BULLETIN DE LA S. M. F.

SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 21 (1893), p. 145-150

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1893__21__145_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1893, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 DÉCEMBRE 1893.

PRÉSIDENCE DE M. POINCARÉ.

Communications :

M. Laisant : *Un théorème général de Mécanique.*

M. Lancelin : *Sur les lignes asymptotiques de certaines surfaces.*

M. d'Ocagne : *Un abaque général de la Trigonométrie sphérique.*

M. Carvallo : *Un théorème général de Statique.*

M. Fouret : *Sur le mouvement d'un point soumis à l'action d'une force qui rencontre constamment deux droites fixes.*

M. Max Genty adresse la Communication suivante :

Sur un théorème de Laguerre.

Laguerre a proposé dans les *Nouvelles Annales* (question n° 1484) le problème suivant :

On donne sur une droite deux systèmes de trois points a, a', a'' et b, b', b'' qui font partie d'une division homographique. Sur ab comme diamètre on décrit un cycle C *dont le sens est déterminé par la condition qu'au-dessus de la droite le point décrivant aille de a en b; les segments $a'b'$ et $a''b''$ déterminent de même deux autres cycles* C′ *et* C″. *Si l'on trace un cycle tangent à* C, C′ *et* C″, *démontrer que les points où il coupe la droite sont les deux points doubles de la division homographique.*

M. Laisant, dans son *Recueil de problèmes de Mathématiques*, reproduit cette même question comme n'ayant reçu aucune solution. Je me propose, dans cette Note, de démontrer élémentairement la propriété énoncée.

Soient u la droite donnée et e, f les deux points doubles des divisions homographiques déterminées par les trois couples de points correspondants (a, b), (a', b') et (a'', b''). D'après une propriété connue, ces deux points e et f sont des points conjugués de l'involution I'' définie par les deux couples de points conjugués (a, b') et (b, a'). Ces points forment également un couple dans l'involution I' déterminée par les deux couples de points (a, b'') et (b, a''). Pour construire les points doubles des deux divisions homographiques données, il suffit donc, d'après cette remarque, de déterminer le couple de points conjugués commun aux deux involutions I' et I''. Ceci posé, le point central de l'involution I' est un point S' de la droite u déterminé par la relation métrique

$$S'a\, S'b'' = S'b\, S'a''.$$

Ce point S' est, d'après cette égalité, le centre de similitude des deux cycles C et C″. Il s'ensuit que par un couple quelconque de points de l'involution I' on pourra faire passer un cycle tangent aux deux cycles C et C″. Le point central de l'involution I'' étant de même le point S'', centre de similitude des deux cycles C et C′, on pourra, par un couple de points de cette involution, mener un cycle tangent à C et à C′. Or, comme nous l'avons vu plus haut, les points e et f forment un couple de points conjugués commun aux deux involutions considérées. Il suit de là que, si par ces deux points nous menons un cycle Γ tangent au cycle C par exemple, ce cycle Γ sera également tangent à C′ et à C″. Les points doubles des deux divisions homographiques données s'obtiendront donc en prenant l'intersection de la droite u avec un des deux cycles Γ tangents aux trois cycles C, C′ et C″. Les deux cycles Γ que l'on peut ainsi construire sont symétriques par rapport à la droite u et la coupent aux deux mêmes points.

M. S. Mangeot adresse la Communication suivante :

Sur une propriété des surfaces de symétrie d'une quadrique.

On peut se demander quelles sont les surfaces U qui admettent toutes les surfaces de symétrie V d'une quadrique donnée W.

Le lieu des symétriques d'un point pris sur une surface U par rapport à toutes les surfaces V est une surface qui doit avoir une partie commune avec U. D'un autre côté, ce lieu est l'une des quadriques homothétiques et concentriques à W, car celles-ci sont symétriques aussi par rapport aux surfaces V : donc la surface U est formée par une ou plusieurs de ces quadriques. Ainsi il n'existe pas d'autres surfaces ayant toutes les surfaces de symétrie d'une quadrique que les quadriques concentriques et homothétiques à celle-ci.

