BULLETIN DE LA S. M. F.

E. LEMOINE

Application de la géométrographie à l'examen de diverses solutions d'un même problème

Bulletin de la S. M. F., tome 20 (1892), p. 132-150
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1892__20__132_1>

Application de la Géométrographie à l'examen de diverses solutions d'un même problème; par M. Em. Lemoine.

M. *d'Ocagne,* ingénieur-adjoint à l'ingénieur en chef chargé du Service du nivellement général de la France, a eu à s'occuper, à propos de son service, de la question suivante :

n droites qui devraient concourir en un même point sont déterminées expérimentalement et, par suite, ne concourent pas exactement; trouver le point le plus probable de leur intersection commune.

A une séance de la *Société mathématique* (fin de 1891), M. *d'Ocagne* a traité le problème, et nous admettons, avec lui, dans ce qui suit, que le point le plus probable est le point tel que la somme des carrés de ses distances aux *n* droites soit un minimum.

Dans le cas où *n* serait égal à 3, ce serait donc le point de *Lemoine* du triangle formé par ces trois droites.

La construction que M. *d'Ocagne* indiqua alors pour obtenir ce point lui paraissant un peu compliquée, il en donna, à une autre séance, une modification qui la rendait plus simple et que j'appellerai *la construction* A.

M. *Laisant*, qui avait assisté à ces Communications, s'occupa également du problème et, à une troisième séance, présenta une autre construction que j'appellerai *la construction* B.

M. *d'Ocagne* fit ensuite à l'Académie des Sciences, par l'intermédiaire de M. *Bouquet de la Grye*, une Communication dans laquelle il fit connaître une nouvelle construction simplifiant beaucoup, *croyait-il*, celle qu'il avait donnée et que j'appellerai *la construction* C.

J'eus l'idée de comparer, par ma méthode de mesure de la simplicité des constructions, dont j'ai déjà indiqué ici les éléments (voir *Bulletin de la Société mathématique*, p. 162; séance du 4 juillet 1888), ces trois solutions pour évaluer leurs simplicités relatives lorsqu'il s'agit de les construire effectivement, évaluation dont le résultat n'a, le plus souvent, qu'un rapport fort éloigné avec la simplicité appréciée d'après l'exposé plus ou moins élégant et court de la solution et c'est le seul genre de simplicité dont les géomètres se soient occupés jusqu'ici; j'écrivis alors à M. *d'Ocagne* pour avoir quelques renseignements y relatifs, et, dans sa réponse, il me fit connaître une dernière solution dont la construction lui paraissait plus simple encore; nous l'appellerons *la construction* D. Il communiqua la construction D à la Société (séance du 2 novembre 1892).

Le but de cette Note est de donner, comme exemple de l'emploi de la méthode que nous avons imaginée, la mesure de la simplicité *théorique* de chacune des constructions A, B, C, D, afin de reconnaître quelle est celle qui est réellement la plus simple, le compas à la main, toutes choses égales d'ailleurs.

Pour permettre de nous suivre sans difficulté, nous donnerons d'abord le symbole de toutes celles des constructions fondamentales de la Géométrie qui nous serviront dans les évaluations particulières que nous allons faire.

Nous rappelons les notations que nous avons adoptées pour désigner les éléments irréductibles des constructions :

Mettre le bord de la règle sur un point : R_1; par suite, sur deux points : $2R_1$; tracer une droite : R_2.

Mettre *une* pointe du compas sur un point donné : C_1; par suite, chaque pointe sur un point : $2C_1$.

Mettre une pointe sur un point indéterminé d'une ligne donnée : C_2.

Tracer un cercle : C_3.

Toute opération géométrique de la règle et du compas est donc représentée par

$$\text{Op.} : (m_1 R_1 + m_2 R_2 + n_1 C_1 + n_2 C_2 + n_3 C_3),$$

$m_1 + m_2 + n_1 + n_2 + n_3$ ou le nombre d'opérations élémentaires irréductibles est ce que nous appelons le *coefficient de Simplicité* ou, pour abréger, *la Simplicité;* $m_1 + n_1 + n_2$ est le *coefficient d'Exactitude* ou, pour abréger, *l'Exactitude;*

m_2 le nombre de droites, n_3 le nombre de cercles tracés.

Rappelons encore qu'il s'agit d'une simplicité théorique où les difficultés *matérielles* provenant des dimensions des données, de celles de la feuille d'épure, des instruments, des angles sous lesquels se coupent les droites, les cercles, etc. n'existent pas. Notre méthode, s'il m'est permis de prendre aussi haut nos comparaisons, est à la construction réelle à peu près ce que la Mécanique rationnelle est à la Mécanique pratique.

