BULLETIN DE LA S. M. F.

A. DEMOULIN

Sur le complexe des droites par lesquelles on peut mener à une quadrique deux plans tangents rectangulaires

Bulletin de la S. M. F., tome 20 (1892), p. 122-132
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1892__20__122_1>

MÉMOIRES ET COMMUNICATIONS.

Sur le complexe des droites par lesquelles on peut mener à une quadrique deux plans tangents rectangulaires; par M. A. Demoulin.

1. Ce complexe, qui est du second ordre, a déjà été l'objet d'une étude approfondie, due à Painvin (*Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1872, p. 49). Nous nous proposons d'en faire connaître ici un certain nombre de propriétés. A cet effet, nous démontrerons d'abord deux théorèmes concernant les surfaces du second ordre.

Théorème I. — *Étant donnés, dans l'espace, des points* P_i, *au nombre de* n, *désignons par* p_i *la distance du point* P_i *à un plan mobile* P. *Cela posé, si l'on a*

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i p_i^2 = \rho, \tag{1}$$

les quantités a_i *et* ρ *étant des constantes, le plan* P *enveloppera une surface du second ordre.*

Soient x_i, y_i, z_i les coordonnées rectangulaires du point P_i et

$$ux + vy + wz + 1 = 0$$

l'équation du plan P. On a

$$p_i = \frac{ux_i + vy_i + wz_i + 1}{\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}},$$

d'où, en substituant dans (1),

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i(ux_i + vy_i + wz_i + 1)^2 = \rho(u^2 + v^2 + w^2),$$

ou encore, tous calculs faits,

$$\left\{\begin{aligned} & u^2\left(-\rho + \sum_1^n a_i x_i^2\right) \\ & + v^2\left(-\rho + \sum_1^n a_i y_i^2\right) + w^2\left(-\rho + \sum_1^n a_i z_i^2\right) \\ & + 2vw\sum_1^n a_i y_i z_i + 2wu\sum_1^n a_i z_i x_i + 2uv\sum_1^n a_i x_i y_i \\ & + 2u\sum_1^n a_i x_i + 2v\sum_1^n a_i y_i + 2w\sum_1^n a_i z_i + \sum_1^n a_i = 0. \end{aligned}\right. \tag{2}$$

L'enveloppe du plan P est donc une quadrique ayant les mêmes plans principaux que la quadrique centrale d'inertie relative à des masses a_i placées aux points P_i.

Ces considérations s'appliquent évidemment au cas où les masses a_i seraient en nombre infini et formeraient une matière continue.

L'équation (2) montre que si ρ varie, les quantités a_i restant constantes, l'équation (1) représente une famille de quadriques homofocales.

THÉORÈME II. — *Étant donnée la quadrique*

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} &au^2 + a'v^2 + a''w^2 + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv \\ &\qquad + 2cu + 2c'v + 2c''w + d = 0, \end{aligned}\right.$$

il existe une infinité de relations linéaires entre les carrés des distances d'un plan tangent quelconque à dix points fixes, pris arbitrairement dans l'espace et non situés sur une surface du second ordre.

Faisons, dans l'équation (2), $n = 10$, et identifions-la avec l'équation (3); nous aurons ainsi les dix équations linéaires

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\sum_1^{10} a_i x_i^2 = a + \rho, \qquad \sum_1^{10} a_i y_i^2 = a' + \rho, \\ &\sum_1^{10} a_i z_i^2 = a'' + \rho, \qquad \ldots, \qquad \sum_1^{10} a_i = d. \end{aligned}\right.$$

Ces équations seront toujours compatibles, car, si le déterminant des coefficients des inconnues était nul, les dix points P_i seraient situés sur une surface du second ordre, ce qui est contraire à l'hypothèse. Nous pourrons donc toujours déduire des équations (4) un système de valeurs des inconnues $a_1, \ldots, a_{10}$. Ces valeurs dépendront des coefficients de l'équation (3) et de la quantité arbitraire ρ. Cela posé, entre les distances des dix points P_i à tout plan tangent de la quadrique (3), il existera la relation

$$(5)\qquad \sum_1^{10} a_i p_i^2 = \rho.$$

Si l'on fait $\rho = 0$, on obtient la relation linéaire et *homogène*

$$\sum_1^{10} a_i p_i^2 = 0.$$

2. Pour la facilité du langage, nous donnerons au complexe actuel le nom de *complexe de Painvin*. Ce complexe jouit de la propriété suivante :

Un complexe de Painvin étant donné, il existe une infinité de relations entre les carrés d'une droite quelconque du complexe à dix points pris arbitrairement dans l'espace et non situés sur une surface du second ordre.

