BULLETIN DE LA S. M. F.

SMF

Vie de la société

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 93-109

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__93_1>

© Bulletin de la S. M. F., 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

COMPTES RENDUS DES SÉANCES.

SÉANCE DU 6 MAI 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. Lucien Lévy : *Sur le déplacement d'une figure de forme invariable.*

M. Félix Lucas fait la Communication suivante :

Sur les fonctions d'une variable imaginaire.

Soit $f(z)$ une fonction de la variable $z = x + yi$ et posons

$$f(z) = e^{V+Ui}; \tag{1}$$

V sera le logarithme népérien du module de $f(z)$ et U l'argument de cette fonction.

On a identiquement

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \tag{2}$$

d'où

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \tag{3}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2. \tag{4}$$

On a aussi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0; \tag{5}$$

d'où

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0. \tag{6}$$

Par chaque point (x, y) du plan passe une *courbe équimodulaire* V = const., à laquelle est normal le *vecteur modulaire*

$$\sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2},$$

dont les deux projections sont $-V'_x$ et $-V'_y$.

Pareillement, on peut faire passer par le point (x, y) une *courbe équiargumentaire* U = const., à laquelle est normal le *vecteur argumentaire*

$$\sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2},$$

dont les deux projections sont $-U'_x$ et $-U'_y$.

Les équations (3) et (4) montrent que *le vecteur modulaire et le vecteur argumentaire pour un même point du plan sont égaux et perpendiculaires entre eux*. Si l'on fait tourner le second d'un angle égal à $\frac{\pi}{2}$ dans le sens du mouvement des aiguilles de la montre, il se superpose au premier.

Les équations (4) et (6) montrent que, *si l'une des fonctions* V *et* U *est une fonction de point, il en est de même de la seconde*. Supposons que cette condition soit remplie, nous pourrons regarder ces deux fonctions comme des *potentiels* et énoncer le théorème suivant :

Les courbes équiargumentaires sont les lignes de force correspondant aux courbes équimodulaires considérées comme courbes de niveau. Et, réciproquement, *les courbes équimodulaires sont les lignes de force correspondant aux courbes équiargumentaires considérées comme courbes de niveau.*

D'après les équations (3), *la force modulaire et la force argumentaire s'annulent simultanément.* Appelons points *neutres* du plan les points sur lesquels ces forces s'annulent; ce sont aussi les points en lesquels les courbes de niveau et les lignes de force présentent des points nodaux.

On a identiquement

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\partial V}{\partial x} - i\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + i\frac{\partial U}{\partial x}; \tag{7}$$

par conséquent, *les points neutres du plan sont les points racines de l'équation qu'on obtient en égalant à zéro la dérivée logarithmique de la fonction* $\rho(z)$.

Posons

$$\left\{\begin{aligned} V_1 &= \log \text{nép.} \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2} \\ U_1 &= \text{arc tang} \frac{U'_x}{U'_y}; \end{aligned}\right. \tag{8}$$

nous aurons

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = e^{V_1 + U_1 i}. \tag{9}$$

Les courbes représentées par l'équation $V_1 = \text{const.}$ sont les *lignes isovectorielles* de la fonction $f(z)$; sur chacune d'elles, la longueur du vecteur est constante en chaque point.

Les courbes représentées par l'équation $U_1 = \text{const.}$ sont les *lignes isocliniques* de la fonction $f(z)$; sur chacune d'elles le vecteur reste en chaque point parallèle à une droite fixe.

Les formules (3), (4) et (6), établies entre les dérivées partielles de U et de V, existent aussi entre les dérivées partielles de U_1 et de V_1. Il en résulte notamment que *les lignes isovectorielles et les lignes isocliniques forment deux systèmes orthogonaux.*