Pour abréger l'écriture, nous convenons que

$$M(R) \quad \text{ou} \quad M(AB)$$

signifiera le cercle qui a pour centre M et pour rayon R ou AB.

Op. : est l'abrégé du mot opération.

I. *Tracer une droite passant par deux points placés.* Op. : $(2R_1 + R_2)$.

II. *Prendre avec le compas la longueur d'une ligne donnée* .... Op. : $(2C_1)$.

III. *Tracer un cercle quelconque :*

1° *De centre donné*........... Op. : $(C_1 + C_3)$.
2° *De centre et de rayon donnés.* Op. : $(3C_1 + C_3)$.

IV. *Placer, par rapport à une droite* D, *le point symétrique* A' *d'un point* A.

Je trace A(R), R étant quelconque, qui coupe D en B et C............................ Op. : $(C_1 + C_3)$.
Je trace B(R), C(R) qui se coupent en A'.

Op. : $(2C_1 + 2C_3)$.

Op. : $(3C_1 + 3C_3)$.

Simplicité : 6; exactitude : 3; 3 cercles.

V. *Placer le sommet* b *d'un parallélogramme* ObAC *connaissant* O, A, B; OA, OB *étant deux côtés, tracés ou non, du parallélogramme.*

Je trace A(OB)................ Op. : $(3C_1 + C_3)$.
Je trace B(OA)................ Op. : $(3C_1 + C_3)$.

Ces deux cercles se coupent en b.

Op. : $(6C_1 + 2C_3)$.

Simplicité : 8; exactitude : 6; 2 cercles.

VI. *Par un point* A, *mener une droite parallèle à une droite donnée* BC.

a. Je trace un cercle quelconque passant par A; mais de rayon assez grand pour qu'il coupe BC en B et en C.

Op. : $(C_1 + C_3)$.

Je prends BA...................... Op. : $(2C_1)$, puis je trace C(DA) qui coupe en D (du même côté de BC que A) le premier cercle tracé.... Op. : $(C_1 + C_3)$.

je trace AD.................... Op. : $(2R_1 + R_2)$,
qui est la parallèle cherchée.

$$\text{Op.} : (2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3).$$

Simplicité : 9; exactitude : 6; 1 droite, 2 cercles.

b. Je trace A(R) qui coupe BC en B, R quelconque mais assez grand pour couper BC.... Op. : $(C_1 + C_3)$,
je trace B(R) qui coupe BC en C.... Op. : $(C_1 + C_3)$,
puis C(R) qui coupe A(R) en B du même côté de BC que A.......................... Op. : $(C_1 + C_3)$,
enfin je trace AD............... Op. : $(2R_1 + R_2)$,
qui est la parallèle cherchée.

$$\text{Op.} : (2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3).$$

Simplicité : 9; exactitude : 5; 1 droite, 3 cercles.

Remarquons que ces deux méthodes sont plus simples que la méthode classique, laquelle donnerait pour symbole

$$\text{Op.} : (2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3).$$

Simplicité : 11; exactitude 7; 1 droite, 3 cercles.

c. Cas où BC *n'est pas tracée, donnée seulement par deux points* B *et* C.

Je prends BC et je trace A(BC).. Op. : $(3C_1 + C_3)$.
Je prends AB et je trace C(AB).. Op. : $(3C_1 + C_3)$.

Ces deux cercles se coupent en D (du même côté de BC que A); je trace AD qui est la droite cherchée.
Op. : $(2R_1 + R_2)$.

$$\text{Op.} : (2R_1 + R_2 + 6C_1 + 2C_3).$$

Simplicité : 11; exactitude : 8; 1 droite, 2 cercles.

VII. *Diviser, au point* D, *une droite* BC *dans le rapport de deux longueurs données* M *et* N; $\frac{BX}{XC} = \frac{M}{N}$.

Par B je mène une droite quelconque.
Op. : $(R_1 + R_2)$.

je prends M et je trace B(M) qui coupe cette droite en D. Op. : $(3C_1 + C_3)$,

je prends N et je trace D(N) qui coupe cette droite en E. Op. : $(3C_1 + C_3)$,

B, D, E se succédant dans l'ordre où nous les nommons; par D (sans tracer EC), je mène une parallèle à EC qui coupe BC en X. . . . . Op. : $(2R_1 + R_2 + 6C_1 + 2C_3)$.

Op. : $(3R_1 + 2R_2 + 12C_1 + 4C_3)$.

Simplicité : 21; exactitude 15; 2 droites, 4 cercles.

