BULLETIN DE LA S. M. F.

BLUTEL

Sur les fonctions rationnelles des racines d'une équation entière

Bulletin de la S. M. F., tome 20 (1892), p. 92-96
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1892__20__92_0>

Sur les fonctions rationnelles des racines d'une équation entière; par M. Blutel.

Théorème I. — *Toute fonction entière $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ des racines d'une équation*

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m = 0,$$

à coefficients quelconques, peut se mettre sous forme d'une fonction entière par rapport aux coefficients de cette équation, *et par rapport à $m - 1$ racines $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, cette nouvelle fonction étant de degré p par rapport à x_{m-p}. Cette transformation n'est possible que d'une seule façon.*

Démontrons d'abord la première partie du théorème pour une fonction entière $f(x_1, x_2)$ des racines d'une équation du second degré

$$x^2 + p_1 x + p_2 = 0.$$

Si l'on tient compte de la relation $x_1 + x_2 + p_1 = 0$, on obtient

$$f(x_1, x_2) = f(x_1, -p_1 - x_1).$$

Cette dernière fonction, où l'on remplacerait x_1^2 autant de fois que possible par $-(p_1 x_1 + p_2)$, prendrait finalement la forme $a + x_1 b$, où a et b sont des fonctions entières de p_1 et p_2.

Supposons donc la propriété démontrée pour une équation de degré $m - 1$ et cherchons à l'étendre à une équation de degré m. Soit une fonction entière $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ des racines d'une équation entière

$$x^m + p_1 x^{m-1} + p_2 x^{m-2} + \ldots + p_m = 0.$$

On peut la regarder simplement comme une fonction entière de $x_2, x_3, \ldots, x_m$ qui sont les racines de l'équation

$$\begin{aligned} x^{m-1} + (x_1 + p_1)x^{m-2} + (x_1^2 + p_1 x_1 + p_2)x^{m-3} + \ldots \\ + x_1^{m-1} + p_1 x_1^{m-2} + \ldots + p_{m-1} = 0. \end{aligned}$$

Comme telle, elle se mettra sous forme d'une fonction entière des coefficients de cette équation et, par suite, de $x_1, p_1, p_2, \ldots, p_{m-1}$, fonction entière aussi par rapport à $x_2, x_3, \ldots, x_{m-1}$ et de degré $m - 2$ par rapport à x_2, de degré $m - 3$ par rapport à x_3, etc.

Soit

$$f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, p_1, p_2, \ldots, p_{m-1})$$

cette nouvelle fonction; en tenant compte de la relation

$$x_1^m + p_1 x_1^{m-1} + \ldots + p_m = 0,$$

on la ramènera à ne contenir x_1 qu'au degré $m - 1$, et l'on aura alors la forme énoncée. Nous verrons plus loin que cette forme ne peut s'obtenir que d'une seule façon.

Il résulte immédiatement de là que toute fonction rationnelle

$$\frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{F(x_1, x_2, \ldots, x_m)}$$

peut se mettre sous la forme

$$\frac{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, p_1, p_2, \ldots, p_m)}{F_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, p_1, p_2, \ldots, p_m)},$$

où les fonctions f_1 et F_1 possèdent les propriétés énoncées dans le théorème précédent.

Théorème II. — *Si la fonction rationnelle*

$$R = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{F(x_1, x_2, \ldots, x_m)}$$

est une fonction symétrique, les deux polynômes f_1 et F_1 de la remarque précédente regardés comme fonctions entières de $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$, dont les coefficients sont des polynômes par rapport à $p_1, p_2, \ldots, p_m$, ont leurs coefficients proportionnels et la valeur de la fonction symétrique est égale au rapport de deux coefficients correspondants.

Dans le cas de deux racines, on a

$$R = \frac{f(x_1, x_2)}{F(x_1, x_2)} = \frac{a(p_1, p_2) + x_1 b(p_1, p_2)}{A(p_1, p_2) + x_1 B(p_1, p_2)}.$$

Cette fonction rationnelle du premier degré par rapport à x_1 conserve la même valeur si l'on remplace x_1 par x_2, à cause de la symétrie de R; cet échange n'altère d'ailleurs pas les valeurs de p_1 et p_2 ni, par suite, les coefficients a, b, A, B.