Examinons le cas où la fonction $f(z)$ peut s'exprimer par un produit de facteurs binômes de la forme $(z - \zeta)^\mu$, en désignant par $\zeta = \xi + \eta i$ la coordonnée affixe d'un point déterminé du plan,

et par μ un exposant réel (positif ou négatif, commensurable ou incommensurable). Nous aurons alors

$$f(z) = \Pi(z - \zeta)^{\mu}. \tag{10}$$

Posons

$$z - \zeta = re^{ui}; \tag{11}$$

nous aurons

$$\left\{\begin{array}{l} V = \log \text{nép.}\, \Pi r^{\mu} = \Sigma \mu \log \text{nép.}\, r, \\ U = \Sigma \mu ui, \\ \dfrac{f'(z)}{f(z)} = \Sigma \dfrac{\mu}{z - \zeta}. \end{array}\right. \tag{12}$$

La fonction $f(z)$ admet pour zéros les points ζ auxquels correspondent des exposants μ positifs et pour infinis les points ζ auxquels correspondent des exposants μ négatifs.

La fonction V est évidemment un *potentiel* et, par conséquent, la fonction U en est un autre.

1° Assimilons les zéros ζ à des centres d'action attirant le point z, proportionnellement à leur masse et en raison inverse de la distance, et les infinis ζ à des centres d'action repoussant le point z suivant la même loi. Le vecteur modulaire représentera en grandeur et en direction l'action totale exercée sur le point z.

2° Assimilons les zéros ζ à des sources d'électricité positive, débitant par seconde, sur la surface du plan supposée conductrice, les quantités μ, et les infinis ζ à des sources analogues d'électricité négative. Le vecteur modulaire sera parallèle et proportionnel au flux d'électricité passant au point z.

3° Supposant le plan non conducteur, assimilons les zéros ζ aux points de passage de courants électriques indéfinis, d'intensités μ, tous de même direction et normaux au plan, et les infinis ζ aux points de passage de courants analogues, mais dirigés en sens contraire. Le vecteur argumentaire sera parallèle et proportionnel à la force magnétique au point z.

Dans chacune de ces hypothèses, les *points neutres* du plan sont les points racines du numérateur de la somme des fractions simples $\frac{\mu}{z - \zeta}$; ils sont en nombre inférieur d'une unité à celui des points ζ, qui peut d'ailleurs devenir infini.

M. Appell transmet la Note suivante :

Remarque sur les courbes brachistochrones.

On sait que, parmi les courbes joignant deux points fixes A et B, celles qui rendent minimum une intégrale de la forme

$$I = \int_{(A)}^{(B)} \varphi(x, y, z)\, ds$$

vérifient les équations différentielles

$$(1) \qquad \begin{cases} d\left(\varphi \dfrac{dx}{ds}\right) - \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\, ds = 0, \\ d\left(\varphi \dfrac{dy}{ds}\right) - \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\, ds = 0, \\ d\left(\varphi \dfrac{dz}{ds}\right) - \dfrac{\partial \varphi}{\partial z}\, ds = 0, \end{cases}$$

qui se réduisent à deux. Appelons *courbes* C les courbes obtenues en intégrant ces équations, courbes qui dépendent de quatre constantes arbitraires et qui se réduisent à des droites quand $\varphi = 1$. Ces courbes C sont les trajectoires d'un point libre sollicité par une force dérivant de la fonction des forces

$$U = [\varphi(x, y, z)]^2,$$

ou les courbes brachistochrones, pour une loi de force dérivant de la fonction des forces

$$U' = \left[\frac{1}{\varphi(x, y, z)}\right]^2,$$

la constante des forces vives étant *nulle* dans les deux cas. Elles ont été l'objet de nombreuses recherches qui se trouvent résumées à la fin du deuxième volume des *Leçons de Géométrie* de M. Darboux, recherches qui montrent qu'on peut étendre aux courbes C les propriétés des lignes droites, ou, plus généralement, des lignes géodésiques [1].

Le point de départ de cette extension réside dans ce théorème de MM. Tait et Thomson :

Soient deux courbes C *infiniment voisines,* C *et* C_1, *ayant pour extrémités* A *et* B, A_1 *et* B_1 ; *la variation de l'intégrale* I,

[1] Voyez aussi les Notes de M. Andoyer, *Comptes rendus,* 1885, t. CII; de M. O. Bonnet, *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 1887; de M. Vicaire, *Comptes rendus,* 1888, t. CVI, et la quatorzième Leçon de mon *Cours de Mécanique,* rédigé par MM. Abraham et Delassus.

quand on passe de C *à* C_1, *est*

$$-\overline{AA_1}\,\varphi(A)\cos\widehat{BAA_1}-\overline{BB_1}\,\varphi(B)\cos\widehat{ABB_1},$$

$\varphi(A)$ *et* $\varphi(B)$ *désignant les valeurs de* $\varphi(x, y, z)$ *aux extrémités* A *et* B.