VII *bis*. *Diviser une droite dans le rapport de deux* NOMBRES *donnés m et n.*

Cette question paraît la même que celle de diviser une droite dans le rapport de deux longueurs données; mais, au point de vue général de la *construction* théorique à effectuer à l'aide de la *Géométrographie,* elle en est profondément différente; comme elle se présentera pour placer le centre de gravité de n masses égales (construction XII), nous sommes obligé d'entrer, à son sujet, dans d'assez longs détails.

L'introduction, dans cet énoncé, de l'idée *générale* de nombre, fait que la construction sort du domaine de la construction *pure,* et l'on ne trouve pas de méthode *générale,* indépendante de m et de n, pour l'exécuter, pas plus, du reste, que l'on n'en trouve une pour construire *le plus simplement possible* une droite m fois plus grande qu'une droite donnée, quel que soit m.

Chaque problème particulier qui amène à diviser une certaine droite dans le rapport de deux nombres *particuliers,* dérivant alors de ce problème, doit donc être étudié à part au point de vue de la *Géométrographie.*

En pratique, on transforme ces nombres en longueurs au moyen d'une règle divisée, mais on sort ainsi des deux seuls instruments, la règle et le compas, dont nous nous permettons l'usage en *Géométrographie pure.*

On pourrait rentrer dans le cadre de la *Géométrographie,* comme nous allons le montrer, mais la méthode qu'il faudrait suivre s'éloigne tellement de ce qui est réellement fait, que nous ne l'adoptons pas. Ces deux problèmes, les seuls que nous connaissions dans ce cas, ne se présentent du reste pour ainsi dire jamais en Géométrie *pure* avec le sens général du nombre; car, chaque fois que l'idée de nombre s'introduit, c'est un nombre particulier en relation avec des propriétés qui ne conviennent qu'à la question particulière traitée ; ainsi, *placer le milieu d'une droite* conduit à la diviser dans le rapport de 1 à 1. La propriété que *les médianes d'un triangle se coupent dans le rapport de* 1 *à* 2 conduit à ce rapport de 1 à 2, pour lequel on a ainsi une construction particulière n'indiquant rien pour d'autres rapports, etc.

Diviser en D une droite BC dans le rapport des deux nombres m, n, $\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DC}} = \frac{m}{n}$ avec $m < n$ conduirait, par la *Géométrographie* et sans nouvelles conventions, à la construction générale suivante : par B je mène une droite quelconque...................... Op. : $(\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2)$, je trace $\mathrm{B}(r)$, r étant une longueur quelconque, qui coupe cette droite en B_1, puis $\mathrm{B}_1(r)$ qui coupe la même droite en B_2, etc.; puis $\mathrm{B}_{n-1}(r)$ qui coupe la même droite en B_n.

Op. : $[n(\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_3)]$,

je mènerai par B_m une parallèle à $\mathrm{B}_n\mathrm{C}$ sans tracer $\mathrm{B}_n\mathrm{C}$.

Op. : $(2\mathrm{R}_1 + \mathrm{R}_2 + 6\mathrm{C}_1 + 2\mathrm{C}_3)$,

et cette parallèle couperait BC au point de division cherché.

$$\text{Op. : } [3\mathrm{R}_1 + 2\mathrm{R}_2 + (n+6)\,\mathrm{C}_1 + (n+2)\mathrm{C}_3].$$

Mais cette manière de procéder est, comme nous l'avons dit, si loin de la façon réelle d'opérer que nous ne voulons point l'admettre, elle ne serait jamais la plus simple possible dans chaque cas particulier, ainsi que cela résulte des explications précédentes. C'est pour la même raison que nous ne créons pas un nouveau symbole qui permettrait de serrer de plus près ce que l'on pourrait faire graphiquement pour porter, à la suite, une série de n longueurs égales sur une droite donnée à partir de BC. En effet, on prend avec le compas la longueur à porter; on met une pointe en B, et la laissant en B, on met la seconde pointe sur la droite en B_1, etc., et nous n'avons pas spécifié de symbole pour exprimer l'opération qui consiste à mettre la seconde pointe sur une ligne tracée lorsque la première est fixe, car nous n'y avons vu qu'une complication des principes de la théorie et pas d'avantages.

Nous supposerons donc, dans ce problème et dans ceux qui sortent de la *Géométrographie* pure, comme ceux de la Statique, que les nombres m et n étant donnés, nous avons toujours deux lignes dans le rapport de m à n. Cela est vrai, en pratique, puisqu'on se sert de règles divisées.

Pour diviser une ligne dans le rapport des nombres m et n, nous admettrons donc, en général, le même symbole que pour diviser la droite dans le rapport de deux lignes données.