Soient D une droite quelconque du complexe de Painvin relatif à la quadrique (3) et P, P′ les plans tangents rectangulaires que l'on peut mener à cette quadrique par la droite D. Soient p_i, p'_i, d_i les distances du point P_i respectivement au plan P, au plan P′ et à la droite D. La formule (5) donne

$$\sum_1^{10} a_i p_i^2 = \rho, \qquad \sum_1^{10} a_i p_i'^2 = \rho,$$

d'où, par addition,

$$\sum_1^{10} a_i (p_i^2 + p_i'^2) = 2\rho.$$

Or

$$p_i^2 + p_i'^2 = d_i^2,$$

par suite

$$\sum_1^{10} a_i d_i^2 = 2\rho. \tag{6}$$

Le théorème est donc démontré. Si $\rho = 0$, la relation (6) se réduit à

$$\sum_1^{10} a_i d_i^2 = 0.$$

3. Les considérations qui précèdent vont nous permettre de trouver l'équation du complexe de Painvin par rapport à des axes rectangulaires quelconques. Soient $(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r)$ les coordonnées pluckériennes [1] d'une droite D du complexe. La distance d_i

---

[1] Soient (x', y', z') et (x'', y'', z'') les coordonnées de deux points quelconques de la droite D. Nous poserons

$$\alpha = x' - x'', \qquad \beta = y' - y'', \qquad \gamma = z' - z'',$$
$$p = z'y'' - z''y', \qquad q = x'z'' - x''z', \qquad r = y'x'' - y''x'.$$

du point $P_i(x_i, y_i, z_i)$ à cette droite est donnée par la formule

$$\begin{aligned}(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)d_i^2 = {} & x_i^2(\beta^2+\gamma^2)+y_i^2(\gamma^2+\alpha^2)+z_i^2(\alpha^2+\beta^2)\\ & -2\alpha\beta x_i y_i - 2\beta\gamma y_i z_i - 2\gamma\alpha z_i x_i\\ & +2x_i(q\gamma - r\beta)+2y_i(r\alpha - p\gamma)\\ & +2z_i(p\beta - q\alpha)+p^2+q^2+r^2.\end{aligned}$$

Portant, dans (6), la valeur de d_i^2 et tenant compte des relations (4), nous obtiendrons l'équation du complexe, à savoir

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} & \alpha^2(a'+a'')+\beta^2(a''+a)+\gamma^2(a+a')\\ & \quad -2\alpha\beta b'' - 2\beta\gamma b - 2\gamma\alpha b' + 2(q\gamma - r\beta)c + 2(r\alpha - p\gamma)c'\\ & \qquad\qquad +2(p\beta - q\alpha)c'' + (p^2+q^2+r^2)d = 0.\end{aligned}\right.$$

Si les axes des coordonnées coïncident avec les axes principaux de la quadrique (3),

$$b = b' = b'' = c = c' = c'' = 0,$$

et l'équation (7) devient

$$\alpha^2(a'+a'')+\beta^2(a''+a)+\gamma^2(a+a')+(p^2+q^2+r^2)d = 0.$$

C'est, aux notations près, l'équation obtenue par Painvin dans le Mémoire cité.

4. La forme de l'équation (7) montre que :

Si une congruence est composée des droites communes aux complexes de Painvin de deux quadriques quelconques, représentées en coordonnées tangentielles par les équations

$$\Sigma = 0, \qquad \Sigma' = 0,$$

elle appartiendra également aux complexes de Painvin de toutes les quadriques représentées par l'équation

$$\Sigma + \rho\Sigma' = 0,$$

dans laquelle ρ est un paramètre variable.

5. Soit

$$f(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r) = 0$$

l'équation d'un complexe quadratique quelconque.

Considérons tous les complexes quadratiques définies par l'équation

$$f(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r) + \rho(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) = 0, \tag{8}$$

ρ désignant un paramètre arbitraire.

Chacun de ces complexes renferme évidemment celles des droites du complexe

$$f(\alpha, \beta, \gamma, p, q, r) = 0$$

qui sont isotropes. Il suit de là que *les coniques, situées dans un même plan et relatives aux complexes* (8), *sont homofocales;* et que *les cônes de même sommet, relatifs aux complexes* (8), *sont homocycliques*.