D'après les formules que j'ai fait connaître ([1]) pour la détermination des surfaces de symétrie des quadriques, ce résultat peut s'énoncer ainsi :

Les seules surfaces qui soient symétriques par rapport à chacune des surfaces de l'une des classes

$$\varphi\left(\frac{x^a}{z^c}, \frac{y^b}{z^c}\right) = 0, \qquad \varphi\left(\frac{x^a}{e^z}, \frac{y^b}{e^z}\right) = 0,$$

$$\varphi\left(x, \frac{y^b}{z^c}\right) = 0; \qquad \varphi\left(x, \frac{y^b}{e^z}\right) = 0$$

sont respectivement les quadriques

$$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = \lambda, \qquad \frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} + 2z = \lambda,$$

$$\frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{c} = \lambda, \qquad \frac{y^2}{b} + 2z = \lambda;$$

a, b, c désignant trois nombres donnés, λ un paramètre et φ une fonction arbitraire.

SÉANCE DU 20 DÉCEMBRE 1893.

PRÉSIDENCE DE M. TOUCHE.

Communications :

M. Raffy : *Sur certaines fonctions analytiques d'une variable complexe.*

M. Fouret : *Sur un mode de génération du complexe linéaire.*

([1]) Thèse de doctorat. Gauthier-Villars, 1890.

M. Touche : *Du mouvement relatif des corps plongés dans un fluide.*

M. Antomari : *Sur certaines équations aux dérivées partielles du second ordre réductibles à la forme linéaire.*

M. Max Genty adresse la Communication suivante :

Des suites cyclo-projectives de deuxième espèce.

1. Soient deux ponctuelles projectives et superposées u, u_1, dont les points doubles sont e et f. Formons la suite des points $m, m_1, m_2, \ldots, m_i, \ldots$, telle que m_i est le point de u_1 homologue du point m_{i-1} de u. Nous savons que si les points e et f sont imaginaires conjugués, et le rapport anharmonique $(efmm_1)$ égal à une racine imaginaire $n^{\text{ième}}$ de l'unité, la suite (m) obtenue sera périodique de n en n; M. Clebsch définit une telle suite sous le nom de *suite cyclo-projective* d'ordre n. Nous nous proposons, dans cette Communication, de rechercher s'il existe et si l'on peut construire des systèmes périodiques analogues dans les formes de deuxième espèce.

2. Soient donc deux systèmes plans collinéaires Σ et Σ_1 dont les points doubles forment le triangle efg. Formons la suite projective des points m_i telle que m_i est le point de Σ_1 homologue du point m_{i-1} de Σ, et désignons, pour abréger, par (m) la série de points ainsi obtenue, en partant du point initial m. Supposons que nous projetions sur un même plan les systèmes Σ et Σ_1, en F et F_1, de telle façon que les projections des points f et g soient les points cycliques de ce plan. Les deux systèmes F et F_1 sont alors semblables et le point e est projeté au centre de similitude ω de ces deux figures. Si μ_i est la projection du point m_i, on reconnaît facilement que ce point s'obtient en construisant sur $\omega\mu_{i-1}$ un triangle semblable à un triangle donné. On a donc la relation angulaire

$$\widehat{\mu_{i-1} O \mu_i} = \alpha$$

et la relation métrique

$$O\mu_i = a\, O\mu_{i-1},$$

a et α étant des quantités données.

3. Nous supposerons d'abord que a est une quantité différente de l'unité. Tous les points μ_i obtenus en partant du point initial μ, forment la suite (μ), projection de la suite (m), et sont évidemment situés sur une même spirale logarithmique ayant le point O pour pôle.