Ce qui prouve bien la justesse de l'idée de ne pas considérer cette construction comme une construction graphique proprement dite, c'est que, dès qu'on la travaille, on se heurte à des problèmes de nombres fort délicats et quelquefois non résolus, questions qui par essence sont évidemment étrangères à l'art graphique proprement dit. Par exemple, examinons le problème suivant :

Construire une ligne qui soit n fois une longueur donnée l; je supposerai n un nombre assez élevé. Je double l, j'ai $2l$; je double $2l$ sur la droite, j'ai $2^2 l$; je double $2^2 l$, j'ai $2^{2^2} l$, et ainsi de suite $2^{2^3} l$, $2^{2^4} l$, ...; je m'arrête à $2^{2^x} l$. Lorsque $2^{2^{x+1}}$ serait plus grand que n, il me reste alors à porter encore $n - 2^{2^x}$ fois la longueur l; on voit facilement, en étudiant le problème, qu'il revient à peu près à celui-ci :

Combien, au moins, faut-il faire de multiplications pour élever un nombre A à la puissance n? Problème de nombres qui me semble fort difficile.

J'ai montré, cette année 1892, au Congrès de l'Association française, à Pau, comment l'étude de ces constructions où entre l'idée générale de *nombre* conduisait à la résolution, en nombres entiers, d'une certaine équation indéterminée, soit à deux, soit à trois variables.

VIII. *En* P *mener une perpendiculaire à une droite* PJ *donnée.*

Je trace un cercle O(R) de rayon quelconque R et de centre quelconque O, mais passant par P.

Op. : $(C_1 + C_3)$,

ce cercle coupe PJ en P′. Je trace P′O qui coupe O(R) en Q et je trace PQ. . . . . Op. : $(4R_1 + 2R_2)$.

PQ est la perpendiculaire cherchée.

$$\text{Op. : } (4R_1 + 2R_2 + C_1 + C_3).$$

Simplicité : 8; exactitude : 5; 2 droites, 1 cercle.

IX. *Abaisser d'un point* C, *hors d'une droite donnée* AB, *une perpendiculaire à* AB.

a. Méthode classique.

Je trace C(R), R étant quelconque mais suffisant pour couper AB en A et en B. . . . . Op. : $(C_1 + C_3)$,

je trace A(R), B(R) qui se coupent en C′.

Op. : $(2C_1 + 2C_3)$,

je trace CC′. . . . . Op. : $(2R_1 + R_2)$.

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 3C_1 + 3C_3).$$

Simplicité : 9; exactitude : 5; 1 droite, 3 cercles.

b. Méthode un peu plus simple.

B étant un point quelconque de AB, je décris B(BC) qui coupe AB en A. . . . . Op. : $(C_1 + C_2 + C_3)$,

je prends AC et je décris A(AC) qui coupe B(BC) en C′.

Op. : $(2C_1 + C_3)$,

je trace CC′ qui est la perpendiculaire cherchée.

Op. : $(2R_1 + R_2)$.

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 3C_1 + C_2 + 2C_3).$$

Simplicité : 9; exactitude : 5; 1 droite, 2 cercles.

c. AB n'est pas tracée.

Je trace B(BC), A(AC) qui se coupent en C et C'.

Op. : $(4C_1 + 2C_3)$,

je trace CC'. Op. : $(2R_1 + R_2)$.

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3).$$

Simplicité 9; exactitude 6; 1 droite, 2 cercles.

X. *Faire avec une droite donnée* BC, *en un point donné* B, *un angle égal à un angle donné* DAE.

Je trace un cercle A(AE) de rayon quelconque.

Op. : $(C_1 + C_3)$,

il coupe AD en D, AE en E, D et E étant sur les côtés de l'angle DAE.

Je trace B(AE) qui coupe BC en F. Op. : $(C_1 + C_3)$,
je prends DE et je trace F(DE) qui coupe B(AE) en H.

Op. : $(3C_1 + C_3)$,

je trace BH; HBC est l'angle cherché. Op. : $(2R_1 + R_2)$.

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 5C_1 + 3C_3).$$

Simplicité : 11; exactitude : 7; 1 droite, 3 cercles.

XI. *Sur* QQ' *comme diamètre décrire une circonférence.*

Je décris, avec un rayon $R > \frac{1}{2}QQ'$, Q(R), Q'(R) qui se coupent en C et en C'. . . . . Op. : $(2C_1 + 2C_3)$,
je trace CC' qui coupe QQ' en son milieu O.

Op. : $(2R_1 + R_2)$,

je trace O(OQ'). . . . . Op. : $(2C_1 + C_3)$,
qui est le cercle cherché.

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_3).$$

Simplicité : 10; exactitude : 6; 1 droite, 3 cercles.