Les conséquences de ce théorème sont identiques à celles qu'on déduit du théorème analogue sur la ligne droite ($\varphi = 1$), relativement à la théorie des *surfaces parallèles* (théorème de Tait et Thomson), *des développées, des lignes de courbure,* etc., à condition de remplacer partout les longueurs des arcs de courbes par les valeurs correspondantes de l'intégrale I.

Nous voulons attirer surtout l'attention sur ce fait, qui ne paraît pas avoir été remarqué, que, si l'on interprète ces théorèmes *à l'aide des courbes brachistochrones,* on est conduit à des énoncés aussi simples que pour la théorie des *développées,* des *lignes de courbure,* etc., en remplaçant partout les arcs de courbes par le temps que met le mobile à les parcourir sans frottement, la constante des forces vives étant nulle.

Nous ne nous arrêtons pas ici à développer cette théorie, ni à examiner des cas particuliers, qui cependant conduisent à quelques exercices dignes d'intérêt sur les courbes brachistochrones.

M. Guimaraes adresse la Note suivante :

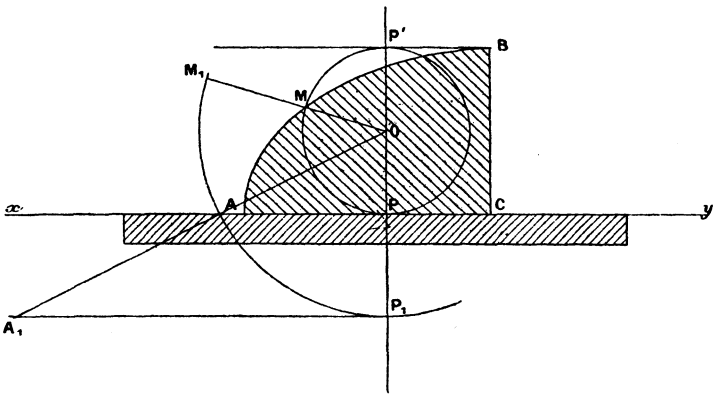
Sur une équerre cycloïdale propre à effectuer la rectification des arcs de cercle.

Soit AMB un arc de cycloïde. Si PMP′ est une position de son cercle générateur, on sait que arc PM = PA. Supposons donc qu'on ait taillé dans une matière quelconque l'équerre ACB donnant par son côté AB le gabarit de la cycloïde. Une règle étant posée le long de la tangente xy menée au cercle O par le point P, il n'y aura qu'à faire glisser le bord AC de l'équerre le long de cette règle jusqu'à ce que le bord curviligne AB passe au point M pour avoir AP = arc MP.

Si l'arc à rectifier M_1P_1 a un rayon différent de OP, il suffit de tracer l'arc concentrique MP de même ouverture et, après l'avoir rectifié en PA, de prendre le point de rencontre A_1 de OA et de la tangente en P_1 à l'arc primitif.

L'équerre cycloïdale ABC permet donc de ramener les divers

problèmes qu'on peut se proposer sur l'évaluation des longueurs et la division des arcs aux mêmes problèmes effectués sur des seg-



ments de droites. L'opération matérielle à exécuter n'est pas plus compliquée que celle qu'exige le tracé des parallèles avec l'équerre ordinaire.

En particulier, l'inscription des polygones réguliers dans le cercle est très simple par ce moyen.

Le problème de la division des angles, se ramenant à celui de la division des arcs, reçoit en même temps une solution.

SÉANCE DU 20 MAI 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Démission : M. Bapst adresse sa démission de membre de la Société.

