

# BULLETIN DE LA S. M. F.

C.- A. LAISANT

## Remarque sur l'interpolation

*Bulletin de la S. M. F.*, tome 19 (1891), p. 44-46

[http://www.numdam.org/item?id=BSMF\\_1891\\_\\_19\\_\\_44\\_1](http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1891__19__44_1)

© Bulletin de la S. M. F., 1891, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

*Remarque sur l'interpolation; par M. C.-A. LAISANT.*

La formule d'interpolation de Lagrange donne, comme l'on sait, sous forme entière de degré  $n - 1$ , une fonction  $u$  de  $x$ , assujettie à prendre les valeurs

$$u_1, u_2, \dots, u_n$$

pour les valeurs données de  $x$

$$a_1, a_2, \dots, a_n.$$

Elle peut s'écrire

$$(1) \quad u = X_1 u_1 + X_2 u_2 + \dots + X_n u_n,$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$  étant des polynômes en  $x$  tels que  $X_k$  s'annule pour les valeurs  $a_1, a_2, \dots$  autres que  $a_k$ , et se réduit à l'unité pour  $x = a_k$ .

De cette formule (1) il est possible de déduire une infinité de fonctions de  $x$  satisfaisant aux mêmes conditions. Soient, en effet,  $t = \varphi(z)$  une fonction arbitraire d'une seule variable, et  $\varphi^{-1}$  la caractéristique de la fonction inverse, c'est-à-dire telle que

$$z = \varphi^{-1}(t).$$

Il s'ensuit que

$$\varphi[\varphi^{-1}(t)] = t, \quad \varphi^{-1}[\varphi(z)] = z.$$

Si, dans la formule (1), nous remplaçons  $u_1, u_2, \dots, u_n$  par  $\varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots, \varphi(u_n)$ , et si nous écrivons

$$(2) \quad \varphi^{-1}[X_1 \varphi(u_1) + X_2 \varphi(u_2) + \dots + X_n \varphi(u_n)],$$

il est bien évident que cette nouvelle fonction satisfera encore aux conditions imposées; car, pour  $x = a_k$  par exemple, la quantité entre parenthèses se réduira à  $\varphi(u_k)$ , si bien que nous aurons

$$\varphi^{-1}[\varphi(u_k)] = u_k.$$

Cette remarque s'applique évidemment à toute formule d'interpolation où figurent les valeurs données  $u_1, u_2, \dots$  de la fonction cherchée. Ainsi, Cauchy (*Analyse algébrique*, Note V) a donné une formule, sous forme fractionnaire, qui peut s'écrire

$$(3) \quad u = \frac{F(x, u_1, u_2, \dots)}{f(x, u_1, u_2, \dots)}.$$

On en déduira la formule beaucoup plus générale

$$(4) \quad u = \varphi^{-1} \left\{ \frac{F[x, \varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots]}{f[x, \varphi(u_1), \varphi(u_2), \dots]} \right\},$$

puisque la quantité entre crochets se réduit à  $\varphi(u_k)$  pour  $x = a_k$ ; d'où

$$u = \varphi^{-1}[\varphi(u_k)] = u_k.$$

Pour nous en tenir à la formule de Lagrange, nous nous borne-

rons, en terminant, à indiquer les formules suivantes, résultant des hypothèses  $\varphi(z) = z^2, \sqrt{z}, e^z, lz, \frac{z-1}{z+1}$  :

$$(5) \quad u = \sqrt[2]{X_1 u_1^2 + X_2 u_2^2 + \dots},$$

$$(6) \quad u = (X_1 \sqrt{u_1} + X_2 \sqrt{u_2} + \dots)^2,$$

$$(7) \quad u = l(X_1 e^{u_1} + X_2 e^{u_2} + \dots),$$

$$(8) \quad u = e^{X_1 l u_1 + X_2 l u_2 + \dots},$$

$$(9) \quad u = \frac{1 + X_1 \frac{u_1 - 1}{u_1 + 1} + X_2 \frac{u_2 - 1}{u_2 + 1} + \dots}{1 - X_1 \frac{u_1 - 1}{u_1 + 1} - X_2 \frac{u_2 - 1}{u_2 + 1} - \dots}.$$

On comprend tout l'intérêt qu'offre cette latitude laissée à la forme de la fonction, et qui permet de faire un choix, suivant la nature du problème qui a donné naissance à la question d'interpolation qu'on se propose de résoudre.