XII. *Placer le centre de gravité de n masses égales appliquées en des points donnés* $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Je prends un point quelconque O et je place le sommet K_1 du parallélogramme $OA_1K_1A_2$ sans tracer ni OA_1, ni OA_2, puis de même le sommet K_2 du parallélogramme $OK_1K_2A_3$, etc.; enfin le sommet K_{n-1} du parallélogramme $OK_{n-2}K_{n-1}A_n$, chaque opération de placement d'un som-

met étant donné par. . . . . Op. : $(6C_1 + 2C_3)$.
K_{n-1} est placé par. . . . . . Op. : $[(n-1)(6C_1 + 2C_3)]$.
je trace OK_{n-1}. . . . . Op. : $(2R_1 + R_2)$.

Je divise OK_{n-1} en G, de façon que $\frac{OG}{GK_{n-1}} = \frac{1}{n}$ (*voir* VII *bis*), en opérant la construction VII diminuée de $R_1 + R_2$, puisque j'ai déjà tracé des droites passant par O.
Op. : $(2R_1 + R_2 + 12C_1 + 4C_3)$.

J'ai donc le centre de gravité G des n points $A_1, A_2, \ldots, A_n$ par

$$\text{Op. : } [4R_1 + 2R_2 + 6(n+1)C_1 + 2(n+1)C_3].$$

Simplicité : $8n + 14$; exactitude : $6n + 10$; 2 droites; $2(n+1)$ cercles.

Remarquons qu'il sera souvent nécessaire, en pratique, de modifier un peu cette construction, car si n est assez grand, il peut quelquefois devenir difficile de diviser OK_{n-1} dans le rapport $\frac{1}{n}$, parce que le segment OG serait trop petit; on peut alors faire comme il suit :

On partage les n points A en deux groupes, l'un

$$A_1, \quad A_2, \quad \ldots, \quad A_p,$$

l'autre

$$A_{p+1}, \quad A_{p+2}, \quad \ldots, \quad A_n.$$

Soit G_1 le centre de gravité des points $A_1, \ldots, A_p$, que j'obtiens par

$$\text{Op. : } [4R_1 + 2R_2 + 6(p+1)C_1 + 2(p+1)C_3];$$

soit G_2 le centre de gravité des points $A_{p+1}, \ldots, A_n$, que j'obtiens par

$$\text{Op. : } [4R_1 + 2R_2 + 6(n-p+1)C_1 + 2(n-p+1)C_3].$$

G m'est donné en joignant G_1, G_2,

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2),$$

et divisant G_1, G_2 dans le rapport $\frac{G_1G}{GG_2} = \frac{n-p}{p}$:

$$\text{Op. : } (2R_1 + R_2 + 12C_1 + 4C_3);$$

G est donc ainsi obtenu par le symbole :

$$\text{Op.} : [12R_1 + 6R_2 + 6(n+4)C_1 + 2(n+3)C_3].$$

L'opération est alors plus compliquée de

$$\text{Op.} : (8R_1 + 2R_2 + 18C_1 + 4C_3).$$

Entrons maintenant dans l'examen des constructions A, B, C, D.

Construction A (première de M. d'Ocagne).

Soient d_1, d_2, ..., d_n les n droites données; pour trouver le point M tel que la somme des carrés de ses distances aux n droites d_p soit minima, j'opère ainsi :

1° Je place, au moyen d'un seul cercle tracé, les points symétriques A_p, d'un point arbitraire O du plan, par rapport aux n droites d_p......... Op. : $[2nC_1 + (2n+1)C_3]$.

2° Je place le centre de gravité G des points A_p.
Op. : $[4R_1 + 2R_2 + 6(n+1)C_1 + 2(n+1)C_3]$.

3° Je trace par O une perpendiculaire à OG (OG déjà tracée).
Op. : $(4R_1 + 2R_2 + C_1 + C_2)$.

Cette perpendiculaire coupe en P et en P′ le cercle décrit de O comme centre pour obtenir les A_p.

4° Je mène par P′ des parallèles aux droites d_p, parallèles qui coupent une seconde fois le même cercle au point B_p, en me servant pour mener toutes ces parallèles d'un seul cercle passant par P′.
Op. : $[2nR_1 + nR_2 + (3n+1)C_1 + (n+1)C_3]$.

5° Je trace P(OP) dont j'aurai besoin plus tard (*voir* 10°).
Op. : $(C_1 + C_3)$.

6° Je place le centre de gravité H des points B_p.
Op. : $[4R_1 + 2R_2 + 6(n+1)C_1 + (n+1)C_3]$.

7° Je trace PH et j'abaisse de O une perpendiculaire sur PH.
Op. : $(4R_1 + 2R_2 + 3C_1 + 3C_3)$.