Communications :

M. Bioche : *Sur les systèmes de courbes transformées homographiques les unes des autres.*

M. Godefroy adresse par l'intermédiaire de M. Fouret une Note *Sur une relation entre les rayons de courbure des développées des courbes réciproques.*

M. Fouret : *Sur un problème d'assurances.*

M. Félix Lucas fait la Communication suivante :

Sur les fonctions d'une variable imaginaire.

Je mets, comme dans ma précédente Communication, la fonction

sous la forme

$$f(z) = e^{V+Ui}. \tag{1}$$

Si le point M, représenté par z, parcourt un élément de trajectoire

$$dz = dx + i\,dy,$$

le travail correspondant de la *force argumentaire* $-\frac{\partial U}{\partial x}$, $-\frac{\partial U}{\partial y}$ est

$$-\frac{\partial U}{\partial x}dx - \frac{\partial U}{\partial y}dy = \frac{\partial V}{\partial y}dx - \frac{\partial V}{\partial x}dy. \tag{2}$$

Le second membre de cette identité représente le produit de la *force modulaire* $-\frac{\partial V}{\partial x}$, $-\frac{\partial V}{\partial y}$, par la projection de dz sur la direction obtenue en faisant tourner cette force d'un angle droit en sens contraire du mouvement des aiguilles de la montre; c'est, par conséquent, le *flux de force modulaire* correspondant au parcours dz; de là ce théorème : *Lorsque z décrit une trajectoire quelconque, le flux de force modulaire est égal au travail argumentaire.*

Considérons le cas où

$$f(z) = \Pi(z - \zeta)^{\mu}, \tag{3}$$

ζ coordonnée d'un point fixe C du plan, μ exposant réel quelconque (positif ou négatif, commensurable ou non). Posons

$$z - \zeta = re^{ui}; \tag{4}$$

nous aurons

$$f(z) = e^{\Sigma\mu(\log \text{nép.} r + ui)} \tag{5}$$

et, par conséquent,

$$V = \Sigma\,\mu \log \text{nép.}\, r. \tag{6}$$

Les projections de la force argumentaire sont donc

$$\left\{\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial x} &= -\frac{\mu}{r}\frac{\partial r}{\partial(x-\xi)} \\ -\frac{\partial V}{\partial y} &+ -\frac{\mu}{r}\frac{\partial r}{\partial(y-\eta)}; \end{aligned}\right. \tag{7}$$

ce sont les projections d'une force centrale exercée sur M par le point C, supposé doué de la masse μ, en raison inverse de la distance MC, cette force étant attractive ou répulsive, suivant que μ est positif ou négatif, ou, en d'autres termes, suivant que μ est un zéro ou un infini de $f(z)$.

Faisons décrire à M un contour fermé *simple,* c'est-à-dire n'ayant

aucun point nodal; un raisonnement analogue à celui par lequel on démontre le théorème de Green relatif aux flux de force dans l'espace nous conduit au théorème suivant : *Le flux de force modulaire relatif à un contour fermé simple, parcouru en sens contraire du mouvement des aiguilles de la montre, est égal et de signe contraire au produit de* 2π *par la somme algébrique des exposants* μ *des zéros et des infinis de* $f(z)$ *qui sont situés dans l'intérieur de ce contour.*

Les flux de force élémentaires sont évalués comme *positifs* ou comme *négatifs* suivant qu'ils sont *sortants* ou *entrants*.

Examinons le cas particulier où $f(z)$ est un polynôme entier du degré p,

$$f(z) = z^p + A_1 z^{p-1} + \ldots + A_{p-1} z + A_p, \tag{8}$$

qui ne peut pas avoir d'infinis à distance finie. Pour un point z pris à une distance infiniment grande r de l'origine, ce polynôme tend vers z^p, en sorte que V tend vers $-p \log$ nép. r. La force modulaire correspondante est une attraction émanant de l'origine des coordonnées supposée douée de la masse p; le flux de force correspondant au parcours d'une circonférence de rayon r ayant son centre à l'origine des coordonnées est $-2\pi p$; par conséquent : *La somme des exposants des zéros d'un polynôme de degré p est égale au degré p de ce polynôme.*

