G. FOURET

Sur le rayon de courbure des courbes triangulaires et des courbes tétraédrales symétriques

Bulletin de la S. M. F., tome 20 (1892), p. 60-64
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1892__20__60_0>

Sur le rayon de courbure des courbes triangulaires et des courbes tétraédrales symétriques; par M. G. Fouret.

1. M. Jamet a fait connaître en 1887 (¹) une propriété intéressante du rayon de courbure de deux classes de courbes, déjà étudiées antérieurement par de La Gournerie (²), sous le nom de *courbes triangulaires symétriques* et de *courbes tétraédrales symétriques*.

Les premières, rapportées à un triangle de référence convenablement choisi, ont une équation ponctuelle de la forme

$$Ax^n + By^n + Cz^n = 0.$$

L'exposant n, qui peut être quelconque, positif ou négatif, est appelé l'*exposant de la courbe*. Le triangle de référence a reçu le nom de *triangle de symétrie de cette courbe*.

Les courbes de la seconde classe résultent de l'intersection de deux surfaces qui, rapportées à un même tétraèdre de référence convenablement choisi, ont respectivement pour équations ponctuelles des équations de la forme

$$\begin{aligned} Ax^n + By^n + Cz^n + Dt^n &= 0, \\ A'x^n + B'y^n + C'z^n + D't^n &= 0. \end{aligned}$$

Ces équations définissent chacune une surface appelée par de La Gournerie *surface tétraédrale symétrique*. Le nombre n, d'ailleurs positif ou négatif, est en même temps l'exposant de ces surfaces et l'exposant de la courbe tétraédrale symétrique, qui en est l'intersection. Le tétraèdre de référence est appelé *tétraèdre de symétrie de la courbe*.

2. Je me propose de démontrer ici, par des considérations géométriques fort simples, deux théorèmes auxquels M. Jamet est parvenu, en suivant la voie analytique (³). Je vais m'appuyer pour cela sur la remarque suivante, qui résulte d'une formule élé-

---

(¹) *Annales de l'École Normale supérieure*, 3ᵉ série, t. IV, supplément, p. 19.

(²) *Recherches sur les surfaces tétraédrales symétriques* (année 1867).

(³) J'ai déjà fait une première Communication verbale sur ce même sujet dans la séance du 7 mai 1890.

gante [1] due à M. le général Peaucellier, mais que j'établirai directement.

En transformant par homographie l'ensemble de deux courbes tangentes dans un même plan, on n'altère pas le rapport des rayons de courbure de ces deux courbes en leur point de contact.

Soient, dans un plan,

(C) et (C′) deux courbes tangentes en un certain point m,
(O) et (O′) les cercles respectivement osculateurs à ces deux courbes en m,
R et R′ les rayons respectifs de ces cercles.

Ces cercles peuvent être considérés comme homothétiques, le centre d'homothétie étant le point m et le rapport d'homothétie étant égal à $\frac{R}{R'}$.

Faisons subir à la figure une transformation homographique quelconque. Les courbes (C) et (C′) deviennent deux nouvelles courbes (Γ) et (Γ′) tangentes au point μ, homologue de m. Les cercles (O) et (O′) se changent respectivement en deux coniques (Ω) et (Ω′) osculatrices en μ, la première à la courbe (Γ), la seconde à la courbe (Γ′). Ces deux courbes sont homologiques; elles ont le point μ pour centre d'homologie, et pour axe d'homologie la droite Δ, à laquelle correspond, dans la figure primitive, la droite de l'infini.

Par le point μ faisons passer une droite Λ infiniment voisine de la tangente en ce point aux deux coniques (Ω) et (Ω′); la droite Λ coupe respectivement les deux courbes en deux points α et α' infiniment voisins de μ. Si ν est le point de rencontre de la sécante considérée avec Δ, on a évidemment

$$(1)\qquad \frac{\mu\alpha}{\mu\alpha'} : \frac{\nu\alpha}{\nu\alpha'} = \frac{ma}{ma'} = \frac{R}{R'},$$

a et a' étant les seconds points d'intersection des cercles (O) et

---

[1] *Relation entre les rayons de courbure d'une courbe et de sa perspective,* par M. Peaucellier, capitaine du Génie (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1re série, t. XX, p. 427).

(O') avec la droite L de la première figure qui correspond à la droite Λ de la seconde.

Considérons maintenant deux cercles (ω) et (ω') tangents en μ à (Ω) et (Ω') et passant le premier par le point α, le second par le point α'. Ces cercles, lorsque α et α' viennent coïncider avec μ, deviennent respectivement les cercles osculateurs en μ aux coniques (Ω) et (Ω'), par conséquent aux courbes (Γ) et (Γ'). En désignant par ρ et ρ' les rayons de ces cercles osculateurs, on a

$$\frac{\rho}{\rho'} = \lim. \frac{\mu\alpha}{\mu\alpha'}, \tag{2}$$

et, en observant que $\frac{\nu\alpha}{\nu\alpha'}$ tend vers 1, on conclut de la comparaison des relations (1) et (2)

$$\frac{\rho}{\rho'} = \frac{R}{R'}.$$

3. *Remarque*. — Deux courbes gauches ayant, en un point commun, même tangente et même plan osculateur, se transforment par homographie en deux courbes gauches ayant, en un même point, même tangente et même plan osculateur. On peut, d'ailleurs, répéter identiquement les raisonnements qui viennent de nous servir dans le cas des courbes planes; de sorte que l'on peut énoncer ce théorème :

En transformant par homographie l'ensemble de deux courbes qui ont, en un point commun, même tangente et même plan osculateur, on n'altère pas le rapport des rayons de courbure de ces deux courbes en leur point de contact.

