C.-A. Laisant

Remarque sur l'interpolation

Bulletin de la S. M. F., tome 19 (1891), p. 44-46
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__44_1>

Remarque sur l'interpolation; par M. C.-A. LAISANT.

La formule d'interpolation de Lagrange donne, comme l'on sait, sous forme entière de degré $n - 1$, une fonction u de x, assujettie à prendre les valeurs

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_n$$

pour les valeurs données de x

$$a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_n.$$

Elle peut s'écrire

$$(1)\qquad u = X_1 u_1 + X_2 u_2 + \ldots - X_n u_n,$$

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant des polynômes en x tels que X_k s'annule pour les valeurs $a_1, a_2, \ldots$ autres que a_k, et se réduit à l'unité pour $x = a_k$.

De cette formule (1) il est possible de déduire une infinité de fonctions de x satisfaisant aux mêmes conditions. Soient, en effet, $t = \varphi(z)$ une fonction arbitraire d'une seule variable, et φ^{-1} la caractéristique de la fonction inverse, c'est-à-dire telle que

$$z = \varphi^{-1}(t).$$

Il s'ensuit que

$$\varphi[\varphi^{-1}(t)] = t, \qquad \varphi^{-1}[\varphi(z)] = z.$$

Si, dans la formule (1), nous remplaçons $u_1, u_2, \ldots, u_n$ par $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n)$, et si nous écrivons

$$(2)\qquad \varphi^{-1}[X_1\varphi(u_1) + X_2\varphi(u_2) + \ldots + X_n\varphi(u_n)],$$

il est bien évident que cette nouvelle fonction satisfera encore aux conditions imposées; car, pour $x = a_k$ par exemple, la quantité entre parenthèses se réduira à $\varphi(u_k)$, si bien que nous aurons

$$\varphi^{-1}[\varphi(u_k)] = u_k.$$

Cette remarque s'applique évidemment à toute formule d'interpolation où figurent les valeurs données $u_1, u_2, \ldots$ de la fonction cherchée. Ainsi, Cauchy (*Analyse algébrique,* Note V) a donné une formule, sous forme fractionnaire, qui peut s'écrire

$$(3)\qquad u = \frac{F(x, u_1, u_2, \ldots)}{f(x, u_1, u_2, \ldots)}.$$

On en déduira la formule beaucoup plus générale

$$(4)\qquad u = \varphi^{-1}\left\{\frac{F[x, \varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots]}{f[x, \varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots]}\right\},$$

puisque la quantité entre crochets se réduit à $\varphi(u_k)$ pour $x = a_k$; d'où

$$u = \varphi^{-1}[\varphi(u_k)] = u_k.$$

Pour nous en tenir à la formule de Lagrange, nous nous bornerons, en terminant, à indiquer les formules suivantes, résultant des hypothèses $\varphi(z) = z^2, \sqrt{z}, e^z, lz, \frac{z-1}{z+1}$:

$$u = \sqrt[2]{X_1 u_1^2 + X_2 u_2^2 + \ldots}, \tag{5}$$

$$u = (X_1 \sqrt{u_1} + X_2 \sqrt{u_2} + \ldots)^2, \tag{6}$$

$$u = l(X_1 e^{u_1} + X_2 e^{u_2} + \ldots), \tag{7}$$

$$u = e^{X_1 lu_1 + X_2 lu_2 + \ldots}, \tag{8}$$

$$u = \frac{1 + X_1 \frac{u_1 - 1}{u_1 + 1} + X_2 \frac{u_2 - 1}{u_2 + 1} + \ldots}{1 - X_1 \frac{u_1 - 1}{u_1 + 1} - X_2 \frac{u_2 - 1}{u_2 + 1} - \ldots}. \tag{9}$$

On comprend tout l'intérêt qu'offre cette latitude laissée à la forme de la fonction, et qui permet de faire un choix, suivant la nature du problème qui a donné naissance à la question d'interpolation qu'on se propose de résoudre.