Ce polynôme a donc, soit un zéro multiple du degré p, soit plusieurs zéros distincts; comme l'existence d'un zéro ζ entraîne la divisibilité du polynôme par $(z - \zeta)$, les exposants des zéros sont nécessairement tous entiers; de là cette conséquence :

Théorème de Cauchy. — *Une équation algébrique du degré p a toujours un système de racines, réelles ou imaginaires, dont les degrés de multiplicité donnent une somme égale au degré p.*

Le théorème relatif au flux de force modulaire pour un contour fermé simple peut aussi s'énoncer sous la forme suivante : *Le parcours d'un contour fermé simple en sens contraire du mouvement des aiguilles de la montre fait subir à l'argument de la fonction* $f(z)$ *un accroissement égal au produit de* 2π *par la somme algébrique des exposants des zéros et des infinis contenus dans l'intérieur de ce contour.*

On a, en effet,

$$\int dU = \int \frac{\partial U}{\partial x} dx + \int \frac{\partial U}{\partial y} dy = -\int \left(\frac{\partial V}{\partial y} dx - \frac{\partial V}{\partial x} dy \right) = 2\pi m,$$

m désignant la somme algébrique des exposants μ des zéros et des infinis renfermés dans le contour.

M. Appell adresse la Note suivante :

Sur le mouvement d'un point en coordonnées elliptiques.

Soient x, y, z les coordonnées cartésiennes d'un point, et λ_1, λ_2, λ_3 les coordonnées elliptiques racines de l'équation

$$\frac{x^2}{a_1+\lambda} + \frac{y^2}{a_2+\lambda} + \frac{z^2}{a_3+\lambda} - 1 = 0.$$

Les équations du mouvement d'un point libre en coordonnées elliptiques ont été ramenées à des quadratures par Jacobi (*Vorlesungen über Dynamik*) dans le cas où le point n'est sollicité par aucune force, ou est attiré par l'origine proportionnellement à la distance. La méthode de Jacobi conduit encore à des quadratures, comme il est connu, quand le point est en outre attiré par chacun des plans coordonnés en raison inverse du cube de la distance.

On peut ramener aux quadratures le cas plus général où le point serait sollicité par une force dérivant d'une fonction des forces de la forme

$$(1) \qquad U = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & U_1 \\ 1 & \lambda_2 & U_2 \\ 1 & \lambda_3 & U_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix}},$$

U_1 étant fonction de la seule variable λ_1, U_2 de λ_2, U_3 de λ_3. Il suffit d'ajouter U_1, U_2, U_3 aux expressions qui figurent sous les radicaux dans la trentième leçon de Jacobi. En particulier, si l'on suppose

$$U_1 = R(\lambda_1), \qquad U_2 = R(\lambda_2) \qquad U_3 = R(\lambda_3),$$

$R(\lambda)$ étant une fonction rationnelle de λ, la fonction U sera *rationnelle et symétrique* en λ_1, λ_2, λ_3; ce sera donc une fonction

rationnelle de x^2, y^2, z^2 facile à calculer. Ainsi $R(\lambda) = \frac{k}{\lambda}$ donne

$$U = \frac{h}{\frac{x^2}{a_1} + \frac{y^2}{a_2} + \frac{z^2}{a_3} - 1}.$$

Cette remarque s'étend évidemment sous la même forme au cas de n variables traité par Jacobi.

Il serait intéressant d'obtenir les fonctions de forces U de la forme (1) vérifiant l'équation du potentiel

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

On aurait ainsi de nouveaux problèmes de mouvement d'un point attiré suivant la loi de Newton pouvant se ramener aux quadratures. La détermination des potentiels U de la forme (1) se fera à l'aide de la transformation bien connue de l'équation (2) en coordonnées elliptiques. Nous nous bornons à indiquer ce dernier point comme un exercice de calcul.

M. D'OCAGNE fait la Communication suivante :

Sur la construction des cubiques cuspidales (unicursales de la troisième classe).

On sait (SALMON, *Courbes planes,* traduction Chemin, p. 257) que l'équation de toute cubique cuspidale peut se mettre sous la forme

$$X_1 X_2^2 = \lambda X_3^3,$$

$X_1 = 0$ étant la tangente IT au point d'inflexion I,
$X_2 = 0$ la tangente RT au point de rebroussement R,
$X_3 = 0$ la droite IR joignant ces deux points.