Cela posé, soit la famille de quadriques homofocales

$$\begin{aligned}(a+\rho)u^2 + (a'+\rho)v^2 + (a''+\rho)w^2 \\ + 2bvw + 2b'wu + 2b''uv + 2cu + 2c'v + 2c''w + d = 0.\end{aligned}$$

Les complexes de Painvin relatifs à ces quadriques ont pour équation

$$\begin{aligned}&\alpha^2(a'+a'') + \beta^2(a''+a) + \gamma^2(a+a') \\ &\quad - 2\alpha\beta b'' - 2\beta\gamma b - 2\gamma\alpha b' \\ &\quad + 2(q\gamma - r\beta)c + 2(r\alpha - p\gamma)c' + 2(p\beta - q\alpha)c'' \\ &\qquad\qquad + (p^2+q^2+r^2)d + 2\rho(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) = 0.\end{aligned}$$

Cette équation rentrant dans le type de l'équation (8), nous pouvons énoncer ce théorème :

Les coniques, relatives à un plan, des complexes de Painvin d'une famille de quadriques homofocales sont homofocales.

Les cônes, relatifs à un point, des complexes de Painvin d'une famille de quadriques homofocales sont homocycliques.

6. Nous avons vu (n° 2) que le complexe de Painvin d'une quadrique quelconque

$$\sum_1^{10} a_i p_i^2 = \rho$$

est défini par l'équation

$$\sum_1^{10} a_i d_i^2 = 2\rho.$$

Cela posé, soient

$$\sum_1^{10} a_i p_i^2 = \rho',$$

$$\sum_1^{10} a_i p_i^2 = \rho''$$

les équations de deux quadriques Q′, Q″, homofocales à Q. Cherchons le complexe des droites D par lesquelles on peut mener deux plans rectangulaires P′, P″ tangents, l'un P′ à la quadrique Q′, l'autre P″ à la quadrique Q″. Soient p_i', p_i'', d_i les distances du point P_i aux plans P, P′ et à la droite D. On a

$$\sum_1^{10} a_i p_i'^2 = \rho', \qquad \sum_1^{10} a_i p_i''^2 = \rho'',$$

d'où

$$\sum_1^{10} a_i (p_i'^2 + p_i''^2) = \rho' + \rho''.$$

Or

$$p_i'^2 + p_i''^2 = d_i^2,$$

par conséquent

$$\sum_1^{10} a_i d_i^2 = \rho' + \rho''.$$

Si $\rho' + \rho'' = 2\rho$, cette équation représente le complexe de Painvin de la quadrique Q. De là ce théorème :

Le complexe de Painvin relatif à une quadrique Q *peut être considéré, d'une infinité de manières, comme le lieu des droites d'intersection de deux plans rectangulaires* P′, P″ *respectivement tangents à deux quadriques* Q′, Q″, *homofocales à* Q.

7. Le théorème I permet de démontrer simplement le théorème bien connu de Monge concernant le lieu du sommet O d'un trièdre trirectangle circonscrit à une surface du second ordre.

Soient p_i', p_i'', p_i''' les distances du point P_i aux faces de ce trièdre et r_i la distance OP_i. On a

$$\sum_1^{10} a_i p_i'^2 = \rho, \qquad \sum_1^{10} a_i p_i''^2 = \rho, \qquad \sum_1^{10} a_i p_i'''^2 = \rho.$$

d'où, par addition,

$$\sum_1^{10} a_i(p_i'^2 + p_i''^2 + p_i'''^2) = 3\rho.$$

Or

$$p_i'^2 + p_i''^2 + p_i'''^2 = r_i^2;$$

par suite,

$$(9) \qquad \sum_1^{10} a_i r_i^2 = 3\rho.$$

Cette équation représente une sphère, ce qui démontre le théorème de Monge. Pour trouver l'équation de cette sphère en coordonnées cartésiennes, appelons (x_i, y_i, z_i) les coordonnées rectangulaires du point P_i et (x, y, z) celles du point O; on a

$$r_i^2 = (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2,$$

d'où, en substituant dans (9),

$$(x^2 + y^2 + z^2)\sum_1^{10} a_i - 2x\sum_1^{10} a_i x_i - 2y\sum_1^{10} a_i y_i - 2z\sum_1^{10} a_i z_i$$
$$+ \sum_1^{10} a_i(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - 3\rho = 0,$$

ou encore, en tenant compte des formules (4),

$$(x^2 + y^2 + z^2)d - 2xc - 2yc' - 2zc'' + a + a' + a'' = 0.$$

8. Le théorème de Monge est susceptible de la généralisation suivante, due à Bobillier [1] :

Si trois plans rectangulaires P′, P″, P‴ *sont respectivement tangents à trois quadriques homofocales* Q′, Q″, Q‴, *leur point commun* O *décrira une sphère concentrique à ces quadriques.*

Soient

$$\sum_1^{10} a_i p_i^2 = \rho', \qquad \sum_1^{10} a_i p_i^2 = \rho'', \qquad \sum_1^{10} a_i p_i^2 = \rho''',$$

les équations des quadriques Q′, Q″, Q‴. Appelons p_i', p_i'', p_i''' et

(1) *Annales de Gergonne*, t. XIX, p. 329.

