut donc s'exprimer, en fonction de celles  $X_i$ ,  $X_{i+k}$  des extrémités, sous la forme

$$\frac{\alpha X_i + \beta X_{i+k}}{\alpha + \beta}.$$

En second lieu, les triangles  $m_i P_i Q_i$  et  $M_i M_{i+k} R_i$  sont semblables l'un à l'autre, comme ayant leurs côtés respectivement perpendiculaires. Il en résulte que  $P_i Q_i$  est avec  $M_i R_i$ , ou  $Y_i - Y_{i+k}$ , dans le rapport constant de  $m_i P_i$  à  $M_i M_{i+k}$ . On peut donc représenter ce segment par

$$\gamma(Y_i - Y_{i+k}).$$

Il s'ensuit, pour l'abscisse  $x_i$  du point  $m_i$ , l'expression

$$x_i = \frac{\alpha X_i + \beta X_{i+k}}{\alpha + \beta} + \gamma(Y_i - Y_{i+k}).$$

Reproduisons cette équation  $n$  fois, en remplaçant successivement l'indéterminée  $i$  par les nombres  $1, 2, 3, \dots, n$ ; et ajoutons membre à membre. Chaque ordonnée  $Y_j$  apparaîtra deux fois dans le résultat avec les coefficients  $\gamma$  et  $-\gamma$ . Tous les  $Y$  dispa-

raissent par suite identiquement. Chaque abscisse  $X_j$  figurera de son côté deux fois avec les coefficients

$$\frac{\alpha}{\alpha + \beta}, \quad \frac{\beta}{\alpha + \beta},$$

dont la somme se réduit à l'unité. Il vient dès lors simplement

$$x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_n.$$

2. Considérons maintenant un polygone de  $p$  côtés construit sur la corde  $M_i M_{i+k}$ , et réunissons chacun de ses  $p - 2$  sommets  $m_i$ , autres que ceux  $M_i, M_{i+k}$  qui lui sont communs avec le proposé, à ces deux derniers par des droites de jonction. Ces divers points deviendront individuellement les sommets de triangles qui restent semblables à eux-mêmes quand on passe d'une corde à l'autre en faisant varier  $i$ . L'équation précédente leur est donc applicable, et l'on peut écrire en abrégé

$$\Sigma X_i = \Sigma x_i,$$

en étendant par la pensée la somme qui figure dans le second membre aux  $n$  sommets *homologues* d'un sommet choisi à volonté parmi les  $p - 2$  non communs au proposé.

Écrivons cette égalité successivement pour ces  $p - 2$  points, et encore pour les deux derniers qui fournissent à cet égard de simples identités. Ajoutant le tout membre à membre, on obtiendra

$$p \Sigma X = \Sigma \Sigma x,$$

ou, en divisant par  $np$ ,

$$\frac{\Sigma X}{n} = \frac{\Sigma \Sigma x}{np},$$

ce qui démontre la proposition, puisque l'axe des abscisses reste absolument quelconque.

3. Il serait aisé, au moyen d'hypothèses particulières, variées de diverses manières, de constituer certains énoncés plus simples et parfois plus expressifs. Quelques-uns d'entre eux ont même pu déjà se rencontrer, par exemple le suivant.

Faisons  $k = 1$ , de manière à prendre pour cordes les côtés eux-mêmes; et en second lieu  $p = 3$ , en réduisant à des triangles les polygones semblables entre eux. Nous retrouverons ainsi le théorème général de M. Laisant <sup>(1)</sup>.

---

(1) LAISANT, *Sur quelques propriétés des polygones* (Association française

4. On peut concevoir que des constructions convenablement imaginées aient pour résultat de réduire indéfiniment les dimensions du système quand on les répète successivement sur les polygones ainsi dérivés les uns des autres, et fassent converger ces derniers vers un point. S'il en est ainsi, ce point, quel que soit le mode de construction capable de cette particularité, ne pourra être que le centre des moyennes distances du polygone proposé.

Je citerai comme exemple cette remarque déjà connue (<sup>1</sup>) que, si l'on joint ensemble les milieux des côtés d'un polygone, puis les milieux des côtés de cette nouvelle figure, et ainsi de suite indéfiniment, les polygones successifs tendent indéfiniment à se réduire au centre des moyennes distances des sommets du proposé.

---

pour l'avancement des Sciences, *Comptes rendus du Congrès du Havre*, 1877, p. 144).

Si en outre on aplatis le triangle sur sa base, on obtient une propriété identique pour le polygone formé par les points qui divisent dans un rapport fixe les côtés du polygone; en d'autres termes, pour des mobiles qui décriraient ces côtés uniformément, ou, plus généralement, avec des vitesses constamment proportionnelles à ces côtés, en partant tous à la fois des divers sommets pour atteindre ensemble le sommet suivant. [LAISANT, *Sur certaines propriétés des centres de gravité* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1882, t. X, p. 40). — LAQUIÈRE, *Sur le théorème de M. Laisant relatif à certaines propriétés du centre de gravité* (*Ibid.*, p. 132). — RESAL, *Note Sur la généralisation d'un théorème de Pappus* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2<sup>e</sup> série, t. XX, p. 337)].

Si l'on fait encore en particulier  $n = 3$ , en réduisant à un triangle le polygone proposé, l'on retrouve par cette voie un théorème de Pappus.

(<sup>1</sup>) D'OCAGNE, *Sur une suite de polygones tels que chacun d'eux soit formé en joignant les milieux des côtés du précédent* (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, 9<sup>e</sup> année, 1885-1886, p. 237).