Dès lors, si l'on donne les points d'inflexion et de rebroussement et les tangentes en ces points, c'est-à-dire les trois côtés du triangle IRT, il suffira d'une condition supplémentaire, par exemple de la connaissance d'un point simple P, pour déterminer complètement la courbe.

La courbe étant ainsi définie, la tangente au point P doit se déduire des données. Nous avons, en effet, trouvé que, *si cette tangente coupe la droite* IT *au point* S *et que la droite* PR *coupe* IT *au point* U, *on a* $(IUTS) = -\frac{1}{2}$. On peut encore dire

que, *si la parallèle menée à* PI *par* T *coupe* PU *en* U′ *et* PS *en* S′, *on a* $S'U' = -\frac{TU'}{2}$.

Si la droite PR est parallèle à IT, le point U est rejeté à l'infini et l'on a ce théorème : *Si la parallèle à la tangente d'inflexion menée par le point de rebroussement coupe la cubique au point* P_1, *la tangente en* P_1 *coupe la tangente d'inflexion en un point* S_1 *tel que* $S_1I = -2TI$.

Si la tangente PS est parallèle à IT, c'est le point S qui est rejeté à l'infini, et l'on a cet autre théorème : *La droite qui joint le point de rebroussement au point* P_2, *où la tangente est parallèle à la tangente d'inflexion, coupe celle-ci en un point* U_2 *tel que* $TU_2 = -2TI$.

On voit que les points S_1 et U_2, qui viennent d'être définis, sont symétriques par rapport au milieu de TI.

La cubique cuspidale étant complètement déterminée par le triangle IRT et le point P, voici comment s'obtiendront les divers points de cette cubique au moyen de ces données :

RQ *étant la conjuguée harmonique, tracée une fois pour toutes, de* RP *par rapport à* RT *et* RI, *menons par le point* T *une droite quelconque qui coupe* RP *en* A, RQ *en* B, IP *en* C, *et prenons le conjugué harmonique* D *de* C *par rapport à* A *et* B. *Le point de rencontre* M *des droites* RC *et* ID *engendre la cubique lorsque la droite* TA *pivote autour du point* T.

La tangente en M sera déterminée de la même façon que l'a été précédemment la tangente en P.

Si, en outre du triangle RIT, on se donnait, comme condition supplémentaire, une tangente au lieu d'un point, on n'aurait qu'à déterminer, au moyen du premier des théorèmes susénoncés, le point de contact de cette tangente pour être ramené au cas précédent.

Ce théorème prend d'ailleurs une forme particulière dans les deux cas suivants : 1° *Le point d'inflexion est à l'infini.* La relation $(IUTS) = -\frac{1}{2}$ devient alors $\frac{SU}{TU} = -\frac{1}{2}$, ou $US = \frac{TU}{2}$. 2° *Les tangentes au point d'inflexion et au point de rebroussement sont parallèles.* Le point T étant alors à l'infini, on a $\frac{SU}{SI} = -\frac{1}{2}$, ou $US = \frac{UI}{3}$.

SÉANCE DU 3 JUIN 1891.

PRÉSIDENCE DE M. COLLIGNON.

Communications :

M. Laisant fait la Communication suivante :

Sur deux problèmes de permutations.

Dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (séance du 11 mai 1891), j'ai indiqué une solution générale du problème suivant :

Trouver le nombre des permutations sans répétitions que l'on peut former avec n objets différents a, b, c, ..., h, l, chacune des n places ne pouvant être occupée que par certains de ces objets.

Si l'on appelle a_k, b_k, c_k, ... ceux des n objets qui peuvent seuls occuper la place de rang k, et si l'on forme le produit

$$\begin{aligned}&(a_1+b_1+c_1+\ldots)(a_2+b_2+c_2+\ldots)\ldots(a_n+b_n+c_n+\ldots)\\&\quad=\mathrm{F}(a,b,c,\ldots,l),\end{aligned}$$

on trouve que le nombre cherché a pour expression

$$\frac{d^n\,\mathrm{F}(a,b,c,\ldots,l)}{da\,db\,dc\ldots dl}.$$

Cette formule est, dans la plupart des cas, d'une application difficile, à cause de la longueur des calculs. Elle peut néanmoins être d'une certaine utilité en ce qu'elle permet de vérifier parfois numériquement des résultats obtenus par une voie différente.