Nous en déduisons donc, par projection, que les points de la suite (m) sont situés, en général, sur une courbe transcendante S, projection de la spirale logarithmique, et admettant, par conséquent, les trois points e, f, g comme points asymptotiques. La spirale logarithmique coupant tous les rayons vecteurs issus du pôle sous un angle constant, la courbe S peut se définir de la façon suivante : elle est telle que si p est un de ces points et pt la tangente correspondante, le rapport anharmonique $p(efgt)$ est constant et égal à k, lorsque le point p se déplace sur la courbe. Chaque suite (m) détermine une courbe S; toutes les courbes correspondantes aux différentes positions initiales du point m et pour lesquelles k a la même valeur forment un système dont les caractéristiques sont $\mu = 1$, $\nu = 1$ et qui est défini par une équation différentielle de Jacobi, admettant le triangle efg comme triangle fondamental. Toutes ces courbes sont, du reste, les seules qui se transforment en elles-mêmes dans la collinéation des deux systèmes plans Σ et Σ_1, c'est-à-dire qu'elles sont anallagmatiques dans cette transformation.

4. Supposons maintenant $a = 1$, l'angle α restant toujours quelconque; les points (μ) sont alors situés sur le cercle C ayant ω pour centre et $\omega\mu$ pour rayon. Les points correspondants (m) sont donc situés sur une conique Γ_e tangente en f et g aux droites ef et eg; ces points forment du reste sur Γ_e une suite projective de première espèce dont f et g sont les points doubles. Le système des courbes S se résout, dans ce cas, dans le faisceau des coniques Γ_e. Nous pourrons toujours, étant donnés le triangle efg et un point m de Σ, déterminer une triple infinité de points m, tels que les points de la suite (m) obtenue en partant des points initiaux m et m_1 soient situés sur une même conique; il suffira, en effet, de prendre le point m sur une des trois coniques des faisceaux Γ_e, Γ_f, Γ_g, passant par m. La collinéation des deux systèmes plans Σ et Σ_1 étant déterminée par le triangle efg et la correspondance

des points m et m_1 situés, par exemple, sur une conique du faisceau Γ_f; si nous formons la suite (n) en partant d'un point initial absolument quelconque n, les points obtenus seront également tous situés sur une quelconque des coniques du faisceau Γ_f. Ce que nous venons de dire n'implique pas la réalité des trois points e, f, g; nous pouvons supposer que le point e seul est réel, les deux autres étant imaginaires conjugués. Dans ce cas, la conique Γ_e est la seule réelle et constructible, les deux autres sont imaginaires.

5. Si $a = 1$, $\alpha = \frac{2k\pi}{n}$, k étant un entier quelconque premier avec n, la suite (μ) correspondante est périodique de n en n, et les n points distincts ainsi obtenus sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés inscrit dans le cercle décrit du point ω comme centre avec $\omega\mu$ pour rayon. La suite (m) sera donc également périodique de n en n, et formera ce que nous appelons une suite cyclo-projective de deuxième espèce. Tous ces points sont du reste situés sur une conique Γ_e et y forment une suite cyclo-projective de première espèce dont f et g sont les points doubles; ceci exige tout d'abord, comme on le voit immédiatement, que les points f et g soient imaginaires conjugués. Nous pourrons toujours, étant donné le triangle efg, dont les deux sommets f et g sont imaginaires conjugués, et un point m de Σ, déterminer le point m_1, homologue dans Σ_1, de telle façon que la suite (m) obtenue en partant des points initiaux m et m_1 soit une suite cyclo-projective d'ordre n. Décrivons en effet la conique du faisceau Γ_e passant par m, et prenons sur cette courbe un point m_1, tel que le rapport anharmonique $(fgmm_1)$ soit, sur la conique, égal à une racine imaginaire $n^{\text{ième}}$ de l'unité négative; un des points m_1 ainsi obtenus résoudra le problème.

La possibilité et la construction des suites cyclo-projectives de deuxième espèce sont donc parfaitement acquises et c'était là le but principal de cette Note. Nous rechercherons, dans une autre Communication, s'il existe des suites analogues pour les formes de troisième espèce.