4. Considérons la courbe définie, en coordonnées polaires, par l'équation

$$r^n \cos n\theta = k \tag{3}$$

ou, en coordonnées cartésiennes, par l'équation

$$(x + iy)^n + (x - iy)^n = 2k. \tag{4}$$

Une pareille courbe, comme le montre l'équation (4), est une courbe triangulaire symétrique, dont le triangle de symétrie a pour sommets l'origine des coordonnées O et les points cycliques I et J, par lesquels passent à l'infini tous les cercles du plan.

On sait, d'autre part, et l'on démontre aisément, au moyen de l'équation (3), que *le rayon de courbure* R *en un point* M *quelconque de la courbe ainsi définie est dans un rapport constant, égal à* $\frac{1}{1-n}$, *avec le segment de la normale correspondante compris entre le point* M *et le point d'intersection* N *de la perpendiculaire élevée en* O *à* OM.

Mais on peut interpréter d'une autre manière cette propriété, en remarquant que MN est le diamètre du cercle passant par le point O et tangent en M à la courbe (3). En désignant par R′ le rayon de ce cercle, on a

$$(5) \qquad \frac{R}{R'} = \frac{2}{1-n}.$$

5. Faisons maintenant subir une transformation homographique imaginaire à la figure précédente. En choisissant convenablement cette transformation, on changera la courbe (3) en l'une quelconque des courbes triangulaires symétriques d'exposant n. Le cercle décrit sur MN, comme diamètre, deviendra une conique tangente à la courbe triangulaire et circonscrite à son triangle de symétrie. Enfin le rapport des rayons de courbure, en leur point de contact, de la courbe triangulaire et de la conique qui vient d'être définie, n'étant pas altéré par la transformation (art. 2), ce rapport, en vertu de la relation (5), sera égal à $\frac{2}{1-n}$. Ainsi se trouve démontré le théorème suivant dû à M. Jamet :

Le rayon de courbure, en un point quelconque, d'une courbe triangulaire symétrique d'exposant n, est dans un rapport constant, égal à $\frac{2}{1-n}$, avec le rayon de courbure, au même point, de la conique tangente en ce point à la courbe et circonscrite au triangle de symétrie.

La construction du rayon de courbure d'une courbe triangulaire symétrique se trouve ainsi ramenée à la construction du rayon de courbure en un point d'une conique dont on connaît la tangente en ce point et trois autres points. J'ai traité cette question précédemment (1); je n'y reviendrai pas ici.

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. CX, p. 778. *Voir* également

6. Considérons une courbe tétraédrale symétrique d'exposant quelconque n. M. Jamet a démontré que *la cubique gauche tangente, en un point quelconque, à une pareille courbe et passant par les sommets de son tétraèdre de symétrie a, au point de contact, même plan osculateur que cette courbe.*

Il résulte de là, en vertu d'une remarque précédente (art. 3), que le rapport des rayons de courbure de la courbe tétraédrale et de la cubique ainsi déterminée se conserve dans une transformation homographique quelconque. Faisons, en particulier, une perspective de la figure sur l'une des faces du tétraèdre de symétrie, en prenant comme centre de projection le sommet opposé de ce tétraèdre. La courbe tétraédrale d'exposant n se projette suivant une courbe triangulaire symétrique d'exposant n, la cubique suivant une conique tangente à cette courbe et circonscrite à son triangle de symétrie. Or les rayons de courbure de ces deux dernières courbes sont dans un rapport constant et égal à $\frac{2}{1-n}$ (art. 5). Donc il en est de même du rapport des rayons de courbure de la courbe tétraédrale et de la cubique. De là ce théorème, dû également à M. Jamet :

Le rayon de courbure, en un point quelconque, d'une courbe tétraédrale symétrique d'exposant n, est dans un rapport constant, égal à $\frac{2}{1-n}$, avec le rayon de courbure, au même point, de la cubique gauche tangente en ce point à la courbe et passant par les sommets du tétraèdre de symétrie.

Les considérations dont je viens de faire usage dans le dernier paragraphe de la présente Note sont empruntées à une Communication faite par M. Demoulin, dans la séance du 4 mai dernier. Je les ai reproduites ici, parce qu'elles m'ont paru ajouter à l'intérêt de la question que je me suis proposé de traiter; mais j'en laisse tout le mérite à ce jeune géomètre distingué.

---

ment sur ce sujet deux Notes de M. Mannheim (*Comptes rendus,* t. LXXX, p. 619, et *Bulletin de la Société mathématique,* t. XVIII, p. 155).