J'en donnerai simplement ici deux exemples, en me bornant à indiquer sommairement les résultats.

Problème I. — *n groupes de deux personnes (mari et femme) devant s'asseoir autour d'une table, et les n femmes s'étant assises en laissant une place vide entre deux quelconques d'entre elles, de combien de manières leurs maris peuvent-ils occuper les places vides, sous la condition qu'un mari ne se trouve pas à côté de sa femme?*

On traduit facilement cette question par la suivante : *Sur un*

échiquier carré de n^2 cases, de combien de manières peut-on placer n tours qui ne soient pas en prise réciproque deux à deux, sous la condition que les cases 1, 2 *dans la première colonne,* 2, 3 *dans la deuxième,* ..., $(n-1)$, n *dans la* $(n-1)^{ième}$, *et* n, 1 *dans la* $n^{ième}$, *restent inoccupées?*

Cette nouvelle forme de la question m'a permis [1], par des considérations simples, mais cependant assez délicates, d'arriver à la formule récurrente suivante, en appelant X_n le nombre cherché :

$$(1) \qquad X_{n+1} = \frac{n^2-n+1}{n-1}(X_n + X_{n-1}) + \frac{n}{n-1} X_{n-2}.$$

On a aussi

$$(2) \qquad X_{n+1} = (n+1)X_n + 2X_{n-1} - (n-3)X_{n-2} - X_{n-3}.$$

Enfin, la relation (1) permet d'obtenir la suivante, qui est due à M. le colonel Moreau, mais n'a pas encore été publiée,

$$(3) \qquad (n-1)X_{n+1} - (n^2-1)X_n - (n+1)X_{n-1} = 4(-1)^n.$$

Le calcul numérique des valeurs X_n est encore facilité par cette remarque : si l'on pose $X_n = X'_n + 2(-1)^n$, puis $\frac{X'_n}{n} = T_n$, on obtient

$$(4) \qquad T_{n+1} = \quad nT_n + \quad T_{n-1} + 2(-1)^n,$$

$$(5) \qquad T_{n+1} = (n-1)T_n + nT_{n-1} + T_{n-2}.$$

Les premières valeurs de X_n sont $X_3 = 1$, $X_4 = 2$, $X_5 = 13$; et celles de T_n : $T_4 = 0$, $T_5 = 3$, $T_6 = 13$, ce qui rend facile le calcul des valeurs successives.

La fonction F, dont il est question au début de la présente Note, est

$$F(a, b, c, \ldots, h, l) = (s-a-b)(s-b-c)\ldots(s-h-l)(s-l-a),$$

en posant

$$s = a + b + c + \ldots + h + l.$$

L'application de la méthode indiquée plus haut a permis de vérifier les valeurs obtenues jusqu'à $n = 10$, et de s'assurer ainsi,

---

[1] Les démonstrations détaillées figurent dans la *Théorie des nombres,* de M. Édouard Lucas. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891.

par voie indirecte, de l'exactitude des diverses formules récurrentes écrites plus haut.

Problème II. — *Sur un échiquier carré de n^2 cases, de combien de manières peut-on placer n tours qui ne soient pas en prise réciproque deux à deux, sous la condition que les cases des deux diagonales restent inoccupées?*