On en conclut qu'elle est indépendante de x_1 et, par suite, que

$$\frac{a(p_1, p_2)}{A(p_1, p_2)} = \frac{b(p_1, p_2)}{B(p_1, p_2)} = R.$$

Dans le cas général, on a

$$R = \frac{f(x_1, x_2, \ldots, x_m)}{F(x_1, x_2, \ldots, x_m)} = \frac{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})}{F_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1})}$$
$$= \frac{a(x_1, x_2, \ldots, x_{m-2}) + x_{m-1} b(x_1, x_2, \ldots, x_{m-2})}{A(x_1, x_2, \ldots, x_{m-2}) + x_{m-1} B(x_1, x_2, \ldots, x_{m-2})},$$

a, b, A, B étant aussi des fonctions entières de $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Puisque R est une fonction symétrique, elle ne change pas si l'on y remplace x_{m-1} par x_m, échange qui ne modifie pas p_1, $p_2, \ldots, p_m$ ni, par suite, les fonctions a, b, A, B. On en conclut, comme plus haut, que l'on a

$$R = \frac{a(x_1, x_2, \ldots, x_{m-2})}{A(x_1, x_2, \ldots, x_{m-2})} = \frac{b(x_1, x_2, \ldots, x_{m-2})}{B(x_1, x_2, \ldots, x_{m-2})}.$$

Chacun de ces nouveaux rapports est de la forme

$$\frac{u(x_1, x_2, \ldots, x_{m-3}) + x_{m-2}v(x_1, x_2, \ldots, x_{m-3}) + x_{m-2}^2 w(x_1, x_2, \ldots, x_{m-3})}{U(x_1, x_2, \ldots, x_{m-3}) + x_{m-2}V(x_1, x_2, \ldots, x_{m-3}) + x_{m-2}^2 W(x_1, x_2, \ldots, x_{m-3})}.$$

Leur valeur ne change pas, si l'on y remplace x_{m-2} successivement par x_{m-1} et par x_m, à cause de la symétrie de R; comme ils sont du second degré seulement par rapport à x_{m-2}, on en conclut qu'ils n'en dépendent pas, c'est-à-dire que l'on a

$$R = \frac{u}{U} = \frac{v}{V} = \frac{w}{W}$$

et trois autres égalités semblables.

La même démonstration peut évidemment se répéter de proche en proche, et l'on aura finalement pour R une suite de rapports dont les termes ne dépendent plus, en dehors de $p_1, p_2, \ldots, p_m$, que de la seule racine x_1 qu'ils renferment au degré $m-1$; comme ils conservent la même valeur lorsqu'on y remplace x_1 successivement par les $m-1$ autres racines, on conclut qu'ils ne renferment pas x_1, ce qui démontre le théorème.

Conséquences. — 1° Toute fonction rationnelle symétrique peut se mettre sous la forme

$$\frac{\omega(p_1, p_2, \ldots, p_m)}{\Omega(p_1, p_2, \ldots, p_m)},$$

ω et Ω désignant deux polynômes; elle peut donc être regardée comme un quotient de deux polynômes symétriques par rapport aux racines $x_1, x_2, \ldots, x_m$.

2° On peut remarquer aussi que si une fonction entière

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

est symétrique et si on la met sous la *forme réduite* indiquée dans le théorème I, elle se réduira à son terme indépendant de x_1, $x_2, \ldots, x_{m-1}$. En effet, on peut la regarder comme une fonction rationnelle symétrique dont le dénominateur est 1; appliquant le théorème II, on voit que les coefficients des divers termes renfermant $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$ au numérateur de la forme réduite sont tous nuls.

On déduit de là un perfectionnement important à la méthode de Cauchy pour le calcul des fonctions symétriques entières.

On commencera par faire disparaître dans la fonction symétrique une racine quelconque x_m par exemple, puis on ramènera la fonction à ne plus contenir une autre racine x_{m-1} qu'au premier degré; ce résultat obtenu, on négligera tous les termes renfermant x_{m-1}. On ramènera la fonction restante à ne plus contenir une nouvelle racine x_{m-2} qu'au second degré, puis on négligera tous les termes renfermant encore x_{m-2}, etc.

3° La réduction d'une fonction entière quelconque

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

n'est possible que d'une seule façon.

Si l'on avait en effet de deux façons différentes

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, p_1, p_2, \ldots, p_m),$$
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = f'_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, p_1, p_2, \ldots, p_m),$$

on aurait

$$R = 1 = \frac{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, p_1, p_2, \ldots, p_m)}{f'_1(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, p_1, p_2, \ldots, p_m)}.$$

L'application du théorème II à cette fonction symétrique montre qu'il y a bien égalité entre les coefficients des deux fonctions f_1 et f'_1 regardées comme polynômes par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}$.