Cette perpendiculaire est un lieu de M.

8° Je place un point G_1 (sans tracer OG_1) tel que PG_1 soit équipollent à OG.................. Op. : $(6C_1+2C_3)$.

9° De même, je place un point J, tel que PJ soit équipollent à HG_1......................... Op. : $(6C_1+2C_3)$.

10° Je trace PJ et en P j'élève une perpendiculaire à PJ.
Op. : $(6R_1+3R_2+C_1+C_3)$.

J'appelle Q le point de cette perpendiculaire, tel que $PQ = OP$, Q est sur P(OP) déjà tracé (*voir* 5°); soit Q′ le point diamétralement opposé à Q sur le cercle O(OP).

11° Je joins OH qui coupe en h le cercle déjà tracé de diamètre PP′.
Op. : $(2R_1+R_2)$.

12° Je mène par Q′ une parallèle à $P'h$ (sans tracer $P'h$).
Op. : $(2R_1+R_2+6C_1+2C_3)$
parallèle qui coupe en K le cercle (déjà tracé) qui a QQ′ pour diamètre.

13° Je porte sur PK le segment $PK = OH$.. Op. : $(3C_1+C_3)$.

14° Je trace QK et par P je mène une perpendiculaire à QK.
Op. : $(4R_1+2R_2+3C_1+3C_3)$.

Cette perpendiculaire est un deuxième lieu du point M, qui est obtenu ainsi par le symbole :

Op. : $[2(n+15)R_1+(n+15)R_2+(17n+43)C_1+(7n+22)C_3]$.

Simplicité : $27n+110$; exactitude : $19n+73$; $(n+15)$ droites, $(7n+22)$ cercles.

Construction B (¹) (de M. Laisant).

1° Je place les symétriques O'_p d'un point arbitraire O par rapport aux n droites données. Op. : $[2nC_1+(2n+1)C_3]$.

2° Je place le centre de gravité G des points O_p.
Op. : $[4R_1+2R_2+6(n+1)C_1+2(n+1)C_3]$.

(¹) Je ferai remarquer que je ne donne pas la justification des constructions indiquées, laquelle n'a rien de commun avec le but de ce travail; j'ai pris ces constructions telles qu'elles m'ont été communiquées par leurs auteurs, en conservant leurs notations qui sont différentes pour chaque construction.

3° Je décris O(OG), B(OG)........... Op. : $(4C_1 + 2C_3)$.
OG coupe O(OG) en B, B(OG) servira dans la suite (*voir* 8°).

4° Par B je mène des parallèles aux n droites données en me servant d'un seul cercle passant par B et coupant les n droites.
Op. : $[2nR_1 + nR_2 + (3n+1)C_1 + (n+1)C_3]$.

Ces parallèles coupent le cercle O(OG) en $E_1, E_2, \ldots, E_n$.

5° Je place le centre de gravité H des points E.
Op. : $[4R_1 + 2R_2 + 6(n+1)C_1 + 2(n+1)C_3]$.

6° Je place le sommet K d'un parallélogramme OGHK.
Op. : $(6C_1 + 2C_3)$.

7° Je trace OK....................... Op. : $(2R_1 + R_2)$.

8° Je fais l'angle ZGM = KOH. Op. : $(2R_1 + R_2 + 3C_1 + C_3)$, en me servant des cercles O(OG), B(OG) et appelant M le point de rencontre de OK et de GM.

M est le point cherché obtenu par le symbole

Op. : $[2(n+6)R_1 + (n+6)R_2 + (17n+26)C_1 + (7n+11)C_3]$.

Simplicité : $27n+55$; exactitude : $19n+38$; $(n+6)$ droites, $7n+11$ cercles.

Construction C (deuxième de M. d'Ocagne).

1° D'un point O quelconque du plan j'abaisse des perpendiculaires sur les n droites données (en ne me servant que d'une seule circonférence), soit D_p le pied de l'une d'elles.
Op. : $[2nR_1 + nR_2 + (2n+1)C_1 + (2n+1)C_3]$.

2° Je place le centre de gravité G des points D_p.
Op. : $[4R_1 + 2R_2 + 6(n+1)C_1 + 2(n+1)C_3]$.

3° Je mène par O des parallèles aux n droites données en ne me servant que d'un seul cercle passant en O.
Op. : $[2nR_1 + nR_2 + (3n+1)C_1 + (n+1)C_3]$.

4° Sur OG (déjà tracée pour avoir G) comme diamètre, je décris une circonférence et j'appelle E_p les points de rencontre de cette circonférence avec les parallèles aux droites données menées par O.... Op. : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 3C_3)$.