Ce problème, analogue au précédent, m'a conduit aux deux formules récurrentes que voici, en appelant Y_n le nombre cherché :

$$(6) \qquad Y_{2n+1} = 2nY_{2n} + 4nY_{2n-1},$$

$$(7) \qquad Y_{2n+2} = (2n+1)Y_{2n+1} + 4nY_{2n-2}.$$

En posant

$$\frac{Y_{2n}}{2^n(n-1)} = Z_{2n} \qquad \text{et} \qquad \frac{Y_{2n+1}}{2^{n+1}n(n-1)} = Z_{2n+1},$$

on obtient

$$(8) \qquad Z_{2n+1} = Z_{2n} + 2(n-2)Z_{2n-1},$$

$$(9) \qquad Z_{2n+2} = (2n+1)(n-1)Z_{2n+1} + (n-2)Z_{2n-2}.$$

Les premières valeurs sont

$$Y_2 = 0, \quad Y_3 = 0, \quad Y_4 = 4, \quad Y_5 = 16$$

et

$$Z_3 = 0, \quad Z_4 = 1, \quad Z_5 = 1, \quad Z_6 = 5.$$

La fonction F, en posant, comme tout à l'heure,

$$s = a + b + c + \ldots + h + l,$$

est

$$F(a, b, c, \ldots, h, l) = (s-a-l)(s-b-h)\ldots(s-h-b)(s-l-a).$$

Il y a un facteur du milieu lorsque n est impair, et ce facteur est alors de la forme $s - j$; lorsque n est pair, on a

$$F = [(s-a-l)(s-b-h)\ldots]^2.$$

Les valeurs fournies par l'application de la méthode indiquée ont permis, comme précédemment, de vérifier les résultats donnés par les formules de récurrence.

Voici, jusqu'à $n = 10$, les valeurs numériques obtenues pour X_n dans le premier problème et Y_n dans le second :

n	3	4	5	6	7	8	9	10
X_n	1	2	13	80	579	4738	43387	439792
Y_n	0	4	16	80	672	4752	48768	440192

M. Raffy fait une Communication *Sur la détermination des surfaces spirales d'après leur élément linéaire.* Il montre que ce problème, déjà résolu par M. Maurice Lévy (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* t. LXXXVII, p. 788) dépend de l'équation

$$y^2 + y'^2 = F(x),$$

qui peut être intégrée dans un certain nombre de cas, notamment quand la fonction F est une constante ou une exponentielle. Il rappelle qu'une équation de même forme détermine les géodésiques des surfaces spirales, et que ces lignes ont été trouvées par d'autres moyens pour plusieurs classes de spirales; il en déduit qu'on peut parfois obtenir au moins une infinité de spirales admettant un élément linéaire donné.

M. d'Ocagne présente, au sujet de la Communication précédente, la remarque que voici :

L'équation différentielle

$$y^2 + y'^2 = F(x),$$

rencontrée par M. Raffy au cours de ses recherches sur les surfaces spirales, se présente encore (lorsqu'on y remplace respectivement x et y par les coordonnées polaires ω et ρ) dans un autre genre de recherche géométrique.

Je rappellerai d'abord que j'ai appelé *isométriques* d'une courbe C par rapport aux droites issues d'un point O, les courbes dont les arcs compris entre deux droites quelconques issues du point O sont égaux à l'arc de la courbe C compris entre les mêmes droites.

Cela posé, et l'origine étant placée au point O, on voit aisément que l'équation différentielle des isométriques cherchées est

$$\rho^2 + \rho'^2 = \varphi^2(\omega),$$

$\varphi(\omega)$ étant la dérivée $\frac{ds}{d\omega}$ de l'arc de la courbe C donnée par rapport à l'angle polaire.

Analytiquement, le problème est donc identique à celui qu'a envisagé M. Raffy au sujet des surfaces spirales.

Je l'ai résolu complètement dans le cas où la courbe C donnée est une droite (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XIII, p. 75, et t. XVII, p. 171). La fonction $\varphi(\omega)$ est alors inversement proportionnelle à $\cos^2\omega$.

SÉANCE DU 17 JUIN 1891.

PRÉSIDENCE DE M. VICAIRE.

Communications :

M. de Mendizabal présente les épreuves d'un *Recueil de Tables logarithmiques et trigonométriques* qu'il va publier incessamment.

M. Lucien Lévy : *Sur les systèmes de surfaces triplement orthogonales.*

M. Beghin : *Sur certaines singularités que peuvent présenter les fonctions monodromes qui admettent des espaces lacunaires.*

M. d'Ocagne : *Sur la représentation graphique d'une classe d'équations à quatre variables.*