r_i les distances du point P_i aux plans P', P'', P''' et au point O. On a

$$\sum_1^{10} a_i p_i'^2 = \rho', \qquad \sum_1^{10} a_i p_i''^2 = \rho'', \qquad \sum_1^{10} a_i p_i'''^2 = \rho''',$$

d'où

$$\sum_1^{10} a_i (p_i'^2 + p_i''^2 + p_i'''^2) = \rho' + \rho'' + \rho'''.$$

Or

$$p_i'^2 + p_i''^2 + p_i'''^2 = r_i^2;$$

par suite,

$$\sum_1^{10} a_i r_i^2 = \rho' + \rho'' + \rho'''.$$

Cette équation définit la sphère de Monge de la quadrique

$$\sum_1^{10} a_i p_i^2 = \frac{\rho' + \rho'' + \rho'''}{3}.$$

Le théorème est donc démontré.

9. *Étant donnés dans l'espace n points fixes* P_i, *les droites qui satisfont à la condition*

$$\sum_1^{n} a_i d_i^2 = 2\rho \tag{10}$$

constituent un complexe de Painvin.

En effet, si l'on considère la quadrique qui correspond à l'équation

$$\sum_1^{n} a_i p_i^2 = \rho,$$

le complexe de Painvin relatif à cette quadrique sera défini par l'équation

$$\sum_1^{n} a_i d_i^2 = 2\rho.$$

Pour s'en assurer, il suffit de répéter le raisonnement du n° **2**.

Supposons, dans l'équation (10), n infini ; nous obtiendrons le théorème suivant :

Un corps solide étant donné, les droites par rapport auxquelles le moment d'inertie de ce corps est constant engendrent un complexe de Painvin ([1]).

10. Si l'on fait $n=2$, $\rho=0$, l'équation (10) devient

$$a_1 d_1^2 + a_2 d_2^2 = 0 \tag{11}$$

ou

$$d_1^2 = \lambda d_2^2, \tag{12}$$

pourvu qu'on pose

$$-\frac{a_2}{a_1} = \lambda^2.$$

Étudions le complexe représenté par l'équation (11).

On déduit de (12)

$$d_1 = \lambda d_2.$$

Le complexe actuel est donc celui des droites dont les distances à deux points fixes sont entre elles dans un rapport constant. Mais ce complexe est aussi le complexe de Painvin de la quadrique représentée par l'équation

$$p_1^2 - \lambda^2 p_2^2 = 0,$$

qu'on peut écrire

$$(p_1 + \lambda p_2)(p_1 - \lambda p_2) = 0.$$

Cette quadrique se compose des deux points F_1, F_2 qui divisent harmoniquement, dans le rapport λ, le segment $P_1 P_2$.

Donc :

Le complexe des droites dont les distances à deux points fixes sont entre elles dans un rapport constant est aussi celui des droites par lesquelles on peut mener deux plans rectangulaires passant chacun par un point fixe.

Cette proposition aurait pu être établie également par des considérations de Géométrie pure.

11. On démontrerait sans peine que :

Le cône du complexe, relatif à un point quelconque S, *admet*

([1]) Ce théorème a été énoncé, il y a quelques années, par M. Fouret dans une Communication verbale faite à la Société mathématique de France.

deux directions de sections circulaires perpendiculaires aux droites SF_1 *et* SF_2.

La conique du complexe, relative à un point quelconque P, *admet comme foyers les projections orthogonales, sur ce plan, des points* F_1 *et* F_2.

12. Nous terminerons cette Note en démontrant une propriété du complexe de Painvin d'une quadrique de révolution à centre

$$au^2 + a'v^2 + a'w^2 + d = 0. \tag{13}$$

Cette quadrique fait partie de la famille de quadriques homofocales

$$(a+\rho)u^2 + (a'+\rho)v^2 + (a'+\rho)w^2 + d = 0.$$

Pour $\rho = -a'$, cette équation se réduit à

$$(a-a')u^2 + d = 0$$

et représente deux points F_1 et F_2, foyers d'une section méridienne quelconque de la quadrique (13). La propriété du n° **11**, jointe à celle du n° 5, permet par conséquent d'énoncer ce théorème :

Si l'on considère le complexe de Painvin d'une quadrique de révolution à centre, dont F_1 *et* F_2 *sont les foyers d'une section méridienne quelconque, le cône du complexe, relatif à un point quelconque* S, *admet deux directions de sections circulaires perpendiculaires aux droites* SF_1 *et* SF_2 ; *et la conique du complexe, relative à un plan quelconque* P, *admet comme foyers les projections orthogonales sur ce plan des points* F_1 *et* F_2.