5° Je place le centre de gravité H des points E_p.
Op. : $[4R_1 + 2R_2 + 6(n+1)C_1 + 2(n+1)C_3]$.

6° J'élève en O une perpendiculaire OK à OG.
Op. : $(4R_1 + 2R_2)$,
en me servant du cercle tracé pour avoir les points D.

7° Par H je mène une parallèle à OG qui coupe OK en K.
Op. : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3)$.

8° Je trace GH .... Op. : $(2R_1 + R_2)$.

9° En O j'élève à OH (déjà tracée pour avoir H) une perpendiculaire qui coupe en I la droite GH; j'utilise pour cela le cercle tracé pour avoir les points D_p. Op. : $(4R_1 + 2R_2)$.

10° Je mène par G une perpendiculaire à IK, sans tracer IK (construction IX, *c*)... Op. : $(2R_1 + R_2 + 4C_1 + 2C_3)$.

M, point cherché, est à l'intersection de OH avec cette perpendiculaire; il est obtenu par le symbole

Op : $[4(n+6)R_1 + 2(n+6)R_2 + (17n+26)C_1 + (7n+13)C_3]$.

Simplicité : $30n+75$; exactitude : $21n+50$; $2(n+6)$ droites, $(7n+13)$ cercles.

Construction D (troisième de M. d'Ocagne).

1° Je prends les symétriques O'_p d'un point arbitraire O par rapport à toutes les droites données.
Op. : $[2nC_1 + (2n+1)C_3]$.

2° Je place le centre de gravité O′ des points O'_p.
Op. : $[4R_1 + 2C_2 + 6(n+1)C_1 + 2(n+1)C_3]$.

3° Je prends les symétriques O''_p de O′ par rapport à toutes les droites données..... Op. : $[(2n+1)C_1 + (2n+1)C_3]$.

4° Je place le centre de gravité O″ des points O''_p.
Op. : $[4R_1 + 2R_2 + 6(n+1)C_1 + 2(n+1)C_3]$.

5° Je fais angle $O''O'M = O''OO'$ sans tracer $O'O''$.
Op. : $(2R_1 + R_2 + 6C_1 + 3C_3)$.

M, point cherché, est à la rencontre de OO″ et de MO′; il est obtenu par le symbole

$$\text{Op. : } [10R_1 + 5R_2 + (16n + 19)C_1 + (8n + 9)C_3].$$

Simplicité : $24n + 43$; exactitude : $16n + 29$; 5 droites, $8n + 9$ cercles.

RÉSUMÉ.

Construction A.

$$\text{Op. : } [2(n+15)R_1 + (n+15)R_2 + (17n+43)C_1 + (7n+22)C_3].$$

Simplicité : $27n + 110$; exactitude : $19n + 73$; $(n+15)$ droites, $(7n + 12)$ cercles.

Construction B.

$$\text{Op : } [2(n+6)R_1 + (n+6)R_2 + (17n + 26)C_1 + (7n + 11)C_3].$$

Simplicité : $27n + 55$; exactitude : $19n + 38$; $(n + 6)$ droites, $(7n + 11)$ cercles.

Construction C.

$$\text{Op. : } [4(n+6)R_1 + 2(n+6)R_2 + (17n + 26)C_1 + (7n+13)C_3].$$

Simplicité : $30n + 75$; exactitude : $21n + 50$; $2(n + 6)$ droites, $(7n + 13)$ cercles.

Construction D.

$$\text{Op. : } [10R_1 + 5R_2 + (16n + 19)C_1 + (8n + 9)C_3].$$

Simplicité : $24n + 43$; exactitude : $16n + 29$; 5 droites, $(8n + 9)$ cercles.

On voit que, à tous égards, la construction D est de beaucoup la plus simple. Remarquons aussi que le nombre de droites dont elle exige le tracé est toujours 5, quel que soit n.

La construction B est *toujours* plus simple, d'une façon absolue, que les constructions A et C, puisque les coefficients de R_1, R_2, C_1, C_2 y sont tous plus petits que ceux de la construction A.

La construction C est plus simple que A pour $n \leqq 11$, moins simple dans le cas contraire.

On peut donc les ranger ainsi

D, B, A et C,

par ordre de simplicité décroissante; il faut remarquer toutefois que C est préférable à A, comme nous l'avons dit, pour les valeurs de *n* inférieures à 12.

Cet exemple montre la *nécessité* d'un criterium, car en estimant la chose, comme on l'a toujours fait jusqu'ici au point de vue spéculatif, M. *d'Ocagne* pensait évidemment que la construction C, présentée à l'Académie postérieurement à son premier essai A était préférable, tandis que le contraire a lieu s'il ne s'agit plus d'une proposition spéculative, mais d'une construction, ce qui était le cas.

