BULLETIN DE LA S. M. F.

C.-A. LAISANT

Quelques formules relatives aux fonctions hyperboliques

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 52-54

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__52_1>

Quelques formules relatives aux fonctions hyperboliques;
par M. C.-A. LAISANT.

Lorsque deux variables, x et y, sont liées par la relation

$$\sin x = \operatorname{Th} y, \tag{1}$$

x est dite *amplitude hyperbolique* de y; et, réciproquement, on appelle y, d'après Gudermann, *longueur* de x.

Cette relation (1) entraîne les suivantes :

$$\operatorname{tang} x = \operatorname{Sh} y, \tag{2}$$

$$\cos x = \operatorname{Séch} y = \frac{1}{\operatorname{Ch} y}. \tag{3}$$

On a aussi

$$\tag{4} \operatorname{tang}\frac{x}{2} = \operatorname{Th}\frac{y}{2} = z.$$

La formule (3) peut s'écrire

$$\cos x \operatorname{Ch} y = 1,$$

et l'on en tire, par différentiation,

$$-\sin x \operatorname{Ch} y\, dx + \cos x \operatorname{Sh} y\, dy = 0,$$

c'est-à-dire, en vertu des relations précédentes,

$$\tag{5} \frac{dy}{dx} = \frac{\sin x \operatorname{Ch} y}{\cos x \operatorname{Sh} y} = \frac{1}{\cos x} = \operatorname{Ch} y.$$

Par conséquent,

$$dy = \frac{dx}{\cos x}, \qquad dx = \frac{dy}{\operatorname{Ch} y}.$$

Intégrant,

$$\tag{6} \int \frac{dx}{\cos x} = y = \mathfrak{L} x,$$

$$\tag{7} \int \frac{dy}{\operatorname{Ch} y} = x = \operatorname{Amh} y.$$

D'ordinaire, on écrit la première de ces deux intégrales sous la forme plus compliquée

$$\log \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \qquad \text{ou} \qquad \log \frac{\cos\frac{x}{2} + \sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2} - \sin\frac{x}{2}}.$$

La relation (5) peut encore s'écrire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\operatorname{Sh} y}{\sin x} = \frac{\operatorname{tang} x}{\operatorname{Th} y}.$$

Donc

$$\tag{8} \int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dy}{\operatorname{Sh} y},$$

$$\tag{9} \int \operatorname{tang} x\, dx = \int \operatorname{Th} y\, dy.$$

L'emploi de la valeur z, introduite dans la formule (4) ci-dessus, permet de donner aux intégrales qui précèdent les formes très simples

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dy}{\mathrm{Sh}\, y} = \log z,$$

$$\int \operatorname{tang} x \, dx = \int \mathrm{Th}\, y \, dy = \log \frac{1+z^2}{1-z^2},$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = 2 \arg \mathrm{Th}\, z, \qquad \int \frac{dy}{\mathrm{Ch}\, y} = 2 \operatorname{arc\,tang} z.$$

Il va de soi que les diverses intégrales ci-dessus doivent être prises entre les mêmes limites correspondantes pour que les formules soient valables.