Si *n* a une valeur petite, 3, 4, 5 par exemple, on trouve facilement des méthodes particulières *beaucoup plus simples* que les constructions générales comparées ici.

La détermination de la simplicité et de l'exactitude théoriques des constructions doit paraître, au premier abord, fort longue parce qu'elle est assez difficile à détailler par écrit brièvement; mais elle est, en réalité, très rapide, puisque, ayant établi une fois pour toutes les symboles des constructions composantes qui se retrouvent toujours les mêmes dans toutes les questions, on n'a à faire que quelques additions de petits nombres.

Les simplifications à ces constructions générales, qui peuvent être appliquées dans chaque cas traité, se font aussi très rapidement dès qu'on a nombré quelques constructions comme exercice.

Je borne là ce que je veux dire ici à propos de *la Géométrographie* ou *art des constructions géométriques* (*voir,* pour plus de détails, le volume du Congrès de Pau, 1892, de l'Association française pour l'avancement des Sciences); mais, comme, à l'origine de mes études sur ce sujet, j'en ai parlé à la Société mathématique (*loco citato*), je veux ajouter quelques mots nécessaires pour expliquer les différences entre certains résultats que j'obtenais alors et ceux que je donnerais aujourd'hui, si ce petit travail était à refaire (*voir* d'ailleurs, pour plus de détails, mon Mémoire du Congrès de Pau).

D'abord je n'avais encore eu que l'idée de l'évaluation de la simplicité des constructions qui étaient effectuées et j'étais loin de me douter que toutes les constructions fondamentales, qui se trouvent, depuis Euclide, dans les Traités de Géométrie et au moyen desquelles je faisais mes évaluations, sont trop compliquées, c'est-à-dire que j'admettais implicitement qu'elles étaient les plus simples possible; s'il y en avait plusieurs, je choisissais celle qui s'énonçait le plus simplement; je suivais le texte géométrique sans y chercher systématiquement les simplifications, recherche qui est maintenant l'un des objets principaux de la *Géométrographie*.

Par exemple, pour évaluer la simplicité de la construction nécessaire pour placer un point M donné par ses coordonnées cartésiennes x et y, par rapport à deux axes Ox, Oy, j'avais pris, comme au hasard, cette construction évidente :

Prendre $Ox' = x$ sur Ox, par x' mener une parallèle à Oy, enfin prendre, sur cette parallèle et dans le sens convenable, $x'M = y$, ce qui me conduisit *alors* à

$$\text{Op.} : (2R_1 + R_2 + 11C_1 + 5C_3)$$

pour le cas des axes obliques; simplicité : 19; et s'ils étaient rectangulaires à

$$\text{Op.} : (4R_1 + 2R_2 + 7C_1 + 3C_3).$$

A cette époque, je n'avais pas vu encore que la construction classique de mener, par un point donné, une parallèle à une droite était simplifiable; je ne m'occupais pas du coefficient d'Exactitude, plus important certainement que le coefficient de Simplicité, etc.

Il est évident, même sans évaluation d'aucune espèce, que la construction suivante est plus simple et que c'est elle que j'aurais dû choisir; mais l'examen de la chose ne m'était même pas venu à l'idée, parce que la première était plus courte à exprimer, ce qui était la simplicité spéculative comme l'entendent jusqu'ici les Géomètres.

Maintenant, mis en éveil par l'expérience, je chercherais la construction la plus simple et j'opérerais ainsi pour placer le point M : je trace $O(x)$ qui coupe Ox en x' et $O(y)$ qui coupe Oy en y',

$$\text{Op.} : (6C_1 + 2C_3),$$

puis je trace $x'(y)$

$$\text{Op.} : (C_1 + C_3),$$

je reprends x entre les branches du compas et je trace $y'(x)$ qui coupe $x'(y)$ en M

$$\text{Op.} : (3C_1 + C_3);$$

en tout :

$$\text{Op.} : (10C_1 + 4C_3).$$

Simplicité : 14; exactitude : 10; 4 cercles.

Si je me sers de deux compas, j'économise $2C_1$, puisque je n'ai pas besoin de reprendre x entre les branches du compas et le symbole est :

$$\text{Op.} : (8C_1 + 4C_2).$$

Simplicité : 12; exactitude : 8; 4 cercles, au lieu de : simplicité : 19; exactitude : 13; 1 droite; 5 cercles, ainsi que j'avais obtenu.

Il y aurait d'autres observations du même genre à faire sur d'autres points de détail de notre Note de 1888; nous croyons inutile de nous y arrêter puisqu'elles ne touchent nullement la doctrine, mais son application rationnelle que nous ne savions pas encore faire complètement.